

---

# MATHÉMATIQUES EDHEC 2003

## OPTION ÉCONOMIQUE

---

**Exercice** On note  $f$  la fonction définie, pour tout réel  $x$  strictement positif, par :  $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ .

1. a) Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, montrer que l'intégrale  $I_n = \int_n^{+\infty} f(x) dx$  est convergente et exprimer  $I_n$  en fonction de  $n$ .

b) En déduire que  $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

2. Montrer que la série de terme général  $u_n = f(n)$  est convergente.

3. a) Établir que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$ .

b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$ ,

de  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$ .

### Exercice

Dans cet exercice,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

1. Soit  $f_n$  la fonction définie par :  $f_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que  $f_n$  est une densité de probabilité.

2. On considère une variable aléatoire  $X_n$  réelle dont une densité de probabilité est  $f_n$ . On dit alors que  $X_n$  suit une loi monôme d'ordre  $n$ .

a) Reconnaître la loi de  $X_1$ .

b) Dans le cas où  $n$  est supérieur ou égal à 2, déterminer la fonction de répartition  $F_n$  de  $X_n$ , ainsi que son espérance  $E(X_n)$  et sa variance  $V(X_n)$ .

3. On considère deux variables aléatoires  $U_n$  et  $V_n$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , suivant la loi monôme d'ordre  $n$  ( $n \geq 2$ ) et indépendantes, c'est-à-dire qu'elles vérifient en particulier l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(U_n \leq x \cap V_n \leq x) = P(U_n \leq x) P(V_n \leq x)$$

On pose  $M_n = \sup(U_n, V_n)$  et on admet que  $M_n$  est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

---

- a) Pour tout réel  $x$ , écrire, en justifiant la réponse, l'événement  $(M_n \leq x)$  à l'aide des événements  $(U_n \leq x)$  et  $(V_n \leq x)$ .
- b) En déduire une densité de  $M_n$ . Vérifier que  $M_n$  suit une loi monôme dont on donnera l'ordre, puis déterminer sans calcul  $E(M_n)$ .
- c) On pose  $T_n = \inf(U_n, V_n)$ . Exprimer  $M_n + T_n$  en fonction de  $U_n$  et  $V_n$ , puis en déduire, sans calcul d'intégrale, la valeur de  $E(T_n)$ .

## Exercice

1. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{e^x - 1}{x} > 0$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $] 0; +\infty[$ , puis préciser  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$ .
4.
  - a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2}$ .
  - b) En déduire que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et donner  $f'(0)$ .
5.
  - a) Etudier les variations de la fonction  $g$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x e^x - e^x + 1$
  - b) En déduire le signe de  $(x)$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$  (limites comprises).

On considère la suite  $(u_n)$  définie par la donnée de son premier terme  $u_0 > 0$  et par la relation, valable pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

6. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ .
7.
  - a) Vérifier que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = f(-x)$ .
  - b) En déduire le signe de  $f(x) - x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
  - c) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
8. En déduire que  $(u_n)$  converge et donner sa limite.
9. Écrire un programme en **Pascal** permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel  $n$  pour lequel  $u_n \leq 10^{-3}$ , dans le cas où  $u_0 = 1$ .

## PROBLÈME

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité  $\frac{2}{3}$ .
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ .
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ .
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ .

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $A_n$  l'événement : le joueur gagne la  $n^{\text{ième}}$  partie. De plus, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \quad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \quad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \quad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. On admet que  $(E_n, F_n, G_n, H_n)$  est un système complet d'événements.

- Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :  $P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$ .
- Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités  $P(F_{n+1})$ ,  $P(G_{n+1})$  et  $P(H_{n+1})$  en fonction de  $P(E_n)$ ,  $P(F_n)$ ,  $P(G_n)$  et  $P(H_n)$ .

- Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on pose :  $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$ .

Vérifier que  $U_{n+1} = MU_n$ , où  $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$ .

- Soient  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $PQ$ . En déduire que  $P$  est inversible et donner son inverse.

- On note  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  les colonnes de  $P$ . Calculer  $MC_1, MC_2, MC_3$  et  $MC_4$ , puis en déduire que  $-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$  et 1 sont les valeurs propres de  $M$ .
- Justifier que  $M = PDP^{-1}$ , où  $D$  est une matrice diagonale que l'on déterminera.

**Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.**

- Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$ .
- Montrer, également par récurrence, que :  $\forall n \geq 2, U_n = M^{n-2}U_2$ .
- Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de  $M^n$ , puis en déduire  $P(E_n), P(F_n), P(G_n)$  et  $P(H_n)$ .
- Montrer que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}$$

4. Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on note  $X_k$  la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la  $k^{\text{ième}}$  partie et qui vaut 0 sinon ( $X_1$  et  $X_2$  sont donc deux variables certaines).

- Pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 2, exprimer  $A_k$  en fonction de  $E_k$  et  $F_k$ .
- En déduire, pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 2, la loi de  $X_k$ .

5. Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on note  $S_n$  la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des  $n$  premières parties.

- a) Calculer  $P(S_n = 2)$  en distinguant les cas  $n = 2$ ,  $n = 3$  et  $n \geq 4$ .
- b) Déterminer  $P(S_n = n)$ .
- c) Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, écrire  $S_n$  en fonction des variables  $X_k$ , puis déterminer  $E(S_n)$  en fonction de  $n$ .