CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
Direction de l'Enseignement

**BANQUE COMMUNE D'EPREUVES ECRITES
POUR LE HAUT ENSEIGNEMENT COMMERCIAL**

**Concepteurs :
H.E.C.
E.S.C.P. – E.A.P.**

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Lundi 10 Mai 2004, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

L'objet de ce problème est la recherche et l'étude de lois possédant une propriété, dite de *stabilité*, qui intervient dans la modélisation de nombreux phénomènes satisfaisant une certaine invariance d'échelle.

• Soit X une variable aléatoire réelle. On dit qu'une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires est une *suite de copies* de X si $(X_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables *indépendantes* ayant toutes *même loi* que X.

• On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi *stable* si il existe une suite réelle strictement positive $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que, pour toute suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de copies de X et pour tout entier n supérieur ou égal 1, $X_1 + ... + X_n$ et $a_n X$ ont même loi. On vérifie facilement l'unicité de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ si X n'est pas nulle presque sûrement. On dira alors que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est la *suite associée* à la loi de X.

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1 (*i.e.* $\{1, 2, 3, ...\}$).

On admettra que

$$\forall A > 0, \quad \arctan A + \arctan \frac{1}{A} = \frac{\pi}{2}$$

où l'expression arctan désigne la *fonction réciproque* de la restriction de la fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

I. Un résultat sur certaines suites positives

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels *strictement positifs* vérifiant les deux propriétés suivantes:

- pour tout couple d'entiers $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $u_{mn} = u_m u_n$,
- il existe un réel strictement positif A tel que, pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$, si $m \leq n$, alors $u_m \leqslant A u_n$.

On veut montrer qu'il existe un réel positif α tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^\alpha$.

1) Montrer que $u_1 = 1$.

2) Montrer que, pour tout couple $(r,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $u_{r^k} = u_r^k$.

3) Soit $r \in \mathbb{N}^\star, r \geqslant 2$. Montrer qu'il existe un réel α_r tel que, pour tout entier n de la forme r^k, où k est un entier positif, $u_n = n^{\alpha_r}$. Exprimer α_r en fonction de r et de u_r.

4) Soit $(r_1, r_2) \in \mathbb{N}^{\star 2}$, $r_2 > r_1 \geqslant 2$. On introduit alors les réels α_{r_1} et α_{r_2} définis selon la question précédente.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe un entier ℓ tel que $r_2^k \leqslant r_1^\ell < r_2^{k+1}$.

b) En déduire que $(r_2^k)^{\alpha_{r_2}} \leqslant A(r_2^{k+1})^{\alpha_{r_1}}$ et $(r_2^k)^{\alpha_{r_1}} \leqslant A(r_2^{k+1})^{\alpha_{r_2}}$.

c) En faisant tendre k vers l'infini, déduire l'égalité $\alpha_{r_1} = \alpha_{r_2}$. Conclure.

II. La loi gaussienne

A. On rappelle l'expression de la densité d'une variable gaussienne de moyenne m et de variance σ^2 :

$$f_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

1) Soit a un réel *strictement positif* et b et c deux réels quelconques.

Trouver trois réels α, m, σ, que l'on exprimera en fonction de a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + \alpha = ax^2 + bx + c$$

2) En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-(ax^2+bx+c)\big)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

3) Soient G et G' deux variables aléatoires gaussiennes *centrées indépendantes* de variances respectives σ^2 et σ'^2. **Redémontrer** en calculant la densité de la loi de $G+G'$, que $G+G'$ est une variable gaussienne dont on donnera l'espérance et la variance.

4) Montrer que G suit une loi stable. Quelle est la suite associée à la loi de G ?

B. Dans cette section, X est une variable aléatoire qui suit une loi *stable* et qui admet une espérance m et une variance σ^2 *strictement positive. On ne suppose pas que X suit une loi gaussienne.* Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de copies de X et $(a_k)_{k\geqslant 1}$ la suite associée à la loi de X.

1) En considérant les variances de $X_1 + \ldots + X_n$ et de $a_n X$, donner, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de a_n. Montrer que $m = 0$.

2) En appliquant le théorème de la limite centrée, montrer que X suit une loi gaussienne.

III. La loi de Cauchy

1) Soit $a > 0$. Vérifier que la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{a}{\pi(x^2+a^2)}$ est bien une densité de probabilité. (On utilisera le changement de variable $x = a \tan t$).

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Cauchy de paramètre a si elle admet la fonction f_a pour densité.

2) Soit Z une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy de paramètre *égal à* 1.

a) La variable Z admet-elle une espérance ?

b) Soit $\lambda > 0$. Quelle est la loi de λZ ?

3) Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 à *coefficients réels.* Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes *distincts* de partie imaginaire *strictement positive.* Montrer que si z_1 et z_2 sont des racines de P, alors $P = 0$. (On remarquera que $\overline{z}_1$ et $\overline{z}_2$ sont également racines de P.)

4) Soient $a, a' > 0$, et $y \in \mathbb{R}^\star$. Soient u, u', v, v' quatre réels tels que

$$u + iv = \frac{a'}{\pi((y - ia)^2 + a'^2)} \qquad \text{et} \qquad u' + iv' = \frac{a}{\pi((y + ia')^2 + a^2)}$$

où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{aa'}{\pi^2(x^2 + a^2)((x-y)^2 + a'^2)} = \frac{vx + au}{\pi(x^2 + a^2)} + \frac{v'(x-y) + a'u'}{\pi((x-y)^2 + a'^2)} \quad (\star)$$

(On multipliera les deux membres de $(\star)$ par leur dénominateur commun et on appliquera la question précédente en prenant $z_1 = ia$ et $z_2 = y + ia'$.)

b) **On admet** les égalités suivantes :

$$u + iv = \frac{a'(y^2 + a'^2 - a^2) + 2iaa'y}{\pi(y^2 + (a + a')^2)(y^2 + (a - a')^2)}$$
$$u' + iv' = \frac{a(y^2 + a^2 - a'^2) - 2iaa'y}{\pi(y^2 + (a + a')^2)(y^2 + (a - a')^2)}$$

Montrer que :

$$u + u' = \frac{a + a'}{\pi(y^2 + (a + a')^2)}.$$

5) Soit $B > 0$. Calculer $\displaystyle\int_{-B}^{B} \frac{x}{x^2 + a^2}dx$ et $\displaystyle\int_{-B}^{B} \frac{x - y}{(x-y)^2 + a^2}dx$.

6) Soient Z_a et $Z_{a'}$ deux variables aléatoires *indépendantes* suivant des lois de Cauchy de paramètres respectifs a et a'. Montrer que la valeur de la densité de la loi de $Z_a + Z_{a'}$ au point y est égale à $u + u'$ (cf. question 4). En déduire la loi de $Z_a + Z_{a'}$. $\Big\}\ 0 \neq a'$

7) En déduire que Z suit une loi stable. Quelle est la suite associée à la loi de Z ?

IV. Les événements exceptionnels

Du fait de la décroissance rapide à l'infini de la fonction densité des variables gaussiennes, celles-ci n'accordent que peu d'importance aux valeurs extrêmes. Aussi, pour inclure, dans un modèle mathématique, l'éventualité de phénomènes extrêmes, on est amené à privilégier des lois dont la fonction densité décroît moins vite à l'infini. Le but de cette partie est d'étudier ce qu'il en est pour la loi de Cauchy.

Dans cette partie, $(X_i)_{i \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires *indépendantes* suivant la loi de Cauchy de *paramètre* 1.

On dira qu'un événement exceptionnel s'est produit avant l'instant n, si il existe un entier k inférieur ou égal à n tel que, pour tout entier i inférieur ou égal à n et *différent* de k, $|X_k| > 2|X_i|$. Autrement dit, à l'instant n, la variable la plus forte de l'histoire (en valeur absolue) est supérieure au double de chacune des autres variables. On appellera E_n un tel événement. Ainsi,

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Big(\bigcap_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} (|X_k| > 2|X_i|) \Big)$$

1) Montrer que :

$$P(E_n) = nP\Big(\bigcap_{i=2}^{n} (|X_1| > 2|X_i|)\Big).$$

2) En déduire que :

$$\forall A > 0, \quad P(E_n) \geqslant nP\Big((|X_1| > 2A) \cap \big(\bigcap_{i=2}^{n}(|X_i| < A)\big)\Big).$$

3) Montrer que : $\forall A > 0$, $P(|X_1| > A) = \dfrac{2}{\pi} \arctan \dfrac{1}{A}$.

4) Soit $\lambda > 0$, et n assez grand pour que $\dfrac{\pi\lambda}{2n} < \dfrac{\pi}{2}$. En choisissant $A = \dfrac{1}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}}$, montrer que

$$P(E_n) \geqslant nP\Big(|X_1| > \frac{2}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}}\Big)(1 - \frac{\lambda}{n})^{n-1}.$$

5) Soit $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$. Montrer que, pour tout entier n assez grand, $P(E_n) > \dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda} - \varepsilon$.

6) En déduire que, pour tout entier n assez grand, $P(E_n) > \dfrac{1}{6}$.

V. Le nombre a_n est une puissance de n

Soit X une variable aléatoire suivant une loi *stable*. Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de copies de X et $(a_k)_{k\geqslant 1}$ la suite associée à la loi de X.

A. Une variable aléatoire X est dite *symétrique* si elle a la même loi que la variable $-X$. Autrement dit, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $P(X \in I) = P(-X \in I)$ (exemple : une variable gaussienne centrée).

presque sûrement

Dans cette section, on suppose X *non nulle et symétrique.*

1) Montrer que $P(X > 0) = \frac{1}{2}(1 - P(X = 0))$.

2) Montrer qu'il existe $\mu > 0$ tel que $P(X > \mu) > 0$.

3) a) Montrer que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$, $a_{m+n}X$ a même loi que $a_m X_1 + a_n X_2$.

b) En déduire que, pour tout k-uplet d'entiers non nuls $(m_1, ..., m_k)$, $a_{m_1+...+m_k}X$ a même loi que $a_{m_1}X_1 + ... + a_{m_k}X_k$.

c) En prenant tous les entiers m_i égaux à un même entier ℓ, montrer que $a_{k\ell} = a_k a_\ell$.

4) En considérant l'événement $(X_1 \geqslant 0)\cap(X_2 > t)$, montrer en utilisant la question V.A.3.a, que pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$, et pour tout $t > 0$,

$$P(X > \frac{a_n}{a_{m+n}}t) \geqslant \frac{1}{2}P(X > t).$$

5) En utilisant la question V.A.2., montrer que l'ensemble $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+m}} : (m, n) \in \mathbb{N}^{\star 2}\right\}$ est majoré. En déduire l'existence d'un réel α tel que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = n^\alpha$.

B. On suppose que X suit une loi stable à densité, mais on ne suppose plus que X est symétrique.

1) Montrer que la variable $X_1 - X_2$ est symétrique.

2) Montrer que $X_1 - X_2$ suit une loi stable. Soit $(b_n)_{n\geqslant 1}$ la suite associée à la loi de $X_1 - X_2$. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = b_n$. Conclure.

AVERTISSEMENT

Notons le flou artistique du texte sur la notion de variable aléatoire ayant même loi. Au fait de quel type de variables aléatoires s'agit-il ?

En première lecture nous pouvions savoir que deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ont même loi si elles ont même fonction de répartition.

Les gens plus exigeants diront que deux variables aléatoires X et Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ont même loi si elles ont la même probabilité image ; autrement dit si $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $P(X^{-1}(B)) = P(Y^{-1}(B))$ (ou $P(X \in B) = P(Y \in B)$)

Notons que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) X et Y ont même loi

i') $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $P(X^{-1}(B)) = P(Y^{-1}(B))$

ii) Pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$, $P(X^{-1}(J)) = P(Y^{-1}(J))$.

iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X^{-1}(]-\infty, x])) = P(Y^{-1}(]-\infty, x]))$

iii') $F_X = F_Y$

Dans ce qui suit les variables aléatoires le sont sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et elles sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pourra se convaincre des résultats suivants.

R1 Si X et Y sont deux variables aléatoires ayant même loi et si a est un réel : aX et aY ont même loi.

R2 Soient X, Y, X', Y' quatre variables aléatoires telles que :
1) X et Y sont indépendantes ; 2) X' et Y' sont indépendantes ; 3) X et X' ont même loi ; 4) Y et Y' ont même loi. Soient a et b deux réels.

1) $X+Y$ et $X'+Y'$ ont même loi

2) $aX+bY$ et $aX'+bY'$ ont même loi.

$\boxed{R3}$ $X_1, X_2, \ldots, X_r, Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ sont variables aléatoires.

$a_1, a_2, \ldots, a_r$ sont réels. On suppose que :

1°/ $X_1, X_2, \ldots, X_r$ sont indépendantes.

2°/ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ sont indépendantes.

3°/ Pour tout i dans $[\![1, r]\!]$, Y_i et X_i ont même loi.

Alors → $X_1 + X_2 + \cdots + X_r$ et $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r$ ont même loi

→ $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_r X_r$ et $a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \cdots + a_r Y_r$ ont même loi.

Remarques 1.. Dans III § 6 on suppose $a \neq a'$

2.. Dans V on suppose X non presque sûrement nul.

3. Dans V § 3 b/ on suppose $m_1, m_2, \ldots, m_r$ non nuls.

I Un résultat sur certaines suites positives.

Q1 $u_1 = u_{1\times 1} = u_1 u_1$; $u_1 = u_1^2$ donc $u_1 = 0$ ou 1 or u_1 est strictement positif ainsi $\underline{\underline{u_1 = 1}}$.

Q2 Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, u_{r^k} = u_r^k$.

→ C'est clair pour $k=0$ car $u_{r^0} = u_1 = 1 = u_r^0$.

→ Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$u_{r^{k+1}} = u_{r^k r} = u_{r^k} u_r = (u_r)^k u_r = (u_r)^{k+1}$. Ainsi s'achève la récurrence.

$\underline{\underline{\forall (r,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N},\ u_{r^k} = u_r^k}}$.

Q3 Soit r un élément de $[\![2,+\infty[\![$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{r^k} = u_r^k$.

- Supposons qu'il existe un réel α_r tel que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{r^k} = (r^k)^{\alpha_r}$.

Alors $u_r = r^{\alpha_r}$ donc $\ln u_r = \alpha_r \ln r$ $(u_r > 0$ et $r > 0)$; $\alpha_r = \frac{\ln u_r}{\ln r}$ $(\ln r \neq 0)$.

- Réciproquement posons $\alpha_r = \frac{\ln u_r}{\ln r}$. Alors $\ln r^{\alpha_r} = \ln u_r$; $u_r = r^{\alpha_r}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{r^k} = u_r^k = (r^{\alpha_r})^k = (r^k)^{\alpha_r}$.

Ainsi $\underline{\underline{\exists! \alpha_r \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N},\ u_{r^k} = (r^k)^{\alpha_r} \ ;\ \alpha_r = \frac{\ln u_r}{\ln r}}}$.

<u>Pour tout élément r de $[\![2,+\infty[\![$ il existe un unique réel α_r tel que, pour tout entier n de la forme r^k, où k est un entier positif, $u_n = n^{\alpha_r}$ et $\alpha_r = \frac{\ln u_r}{\ln r}$.</u>

Q4 a) Posons $\mathcal{S} = \{ \ell' \in \mathbb{N}^* \mid r_2^k \leq r_1^{\ell'} \}$ ⚠ Voir une seconde version p 22

$\lim_{\ell' \to +\infty} r_1^{\ell'} = +\infty$ car $r_1 \geq 2$ donc $\exists \ell'_0 \in \mathbb{N}^*, \forall \ell' \in [\![\ell'_0,+\infty[\![,\ r_1^{\ell'} \geq r_2^k$.

Ainsi $\mathcal{S}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$. Alors $\mathcal{S}$ possède un plus petit élément ℓ.

$\ell \in \mathbb{N}^*$, $r_1^\ell \geq r_2^\ell$ et $\ell-1 \notin S$.

1er cas.. $\ell-1 \in \mathbb{N}^*$; alors $r_1^{\ell-1} < r_2^\ell$ car ℓ est le plus élément de S.

2ème cas.. $\ell-1=0$; alors $r_1^{\ell-1}=1<r_2^\ell$

Dans les deux cas $r_1^{\ell-1}<r_2^\ell$. Alors $r_1^\ell \underset{r_1>0}{<} r_2^\ell r_1 \underset{r_1<r_2 \text{ et } r_2^\ell>0}{<} r_2^\ell r_2 = r_2^{\ell+1}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists \ell \in \mathbb{N}, r_2^\ell \leq r_1^k < r_2^{\ell+1}$.

b) Notons d'abord que $\forall r \in [\![2,+\infty[\![, \alpha_r \geq 0$. Supposons qu'il existe r dans $[\![2,+\infty[\![$ tel que $\alpha_r<0$.

$\forall i \in \mathbb{N}^*$, $u_r \leq A u_{r^i}$ ($\forall i \in \mathbb{N}^*, r \leq r^i$). Donc $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_r \leq A(r^i)^{\alpha_r}$.

$\lim_{i\to+\infty} r^i=+\infty$ car $r\geq 2$. Alors $\lim_{i\to+\infty}(r^i)^{\alpha_r}=0$ car $\alpha_r<0$. Par passage à la limite il vient alors $u_r=0$. Ceci contredit l'hypothèse ($\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n>0$).

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\exists \ell \in \mathbb{N}$, $r_2^\ell \leq r_1^k < r_2^{\ell+1}$.

- $u_{r_2^\ell} \underset{r_2^\ell \leq r_1^k}{\leq} A u_{r_1^k}$. Ainsi $(r_2^\ell)^{\alpha_{r_2}} \leq A (r_1^k)^{\alpha_{r_1}} \underset{\alpha_{r_1}\geq 0 \text{ et } r_1^k<r_2^{\ell+1}}{\leq} A (r_2^{\ell+1})^{\alpha_{r_1}}$.

Par conséquent $(r_2^\ell)^{\alpha_{r_2}} \leq A (r_2^{\ell+1})^{\alpha_{r_1}}$.

- $r_2^\ell \leq r_1^k$ et $\alpha_{r_1}\geq 0$. $(r_2^\ell)^{\alpha_{r_1}} \leq (r_1^k)^{\alpha_{r_1}} = u_{r_1^k} \underset{r_1^k<r_2^{\ell+1}}{\leq} A u_{r_2^{\ell+1}}$.

Ainsi $(r_2^\ell)^{\alpha_{r_1}} \leq A\, u_{r_2^{\ell+1}} = A (r_2^{\ell+1})^{\alpha_{r_2}}$.

Finalement $\forall k \in \mathbb{N}^*, (r_2^\ell)^{\alpha_{r_2}} \leq A (r_2^{\ell+1})^{\alpha_{r_1}}$ et

$\forall k \in \mathbb{N}^*, (r_2^\ell)^{\alpha_{r_1}} \leq A (r_2^{\ell+1})^{\alpha_{r_2}}$

$\ell \in \mathbb{N}^*$, $r_1^{\ell} \geq r_2^{\ell}$ et $\ell-1 \notin \mathcal{S}$.

1er cas : $\ell-1 \in \mathbb{N}^*$, alors $r_1^{\ell-1} < r_2^{\ell}$ car ℓ est le plus élément de $\mathcal{S}$.

2e cas : $\ell-1=0$; $\ell=1$; alors $r_1^{\ell-1} = 1 < r_2^{\ell}$.

Dans les deux cas : $r_1^{\ell-1} < r_2^{\ell}$. Alors $r_1^{\ell} \underset{r_1>0}{<} r_2^{\ell} r_1 \underset{r_1<r_2 \text{ et } r_2^{\ell}>0}{<} r_2^{\ell} r_2 = r_2^{\ell+1}$.

$\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists \ell \in \mathbb{N}, \ r_2^{\ell} \leq r_1^{k} < r_2^{\ell+1}.}}$

b) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. $(r_2^{\ell})^{\alpha_{r_2}} = u_{r_2^{\ell}} \underset{r_2^{\ell} \leq r_2^{\ell+1} \text{ car } r_2 \geq 1}{\leq} A\, u_{r_2^{\ell+1}} = A(r_2^{\ell+1})^{\alpha_{r_2}}$.

$\exists \ell \in \mathbb{N}$, $r_2^{\ell} \leq r_1^{k}$; alors $u_{r_2^{\ell}} \leq A\, u_{r_1^{k}}$; $(r_2^{\ell})^{\alpha_{r_2}} \leq A\,(r_1^{k})^{\alpha_{r_1}}$.

Montrons alors que $(r_1^{k})^{\alpha_{r_1}} \leq (r_2^{\ell+1})^{\alpha_{r_1}}$ ce qui donnera $(r_2^{\ell})^{\alpha_{r_2}} \leq A(r_2^{\ell+1})^{\alpha_{r_1}}$

Nous avons déjà $0 < r_1^{k} < r_2^{\ell+1}$; montrons donc que $\alpha_{r_1} \geq 0$.

Mieux montrons que $\forall r \in [\![2,+\infty[\![$, $\alpha_r \geq 0$. Supposons que $\alpha_r < 0$ avec $r \in [\![2,+\infty[\![$.

Alors $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $u_r \leq A\, u_{r^i}$; $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_r \leq A(r^i)^{\alpha_r}$

$\lim_{i \to +\infty} r^i = +\infty$ car $r \geq 2$ donc $\lim_{i \to +\infty} A(r^i)^{\alpha_r} = 0$ car $\alpha_r < 0$.

Alors en faisant tendre i vers $+\infty$ on obtient $0 \leq u_r \leq 0$, $u_r = 0$!!

Finalement $\forall r \in [\![2,+\infty[\![$, $\alpha_r \geq 0$.

Ainsi $(r_2^{\ell})^{\alpha_{r_2}} = u_{r_2^{\ell}} \underset{r_2^{\ell} \leq r_1^{k}}{\leq} A\, u_{r_1^{k}} = A\,(r_1^{k})^{\alpha_{r_1}} \underset{\substack{0 \leq r_1^{k} < r_2^{\ell+1} \\ \alpha_{r_1} \geq 0}}{\leq} (r_2^{\ell+1})^{\alpha_{r_1}}$

Ceci achève de prouver que : $\underline{\underline{\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \ (r_2^{\ell})^{\alpha_{r_2}} \leq A(r_2^{\ell+1})^{\alpha_{r_1}} \text{ et } (r_2^{\ell})^{\alpha_{r_1}} \leq A(r_2^{\ell+1})^{\alpha_{r_2}}}}$

c]. Supposons $\alpha_{r_1} > \alpha_{r_2}$. $(r_2^{\ell})^{\alpha_{r_1}} \leq A\,(r_2^{\ell+1})^{\alpha_{r_2}}$ pour ℓ dans $\mathbb{N}^*$

$(r_2^{\ell})^{\alpha_{r_1}}\,(r_2^{\ell+1})^{-\alpha_{r_2}} \leq A$ et $r_2^{-\alpha_{r_2}}\,(r_2^{\ell})^{\alpha_{r_1}-\alpha_{r_2}} \leq A$ pour ℓ dans $\mathbb{N}^*$.

$r_2 \geq 2$ donc $\lim_{\ell\to+\infty} r_2^{\ell} = +\infty$; alors $\lim_{\ell\to+\infty}\left[r_2^{-\alpha_{r_2}}(r_2^{\ell})^{\alpha_{r_1}-\alpha_{r_2}}\right] = +\infty$ car $\begin{cases}\alpha_{r_1}-\alpha_{r_2}>0\\ r_2^{-\alpha_{r_2}}>0\end{cases}$

ceci est impossible car la suite $\left(r_2^{-\alpha_{r_2}}(r_2^{\ell})^{\alpha_{r_1}-\alpha_{r_2}}\right)_{\ell\geq 1}$ est majorée par A.

. Supposons $\alpha_{r_1} < \alpha_{r_2}$. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$.

$(r_2^{\ell})^{\alpha_{r_2}} \leq A\,(r_2^{\ell+1})^{\alpha_{r_1}}$; $(r_2^{\ell})^{\alpha_{r_2}-\alpha_{r_1}}\; r_2^{-\alpha_{r_1}} \leq A$.

Or $\lim_{\ell\to+\infty} r_2^{\ell} = +\infty$ $(r_2 \geq 2)$. Comme $\alpha_{r_2}-\alpha_{r_1} > 0$ et $r_2^{-\alpha_{r_1}} > 0$:

$\lim_{\ell\to+\infty}\left[(r_2^{\ell})^{\alpha_{r_2}-\alpha_{r_1}}\, r_2^{-\alpha_{r_1}}\right] = +\infty$; ceci est impossible car cette suite est majorée par A.

Finalement $\alpha_{r_2} = \alpha_{r_1}$.

Alors la suite $(\alpha_r)_{r\geq 2}$ est constante.

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall r \in [\![2,+\infty[\![$, $\alpha_r = \alpha$. Notons que $\alpha \in \mathbb{R}_+$ car $\forall r \in [\![2,+\infty[\![$, $\alpha_r \geq 0$.

d'après ce que nous avons vu dans b].

Ainsi $\forall r \in [\![2,+\infty[\![$, $u_r = (r^1)^{\alpha_r} = r^{\alpha_r} = r^{\alpha}$.

Or $u_1 = 1 = 1^{\alpha}$.

Donc $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $u_r = r^{\alpha}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^{\alpha}$.

$\underline{\underline{\exists \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^{\alpha}.}}$

<u>Remarque</u> .. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^{\alpha}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$
- $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, $u_{mn} = (mn)^{\alpha} = m^{\alpha} n^{\alpha} = u_m u_n$.
- $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, $m \leq n \Rightarrow m^{\alpha} \leq n^{\alpha} \Rightarrow u_m \leq 1\times u_n$.

ceci achève de montrer la réciproque du résultat précédent.

II La loi Gaussienne

A Q1 Soit $x\in\mathbb{R}$. $ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)^2}+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

En posant $\alpha=\frac{4ac-b^2}{4a}$, $m=-\frac{b}{2a}$ et $\sigma=\sqrt{\frac{1}{2a}}$ on a $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}+\alpha = ax^2+bx+c$

Q2 $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $(b,c)\in\mathbb{R}^2$. On pose $\alpha=\frac{4ac-b^2}{4a}$, $m=-\frac{b}{2a}$ et $\sigma=\sqrt{\frac{1}{2a}}$.

Remarque $\sigma\in\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-(ax^2+bx+c)} = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}e^{-\alpha} = e^{-\alpha}\sqrt{2\pi}\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

$x\mapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres m et σ. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$ converge et vaut 1.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+bx+c)}dx$ converge et vaut $e^{-\alpha}\sqrt{2\pi}\sigma = e^{-\frac{4ac-b^2}{4a}}\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2a}}$

Si $a\in\mathbb{R}_+^*$ et si $(b,c)\in\mathbb{R}^2$, $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+bx+c)}dx$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$.

Q3 Pour $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ et $g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'}e^{-\frac{t^2}{2\sigma'^2}}$

G et G' sont deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant pour densités f et g. f et g étant bornées sur $\mathbb{R}$ nous pouvons sans doute dire que G+G' est une variable aléatoire réelle à densité et que $h: x\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)\,dt$ en est une densité.

Soit $(x,t)\in\mathbb{R}^2$. $f(t)g(x-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'} e^{-\left[\frac{t^2}{2\sigma^2}+\frac{(x-t)^2}{2\sigma'^2}\right]}$. $= -\frac{x}{\sigma'^2}$!

$$f(t)g(x-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'} e^{-\left[\underbrace{\left(\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma'^2}\right)}_{>0} t^2 + \left(-\frac{2x}{2\sigma'^2}\right)t + \frac{x^2}{2\sigma'^2}\right]}.$$

D'après ce qui précède :

$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma'^2}}}\; e^{\frac{\left(-\frac{x}{\sigma'^2}\right)^2-4\left(\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma'^2}\right)\left(\frac{x^2}{2\sigma'^2}\right)}{4\left(\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma'^2}\right)}}.$$

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'}\sqrt{\frac{2\pi\sigma^2\sigma'^2}{\sigma^2+\sigma'^2}}\; e^{\alpha(x)}$$ avec :

$$\alpha(x) = \frac{1}{\frac{2(\sigma^2+\sigma'^2)}{\sigma^2\sigma'^2}}\, x^2\left[\frac{1}{\sigma'^4} - \frac{\sigma^2+\sigma'^2}{\sigma^2\sigma'^2}\,\frac{1}{\sigma'^2}\right] = \frac{\sigma^2\sigma'^2}{2(\sigma^2+\sigma'^2)}\, x^2\, \frac{\sigma^2-\sigma^2-\sigma'^2}{\sigma'^4\sigma^2}.$$

ou $\alpha(x) = -\frac{x^2}{2(\sigma^2+\sigma'^2)}$.

Ainsi $$h(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'}\frac{\sqrt{2\pi}\sigma\sigma'}{\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+\sigma'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2(\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2})^2}}.$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2(\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2})^2}}$ et h est une densité de $G+G'$.

Alors $G+G'$ suit une loi normale centrée de variance $\sigma^2+\sigma'^2$.

Q4 Soit $(G_k)_{k\geq 1}$ une suite de copies de G. $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $G_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.
$(G_k)_{k\geq 1}$ étant une suite de variables aléatoires indépendantes, une récurrence simple utilisant le résultat de Q3 montre que :
$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $G_1+\dots+G_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0,(\sqrt{n}\,\sigma)^2)$. Or $G\hookrightarrow\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $n\,G$ suit une loi normale de paramètres 0 et $(\sqrt{n}\,\sigma)^2$ (cours).
Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $G_1+\dots+G_n$ et $\sqrt{n}\,G$ ont même loi.
Ainsi G suit une loi stable et $(\sqrt{n})_{n\geq 1}$ est la suite associée à la loi de G.

B (Q1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $V(X_1+\cdots+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)$ car $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes. Alors $V(X_1+\cdots+X_n) = \sigma^2+\sigma^2+\cdots+\sigma^2 = n\sigma^2$.
Or $X_1+\cdots+X_n$ a même loi que $a_n X$ donc $n\sigma^2 = V(a_n X) = a_n^2 V(X) = a_n^2 \sigma^2$
Comme σ^2 n'est pas nul : $n = a_n^2$. Comme a_n est positif : $a_n = \sqrt{n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sqrt{n}$.

X_1+X_2 et $a_2 X = \sqrt{2}\,X$ ont même loi donc $E(X_1+X_2) = E(\sqrt{2}\,X)$.

Ainsi $E(X_1)+E(X_2) = \sqrt{2}\,E(X)$; $m+m = \sqrt{2}\,m$; $2m = \sqrt{2}\,m$; $m = 0$.

(Q2) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1+\cdots+X_n$.
Le théorème de la limite centrée indique $\left(\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z qui suit une loi normale centrée réduite.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(S_n) = E(\sqrt{n}\,X) = \sqrt{n}\,E(X) = \sqrt{n}\,m = 0$ et $V(S_n) = V(\sqrt{n}\,X) = nV(X) = n\sigma^2$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}\,\sigma}$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n a même loi que $\sqrt{n}\,X$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$ a même loi que $\dfrac{X}{\sigma}$.

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$ a la même fonction de répartition que $\dfrac{X}{\sigma}$.

Notons Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leqslant x\right) \overset{!}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{X}{\sigma} \leqslant x\right) = P\left(\dfrac{X}{\sigma} \leqslant x\right)$.

Ainsi $\dfrac{X}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Alors $X = \sigma \dfrac{X}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

X suit une loi normale donc une loi gaussienne de paramètres 0 et σ^2.

III La Loi de Cauchy

Q1 · f_a est continue et positive sur IR.

· Soit $A \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\int_0^A f_a(x)\,dx = \int_0^A \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}\,dx = \int_0^{\arctan\frac{A}{a}} \frac{a}{\pi(a^2\tan^2 t+a^2)}\, a(1+\tan^2 t)\,dt$

$\begin{cases} x = a\tan t \\ t = \arctan\frac{x}{a} \end{cases}$; $x \mapsto \arctan\frac{x}{a}$ est C^1 sur IR.

$$\int_0^A f_a(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\arctan\frac{A}{a}} dt = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{A}{a} \text{ et } \int_A^0 f_a(x)\,dx = -\frac{1}{\pi}\arctan\frac{A}{a}.$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{\pi}\arctan\frac{A}{a} = \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$; $\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx$ existe et vaut 1/2.

$\lim\limits_{A\to-\infty} \frac{1}{\pi}\arctan\frac{A}{a} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$; $\int_{-\infty}^{0} f_a(x)\,dx$ existe et vaut $-\left(-\frac{1}{2}\right) = 1/2$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)\,dx$ existe et vaut $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$.

Ceci achève de montrer que <u>f_a est une densité de probabilité</u>.

Q2 ! b) $\lambda > 0$. λZ est une variable aléatoire à densité qui admet pour densité

$g : x \mapsto \frac{1}{|\lambda|} f_1\left(\frac{x-0}{\lambda}\right)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{\lambda} f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{\pi\left(\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2+1\right)} = \frac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)} = f_\lambda(x)$.

<u>Donc λZ suit une loi de Cauchy de paramètre λ.</u>

! a) → $x \mapsto x f_1(x)$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$.

→ $x f_1(x) = \frac{x}{\pi(x^2+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi x}$.

→ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi x}$ diverge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives indiquent alors que $\int_0^{+\infty} x f_1(x)\,dx$ diverge.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)\,dx$ diverge donc <u>Z n'a pas d'espérance</u>.

(Q3) $\exists (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, $P = aX^3+bX^2+cX+d$.

$P(z_1)=0$; $az_1^3+bz_1^2+cz_1+d=0$; $0=\overline{az_1^3+bz_1^2+cz_1+d} = a\bar{z}_1^3+b\bar{z}_1^2+c\bar{z}_1+d$.

Ainsi $P(\bar{z}_1)=0$. On montre de même que $P(\bar{z}_2)\neq 0$.

Par hypothèse $z_1\neq z_2$ donc $\bar{z}_1\neq\bar{z}_2$.

z_1 et z_2 sont de parties imaginaires strictement positives donc $\bar{z}_1$ et $\bar{z}_2$ sont de parties imaginaires strictement négatives ; ainsi $z_1\neq\bar{z}_1$, $z_1\neq\bar{z}_2$, $z_2\neq\bar{z}_1$, $z_2\neq\bar{z}_2$.

Ceci achève de montrer que $z_1, z_2, \bar{z}_1$ et $\bar{z}_2$ sont deux à deux distincts.

Ainsi P a au moins quatre racines distinctes.

P étant de degré au plus 3, <u>P est le polynôme nul.</u>

(Q4) a) $(*) \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}$, $aa' = \pi(vx+au)[(x-y)^2+a'^2]+\pi[v'(x-y)+a'u'](x^2+a^2)$.

$(*) \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, \pi(vx+au)[(x-y)^2+a'^2]+\pi[v'(x-y)+a'u'](x^2+a^2)-aa'=0$.

Posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)=\pi(vx+au)[(x-y)^2+a'^2]+\pi[v'(x-y)+a'u'](x^2+a^2)-aa'$

Observons que $P\in\mathbb{R}_3[X]$ et que $z_1=ia$ et $z_2=y+ia'$ sont deux complexes de parties imaginaires strictement positives.

D'après Q3 pour montrer que P est nul il suffit de prouver que $P(z_1)=P(z_2)=0$.

$P(z_1)=P(ia)=\pi(v(ia)+au)[(ia-y)^2+a'^2]+\pi[v'(ia-y)+a'u']\underbrace{((ia)^2+a^2)}_{\boxed{=0}}-aa'$.

$P(z_1)=\pi a(iv+u)[(y-ia)^2+a'^2]-aa' = \pi a\dfrac{a'}{\pi[(y-ia)^2+a'^2]}[(y-ia)^2+a'^2]-aa'=0$.

$iv+u = u+iv = \dfrac{a'}{\pi[(y-ia)^2+a'^2]}$.

<u>$P(z_1)=0$.</u>

$P(z_2)=P(y+ia')=\pi(v(y+ia')+au)\underbrace{[(y+ia'-y)^2+a'^2]}_{=0}+\pi[v'(y+ia'-y)+a'u']((y+ia')^2+a^2)-aa'$

$P(z_2)=\pi a'(u'+iv')((y+ia')^2+a^2)-aa' = \pi a'\dfrac{a}{\pi((y+ia')^2+a^2)}((y+ia')^2+a^2)-aa'=0$.

Ceci achève de prouver que P est nul. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)=0$.

Ainsi (*) est vraie.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{aa'}{\pi^2(x^2+a^2)((x-y)^2+a'^2)} = \frac{vx+au}{\pi(x^2+a^2)} + \frac{v'(x-y)+a'u'}{\pi((x-y)^2+a'^2)}$$

---

b) Ce qui est admis donne $u = \dfrac{a'(y^2+a'^2-a^2)}{\pi(y^2+(a+a')^2)(y^2+(a-a')^2)}$ (égalité des parties réelles). De même :

$$u' = \frac{a(y^2+a^2-a'^2)}{\pi(y^2+(a+a')^2)(y^2+(a-a')^2)}.$$

Notons que : $a'(y^2+a'^2-a^2)+a(y^2+a^2-a'^2) = (a'+a)y^2+a'^3-a'a^2+a^3-aa'^2$.

$a'(y^2+a'^2-a^2)+a(y^2+a^2-a'^2) = (a'+a)y^2+a'(a'^2-a^2)+a(a^2-a'^2)$.

$a'(y^2+a'^2-a^2)+a(y^2+a^2-a'^2) = (a'+a)y^2+a'(a'-a)(a'+a)+a(a-a')(a+a')$.

$a'(y^2+a'^2-a^2)+a(y^2+a^2-a'^2) = (a+a')(y^2+(a-a')^2)$.

Alors $u+u' = \dfrac{(a+a')(y^2+(a-a')^2)}{\pi(y^2+(a+a')^2)(y^2+(a-a')^2)} = \dfrac{a+a'}{\pi(y^2+(a+a')^2)}$.

$$u+u' = \frac{a+a'}{\pi(y^2+(a+a')^2)}.$$

Exercice... Montrer ce qui est admis (il suffit de multiplier par le conjugué du dénominateur).

Q5 Soit $B \in \mathbb{R}_+^*$. $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+a^2}$ est paire donc $\displaystyle\int_{-B}^{B} \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = 0$.

$$\int_{-B}^{B} \frac{(x-y)}{(x-y)^2+a^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left[(x-y)^2+a^2\right]\right]_{-B}^{B} = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{(B-y)^2+a^2}{(-B-y)^2+a^2}\right]$$

$$\int_{-B}^{B}\frac{x}{x^2+a^2}\,dx = 0 \text{ et } \int_{-B}^{B}\frac{(x-y)}{(x-y)^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{(B-y)^2+a^2}{(B+y)^2+a^2}.$$

(Q6) f_a et $f_{a'}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. De plus Z_a et $Z_{a'}$ sont indépendantes.

Ainsi $Z_a+Z_{a'}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité

$\hat{h} : y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x) f_{a'}(y-x)\,dx$. Soit $y \in \mathbb{R}^*$.

$$\hat{h}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a a'}{\pi^2(x^2+a^2)((x-y)^2+a'^2)}\,dx. \quad \text{Soit } B \in \mathbb{R}_+^*.$$

Posons $I_B = \int_{-B}^{B} \frac{a a'}{\pi^2(x^2+a^2)((x-y)^2+a'^2)}\,dx$. $\lim\limits_{B\to+\infty} I_B = \hat{h}(y)$. Reprenons les notations de Q4.

D'après (*) $I_B = \int_{-B}^{B} \frac{vx+au}{\pi(x^2+a^2)}\,dx + \int_{-B}^{B} \frac{v'(x-y)+a'u'}{\pi((x-y)^2+a'^2)}\,dx$.

$$I_B = \underbrace{\frac{v}{\pi}\int_{-B}^{B} \frac{x}{x^2+a^2}\,dx}_{=0} + u\underbrace{\int_{-B}^{B} \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}\,dx}_{\alpha_B} + \frac{v'}{\pi}\underbrace{\int_{-B}^{B} \frac{(x-y)}{(x-y)^2+a'^2}\,dx}_{\beta_B} + u'\underbrace{\int_{-B}^{B} \frac{a'}{\pi((x-y)^2+a'^2)}\,dx}_{\gamma_B}$$

$\lim\limits_{B\to+\infty} \alpha_B = \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)\,dx = 1$. $\lim\limits_{B\to+\infty} \gamma_B \underset{z=x-y}{=} \lim\limits_{B\to+\infty} \int_{-B-y}^{B-y} f_{a'}(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a'}(z)\,dz = 1$

$$\beta_B = \int_{-B}^{B} \frac{(x-y)}{(x-y)^2+a'^2}\,dx = \frac{1}{2} \ln \frac{(B-y)^2+a^2}{(B+y)^2+a^2}.$$

$\frac{(B-y)^2+a^2}{(B+y)^2+a^2} \underset{B\to+\infty}{\sim} \frac{B^2}{B^2} = 1$ donc $\lim\limits_{B\to+\infty}\left(\frac{(B-y)^2+a^2}{(B+y)^2+a^2}\right) = 1$; $\lim\limits_{B\to+\infty} \beta_B = 0$

Alors $\lim\limits_{B\to+\infty} I_B = 0 + u + 0 + u' = u+u' = \frac{a+a'}{\pi(y^2+(a+a')^2)} = f_{a+a'}(y)$.

$\hat{h}(y) = f_{a+a'}(y)$. Notons ce résultat lorsque $y=0$.

$\hat{h}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a a'}{\pi^2(x^2+a^2)(x^2+a'^2)}\,dx$. **Supposons $a \neq a'$.**

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \dfrac{1}{x^2+a^2} - \dfrac{1}{x^2+a'^2} = \dfrac{a'^2-a^2}{(x^2+a^2)(x^2+a'^2)}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \dfrac{a a'}{\pi^2(x^2+a^2)(x^2+a'^2)} = \dfrac{1}{\pi(a'^2-a^2)}\left[a' \dfrac{a}{\pi(x^2+a^2)} \quad a \dfrac{a'}{\pi(x^2+a'^2)}\right]$

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a'}{\pi(x^2+a'^2)}\,dx = 1$.

Ainsi $\hat{h}(0) = \dfrac{1}{\pi(a'^2-a^2)}\left[a' \times 1 - a \times 1\right] = \dfrac{1}{\pi(a+a')} = f_{a+a'}(0)$.

Supposons $a = a'$.

$$\hat{h}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{\pi^2(x^2+a^2)^2}\,dx \underset{x = a\tan t}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a^2}{\pi^2(a^2\tan^2 t + a^2)^2}\, a(1+\tan^2 t)\,dt = \frac{1}{\pi^2 a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{1+\tan^2 t}$$

$$\hat{h}(0) = \frac{1}{\pi^2 a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{\pi^2 a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{\pi^2 a}\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{\pi(2a)}.$$

$$\hat{h}(0) = \frac{1}{\pi(2a)} = \frac{1}{\pi(a+a)} \underset{a=a'}{=} \frac{1}{\pi(a+a')} = f_{a+a'}(0).$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x) f_{a'}(y-x)\,dx = f_{a+a'}(y).$$

$Z_a + Z_{a'}$ suit une loi de Cauchy de paramètre $a+a'$.

⚠ La notation $Z_{a'}$ est bien maladroite. Si $a = a'$ je doute que Z_a et $Z_{a'}$ puissent être indépendantes.

Q7 Soit $(Z_\ell)_{\ell\geq 1}$ une suite de copies de Z.

Une récurrence simple s'appuyant sur Q6 montre que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $Z_1+Z_2+\cdots+Z_n$ suit une loi de Cauchy de paramètre n.

D'après Q2 b) pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, nZ suit également une loi de Cauchy de paramètre n.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $Z_1+Z_2+\cdots+Z_n$ et nZ ont même loi.

Z suit une loi stable et la suite associée à la loi de Z est $(n)_{n\geq 1}$.

IV Les événements exceptionnels

Q1 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\left(\bigcap_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq \ell}}\{|X_\ell|>2|X_i|\}\right)_{\ell\in[\![1,n]\!]}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles. Ainsi $P(E_n)=P\left(\bigcup_{\ell=1}^{n}\left(\bigcap_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq \ell}}\{|X_\ell|>2|X_i|\}\right)\right)=\sum_{\ell=1}^{n}P\left(\bigcap_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq \ell}}\{|X_\ell|>2|X_i|\}\right)$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ suivent la même loi.

Voir plus de détails p. 22

Ainsi $\forall \ell\in[\![1,n]\!]$, $P\left(\bigcap_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq \ell}}\{|X_\ell|>2|X_i|\}\right)=P\left(\bigcap_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq 1}}\{|X_1|>2|X_i|\}\right)$

Alors $P(E_n)=n\,P\left(\bigcap_{i=2}^{n}\{|X_1|>2|X_i|\}\right)$.

Q2 Soit $A\in\mathbb{R}_+^*$. Notons S_A l'événement : $\{|X_1|>2A\}\cap\left(\bigcap_{i=2}^{n}\{|X_i|<A\}\right)$.

Soit $\omega\in S_A$.

Alors $|X_1(\omega)|>2A$ et $\forall i\in[\![2,n]\!]$, $|X_i(\omega)|<A$.

Par conséquent $\forall i\in[\![2,n]\!]$, $|X_1(\omega)|>2A>2|X_i(\omega)|$.

$\forall i\in[\![2,n]\!]$, $|X_1(\omega)|>2|X_i(\omega)|$; $\omega\in\bigcap_{i=2}^{n}\{|X_1|>2|X_i|\}$.

Ainsi $S_A\subset\bigcap_{i=2}^{n}\{|X_1|>2|X_i|\}$.

Par croissance de P : $P(S_A) \leq P\left(\bigcap_{i=2}^{n} \{|X_1| > 2|X_i|\}\right)$.

Alors $P(E_n) = n\,P\left(\bigcap_{i=2}^{n} \{|X_1| > 2|X_i|\}\right) \geqslant n\,P(S_A)$. Par conséquent :

$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ P(E_n) \geqslant n\ P\left(\{|X_1| > 2A\} \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n} \{|X_i| < A\}\right)\right)$.

(Q3) Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. $P(|X_1| > A) = 1 - P(|X_1| \leq A) = 1 - \int_{-A}^{A} \frac{1}{\pi(x^2+1)}\,dx$.

$P(|X_1| > A) = 1 - \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Arctan} x\right]_{-A}^{A} = 1 - \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Arctan} A - \operatorname{Arctan}(-A)\right]$.

$P(|X_1| > A) = 1 - \frac{1}{\pi}\, 2 \operatorname{Arctan} A = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} A\right) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \frac{1}{A}$.

$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ P(|X_1| > A) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \frac{1}{A}$.

(Q4) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\frac{\pi\lambda}{2n} < \frac{\pi}{2}$ ou soit $n \in [\![\operatorname{Ent}(\lambda)+1, +\infty[\![$

$0 < \frac{\pi\lambda}{2n} < \frac{\pi}{2}$. Posons $A = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi\lambda}{2n}\right)}$. A est strictement positif.

Nous pouvons alors appliquer Q2.

Ainsi $P(E_n) \geqslant n\ P\left(\{|X_1| > 2A\} \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n} \{|X_i| < A\}\right)\right)$. Par indépendance il vient :

$$P(E_n) \geqslant P(|X_1| > 2A) \prod_{i=2}^{n} P(|X_i| < A) \underset{\substack{\uparrow \\ X_1, X_2, \dots, X_n \text{ ont même loi}}}{=} P(|X_1| > 2A)\left(P(|X_1| < A)\right)^{n-1}.$$

$P(|X_1| < A) = 1 - P(|X_1| \geqslant A) = 1 - P(|X_1| > A) = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \frac{1}{A} = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\tan \frac{\pi\lambda}{2n}\right)$

$P(|X_1| < A) \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{\pi\lambda}{2n} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ !}}{=} 1 - \frac{2}{\pi} \frac{\pi\lambda}{2n} = 1 - \frac{\lambda}{n}$. Alors :

$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\pi\lambda}{2n} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow P(E_n) \geqslant n\,P\left(|X_1| > \frac{2}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-1}$.

Q5 Soit $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $n_0 = E(\lambda)+1$.

$n_0 \in \mathbb{N}^*$. $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $n > \lambda$; $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $\frac{\pi\lambda}{2n} < \frac{\pi}{2}$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $P(E_n) \geqslant n\, P\left(|X_1| > \dfrac{2}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-1}$.

$\ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-1} = (n-1) \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-1)\left(-\frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\lambda$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-1} = -\lambda$; $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-1} = e^{-\lambda}}$.

Soit $n \in [\![n_0, +\infty [\![$. $n\, P\left(|X_1| > \dfrac{2}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}} \right) \underset{Q3}{=} n \times \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{\frac{2}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}}} = \frac{2n}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}}{2} \right)$

$\tan t \underset{t\to 0}{\sim} t$; $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\tan t}{t} = 1$. Or $\lim\limits_{u\to 0} \operatorname{Arctan} u = 0$.

Par composition $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\tan(\operatorname{Arctan} u)}{\operatorname{Arctan} u} = 1$; $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u}{\operatorname{Arctan} u} = 1$; $u \underset{0}{\sim} \operatorname{Arctan} u$.

Par conséquent $\operatorname{Arctan} u \underset{0}{\sim} u$. $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\tan\left(\frac{\pi\lambda}{2n}\right)}{2} = 0$

$n\, P\left(|X_1| > \dfrac{2}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}} \right) = \frac{2n}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}}{2} \right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{\pi} \dfrac{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}}{2} = \frac{n}{\pi} \tan \frac{\pi\lambda}{2n}$.

$n\, P\left(|X_1| > \dfrac{2}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}} \right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\pi} \frac{\pi\lambda}{2n} = \frac{\lambda}{2}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi\lambda}{2n} = 0$.

Alors $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} n\, P\left(|X_1| > \dfrac{2}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}} \right) = \frac{\lambda}{2}}$.

Finalement : $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \left[n\, P\left(|X_1| > \dfrac{2}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-1} \right] = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda}}}$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\beta_n = n\, P\left(|X_1| > \dfrac{2}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}}\right)\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-1}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda}$. Alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_1 \Rightarrow \left|\beta_n - \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda}\right| < \varepsilon$

$\forall n \in [\![n_1, +\infty [\![$, $-\varepsilon < \beta_n - \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda} < \varepsilon$; $\forall n \in [\![n_1, +\infty [\![$, $\beta_n > \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda} - \varepsilon$.

Rappelons que $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $P(E_n) \geq \beta_n$.

Alors $\forall n \in [\![\max(n_0, n_1), +\infty [\![$, $P(E_n) > \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda} - \varepsilon$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_2 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![n_2, +\infty [\![, P(E_n) > \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda} - \varepsilon$.

Q6 Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = \dfrac{x}{2} e^{-x}$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2}(e^{-x} - x e^{-x}) = \dfrac{1}{2}(1-x) e^{-x}$.

$\forall x \in [0,1[$, $\varphi'(x) > 0$; $\varphi'(1) = 0$; $\forall x \in]1, +\infty[$, $\varphi'(x) < 0$.

φ est donc strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) \leq \varphi(1) = \dfrac{1}{2} e^{-1}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) \leq \dfrac{1}{2e}$.

Posons $\lambda = 1$. $\dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda} = \dfrac{1}{2} e^{-1} = \dfrac{1}{2e} \overset{e<3}{>} \dfrac{1}{6}$.

Posons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2e} - \dfrac{1}{6}\right)$. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon < \dfrac{1}{2e} - \dfrac{1}{6}$.

Ainsi $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{2e} - \varepsilon = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda} - \varepsilon$.

$\exists n_2 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_2 \Rightarrow P(E_n) > \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda} - \varepsilon > \dfrac{1}{6}$.

$\exists n_2 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![n_2, +\infty [\![, P(E_n) > \dfrac{1}{6}$.

A V le nombre a_n est une puissance de n

Q1 $1 = P(X>0)+P(X<0)+P(X=0) = P(X>0)+P(-X>0)+P(X=0) = 2P(X>0)+P(X=0)$

X est symétrique.

Ainsi $2P(X>0) = 1-P(X=0)$. $P(X>0) = \frac{1}{2}[1-P(X=0)]$.

Q2 ⚠ Nous supposons que X n'est pas nulle presque sûrement.

Supposons que $\forall \rho \in]0,+\infty[$, $P(X>\rho)=0$.

Alors $\forall \rho \in]0,+\infty[$ $P(X\leq \rho)=1$. Or la fonction de répartition F_X de X est continue à droite en 0.

Ainsi $P(X\leq 0) = \lim\limits_{\rho \to 0^+} P(X\leq \rho) = 1$. Donc $P(X>0)=0$.

Alors $0 = \frac{1}{2}(1-P(X=0))$. $P(X=0)=1$. X est alors presque sûrement égale à 1. Ce qui n'est pas.

Ainsi $\exists \rho \in \mathbb{R}_+^*$, $P(X>\rho)>0$.

Q3 a) Soit $(m,n)\in \mathbb{N}^{*2}$. $X_1+X_2+\dots+X_{m+n}$ a même loi que $a_{m+n}X$.

$X_1+\dots+X_m$ a la même loi que $a_m X$.

$X_{m+1}+\dots+X_{m+n}$ a la même loi que $X_1+\dots+X_n$ (toutes les variables aléatoires sont indépendantes) qui a elle même la même loi que $a_n X$.

Notons encore que $a_m X$ (resp. $a_n X$) a la même loi que $a_m X_1$ (resp. $a_n X_2$)

$X_1+\dots+X_m$ et $X_{m+1}+\dots+X_{m+n}$ sont indépendantes, ont même loi que $a_m X_1$ et $a_n X_2$ qui sont elles mêmes indépendantes.

Alors $X_1+\dots+X_m+X_{m+1}+\dots+X_{m+n}$ a même loi que $a_m X_1 + a_n X_2$.

donc $a_{m+n}X$ a même loi que $a_m X_1 + a_n X_2$

b) Montrons par récurrence sur k que pour tout ℓ dans $\mathbb{N}^*$, pour tout élément $(m_1, m_2, \ldots, m_\ell)$ de $(\mathbb{N}^*)^\ell$, $a_{m_1+\cdots+m_\ell} X$ a même loi que $a_{m_1} X_1 + \cdots + a_{m_\ell} X_\ell$.

* C'est vrai pour $\ell = 1$ car si m_1 appartient à $\mathbb{N}^*$, $a_{m_1} X$ a même loi que $a_{m_1} X_1$ puisque X et X_1 ont même loi.

* Supposons la propriété vraie pour un élément k dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $k+1$. Soit $(m_1, m_2, \ldots, m_{k+1})$ un élément de $(\mathbb{N}^*)^{k+1}$.

1°/ L'hypothèse de récurrence indique que $a_{m_1} X_1 + \cdots + a_{m_k} X_k$ a même loi que $a_{m_1+\cdots+m_k} X$ donc que $a_{m_1+\cdots+m_k} X_1$.

2/ $a_{m_{k+1}} X_{k+1}$ a même loi que $a_{m_{k+1}} X_2$.

3°/ $a_{m_1} X_1 + \cdots + a_{m_k} X_k$ et $a_{m_{k+1}} X_{k+1}$ sont indépendantes

4°/ $a_{m_1+\cdots+m_k} X_1$ et $a_{m_{k+1}} X_2$ sont indépendantes.

Alors $a_{m_1} X_1 + \cdots + a_{m_{k+1}} X_{k+1}$ a même loi que $a_{m_1+\cdots+m_k} X_1 + a_{m_{k+1}} X_2$ qui elle-même a même loi que $a_{m_1+\cdots+m_k+m_{k+1}} X$ d'après a).

Ainsi $a_{m_1+\cdots+m_{k+1}} X$ a même loi que $a_{m_1} X_1 + \cdots + a_{m_{k+1}} X_{k+1}$ ce qui achève la récurrence.

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, pour tout $(m_1, \ldots, m_k)$ dans $(\mathbb{N}^*)^k$, $a_{m_1+\cdots+m_k} X$ a même loi que $a_{m_1} X_1 + \cdots + a_{m_k} X_k$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $m_i = \ell$.

Ce qui précède montre que $a_{m_1+\cdots+m_k} X$ a même loi que $a_{m_1} X_1 + \cdots + a_{m_k} X_k$.

Ainsi $a_{k\ell} X$ a même loi que $a_\ell X_1 + \cdots + a_\ell X_k$.

Notons que $a_\ell X_1+\dots+a_\ell X_\ell = a_\ell(X_1+\dots+X_\ell)$.

Or $X_1+\dots+X_k$ a même loi que $a_k X$ donc $a_\ell X_1+\dots+a_\ell X_k$ a même loi que $a_\ell a_k X$.

Finalement $a_{k\ell} X$ a même loi que $a_\ell a_k X$ donc X et $\frac{a_\ell a_k}{a_{k\ell}} X$ ont même loi. Posons $\alpha = \frac{a_\ell a_k}{a_{k\ell}}$. $\alpha>0$ et X et αX ont même loi.

Montrons alors que $\alpha=1$ ce qui donnera $a_{k\ell}=a_\ell a_k = a_k a_\ell$.

Notons F la fonction de répartition commune à X et αX.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=P(X\leq x) \overset{\alpha>0}{=} P(\alpha X\leq \alpha x) = F(\alpha x)$.

une récurrence des plus simples montre que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=F(\alpha^n x)$.

1er Cas.. $\alpha>1$. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha^n x=+\infty$; $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $F(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} F(\alpha^n x)=1$.

ok?

Alors $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $P(X>x)=1-F(x)=0$. Ceci est impossible d'après Q2

2e Cas.. $\alpha<1$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(\frac{1}{\alpha}x)=F(\alpha\times\frac{1}{\alpha}x)=F(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=F(\frac{1}{\alpha}x)$

une récurrence simple donne alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=F\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n x\right)$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n x\right)=+\infty$; $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $F(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}F\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n x\right)=1$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $P(X>x)=1-F(x)=0$!!

Finalement $\alpha=1$. Alors $a_{\ell\ell}=a_k a_\ell$.

$\forall(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $a_{k\ell}=a_k a_\ell$.

(Q4) Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}$. Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$.

$$P\left(X>\frac{a_n}{a_{m+n}}t\right)=P(a_{m+n}X>a_n t)\underset{\text{IV A Q3 a)}}{=}P(a_m X_1+a_n X_2>a_n t)$$

Montrons que $\{X_1 \geq 0\} \cap \{X_2 > t\} \subset \{a_m X_1 + a_n X_2 > a_n t\}$

Soit $\omega \in \{X_1 \geq 0\} \cap \{X_2 \geq t\}$. $X_1(\omega) \geq 0$ et $X_2(\omega) > t$.

Alors $a_m X_1(\omega) \geq 0$ et $a_n X_2(\omega) > a_n t$ donc $(a_m X_1 + a_n X_2)(\omega) > a_n t$; ainsi $\omega \in \{a_m X_1 + a_n X_2 > a_n t\}$. Ceci achève de montrer l'inclusion.

Par croissance de P et indépendance de X_1 et X_2 il vient alors :

$$P\left(X > \frac{a_n}{a_{m+n}} t\right) = P(a_m X_1 + a_n X_2 > a_n t) \geq P(\{X_1 \geq 0\} \cap \{X_2 > t\}) = P(X_1 \geq 0)\, P(X_2 > t).$$

Or $P(X_2 > t) = P(X > t)$ et $P(X_1 \geq 0) = P(X \geq 0)$.

De plus $P(X \geq 0) = P(X > 0) + P(X = 0) = \frac{1}{2}(1 - P(X=0)) + P(X=0) = \frac{1}{2}(1 + P(X=0)) \geq \frac{1}{2}$.

Alors $P(X_1 \geq 0) P(X_2 > t) = P(X \geq 0) P(X > t) \geq \frac{1}{2} P(X > t)$ (car $P(X > t) \geq 0$!).

Finalement : $\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $P\left(X > \frac{a_n}{a_{m+n}} t\right) \geq \frac{1}{2} P(X > t)$.

Q5 V A Q R montre que : $\exists y \in \mathbb{R}_+^*$, $P(X > y) > 0$.

V1 Posons $S = \left\{ \frac{a_n}{a_m + a_n} : (m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \right\}$.

Supposons S non majorée. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists s_n \in S$, $s_n \geq n$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$. Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} (y s_n) = +\infty$.

Par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} (P(X \leq y s_n)) = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (P(X > y s_n)) = 0$.

Or $\forall s \in S$, $P(X > s y) \geq \frac{1}{2} P(X > y)$ d'après Q4.

En particulier $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(X > y s_n) = P(X > s_n y) \geq \frac{1}{2} P(X > y)$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient : $0 \geq \frac{1}{2} P(X > y)$ donc $P(X > y) \leq 0$!!

Alors S est majorée.

V2 $\lim_{x\to+\infty} P(X\leq x)=1$ donc $\lim_{x\to+\infty} P(X>x)=0$.

$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists \hat{A}\in\mathbb{R}_+^*, \forall x\in\mathbb{R}, \ x>\hat{A} \Rightarrow |P(X>x)|<\varepsilon$.

Posons $\varepsilon=\frac{1}{2}P(X>\mu)$. $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Ainsi :

$\exists\hat{A}\in\mathbb{R}_+^*, \forall x\in\mathbb{R}, \ x>\hat{A} \Rightarrow P(X>x)=|P(X>x)|<\frac{1}{2}P(X>\mu)$.

$\forall x\in]\hat{A},+\infty[, \ P(X>x)<\frac{1}{2}P(X>\mu)$.

Or $\forall(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2 \quad P(X>\frac{a_n}{a_{m+n}}\mu)\geqslant\frac{1}{2}P(X>\mu)$ donc

$\forall(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, \ \frac{a_n}{a_{m+n}}\mu\leq\hat{A}$. $\forall(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, \ \frac{a_n}{a_{n+m}}\leqslant\frac{\hat{A}}{\mu}$.

Ainsi $\underline{\underline{\left\{\frac{a_n}{a_{n+m}} : (m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2\right\}\text{ est majorée}}}$.

Soit A un majorant de $\left\{\frac{a_n}{a_{n+m}} : (m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2\right\}$.

$\forall(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, \ \frac{a_n}{a_{n+m}}\leqslant A$; $\forall(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, \ a_n\leqslant A\,a_{n+m}$.

ce qui s'écrit encore : $\forall(p,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, \ n\leqslant p\Rightarrow a_n\leqslant A\,a_p$...

ce qui peut encore s'écrire : $\forall(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, \ m\leqslant n\Rightarrow a_m\leqslant A\,a_n$.

De plus : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \ a_n>0$ et $\forall(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, \ a_{mn}=a_m a_n$.

<u>La partie I montre alors qu'il existe un réel α (positif) tel que</u>

$\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*, \ a_n=n^\alpha}}$.

$\boxed{B}$ Q1 X_1 et X_2 sont indépendantes et ont même loi alors X_1-X_2 et X_2-X_1 ont même loi.

Ainsi pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $P(X_1-X_2\in I)=P(X_2-X_1\in I)$ c'est à dire $P(X_1-X_2\in I)=P(-(X_1-X_2)\in I)$.

Alors $\underline{\underline{X_1-X_2 \text{ est symétrique}}}$.

(Q2) Posons $Y = X_1 - X_2$. Y est symétrique. Notons que Y suit une loi stable.

Soit $(Y_k)_{k\geq 1}$ une suite de copies de Y.

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, Y_k suit la loi de $X_1 - X_2$ donc de $X_{2k-1} - X_{2k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. 1) $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ont respectivement même loi que $X_1 - X_2, X_3 - X_4, \dots, X_{2n-1} - X_{2n}$.

2) $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes.

3) $X_1 - X_2, X_3 - X_4, \dots, X_{2n-1} - X_{2n}$ sont indépendantes.

Alors $\sum_{k=1}^{n} Y_k$ a même loi que $\sum_{k=1}^{n} (X_{2k-1} - X_{2k})$ ou que $\sum_{k=1}^{n} X_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} X_{2k}$.

1) $X_1, X_3, \dots, X_{2n-1}$ ont respectivement même loi que $X_1, X_2, \dots, X_n$.

2) $X_1, X_3, \dots, X_{2n-1}$ sont indépendantes.

3) $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes

Alors $\sum_{k=1}^{n} X_{2k-1}$ a même loi que $\sum_{k=1}^{n} X_k$ donc que $a_n X$ donc que $a_n X_1$.

De même $\sum_{k=1}^{n} X_{2k}$ a même loi que $\sum_{k=1}^{n} X_k$ donc que $a_n X$ donc que $a_n X_2$.

Comme 1) $\sum_{k=1}^{n} X_{2k-1}$ et $\sum_{k=1}^{n} X_{2k}$ sont indépendantes

2) $a_n X_1$ et $a_n X_2$ sont indépendantes

on peut dire que $\sum_{k=1}^{n} Y_k = \sum_{k=1}^{n} X_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} X_{2k}$ a même loi que $a_n X_1 - a_n X_2$

donc que $a_n (X_1 - X_2)$ ou que $a_n Y$.

Ainsi <u>$X_1 - X_2$ suit une loi stable et la(*) suite associée est $(a_n)_{n\geq 1}$.</u>

(*) X_1 et X_2 étant indépendantes et à densité on peut sans doute dire que $X_1 - X_2$ est à densité et qu'ainsi $P(X_1 - X_2 = 0) = 1$ est impossible. Alors $X_1 - X_2$ n'est pas presque sûrement nul.

$X_1 - X_2$ est stable, symétrique et par conséquent non nulle donc sa suite associée, qui est $(a_n)_{n\geq 0}$ est du type $(n^{\alpha})_{n\geq 1}$.

Ainsi il existe un réel (positif) α tel que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n = n^{\alpha}$.

Version 2 de I Q4 a) | $k\in\mathbb{N}^*$. $(r_1, r_2)\in(\mathbb{N}^*)^2$ et $r_2 > r_1 \geq 2$.

Lemme... Soit a un réel. $[a, a+1[\,\cap\,\mathbb{Z}\neq\emptyset$!

Si $a\in\mathbb{Z}$ c'est clair. Supposons que $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. $\text{Ent}(a)\leq a < \text{Ent}(a)+1$.

Mieux $\text{Ent}(a) < a < \text{Ent}(a)+1$. Alors $a < \text{Ent}(a)+1$ et $\text{Ent}(a)+1 < a+1$

Ainsi $\text{Ent}(a)+1\in\,]a, a+1[\,\cap\,\mathbb{Z}$ donc $\text{Ent}(a)+1\in[a, a+1[\,\cap\,\mathbb{Z}$.

Posons $a = k\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1}$. $\exists \ell\in\mathbb{Z}$, $\ell\in[a, a+1[$. Notons que

Alors $\ell\in\left[k\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1}, k\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1}+1\right[\underset{1\leq \frac{\ln r_2}{\ln r_1}}{\subset} \left[k\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1}, k\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1}+\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1}\right[$.

Alors $k\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1}\leq \ell < (k+1)\dfrac{\ln r_2}{\ln r_1}$; $k\ln r_2 \leq \ell\ln r_1 < (k+1)\ln r_2$;

ceci donne $\ell\in\mathbb{N}^*$ et $\ln r_2^{k}\leq \ln r_1^{\ell} < \ln r_2^{k+1}$ ou $r_2^{k}\leq r_1^{\ell} < r_2^{k+1}$.

Retour sur IV Q1 | * Pour l'incompatibilité : si k et k' sont deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$:

$$\Big(\bigcap_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq k}}\{|X_k|>2|X_i|\}\Big)\cap\Big(\bigcap_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq k'}}\{|X_{k'}|>2|X_i|\}\Big)\subset\{|X_k|>2|X_{k'}|\}\cap\{|X_{k'}|>2|X_k|\}=\emptyset \text{ !}$$

* Soit $k\in[\![2,n]\!]$. Soit $i\in[\![1,n]\!]-\{1,k\}$.

Alors $|X_k|-2|X_i|$ a même loi que $|X_1|-2|X_i|$

$|X_k|$ a même loi que $|X_1|$;
$|X_k|$ et $|X_i|$ sont indépendantes ;
$|X_1|$ et $2|X_i|$ sont indépendantes.

De même $|X_k|-2|X_1|$ a même loi que $|X_1|-2|X_k| = |X_1|-2|X_i|$ avec $i=k$

Alors $P\Big(\bigcap_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq k}}\{|X_k|-2|X_i|>0\}\Big) = P\Big(\bigcap_{i=2}^{n}\{|X_1|-2|X_i|>0\}\Big)$, qui est encore vrai pour $k=1$... ce qui donne le résultat.