

EDHEC 2005

Option économique

—

Exercice 1

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on rappelle que la famille (J_1, J_2, J_3, J_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = M + (a + d)I$

où I désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. a) Exprimer $f(J_1)$, $f(J_2)$, $f(J_3)$, et $f(J_4)$ comme combinaisons linéaires de J_1 , J_2 , J_3 et J_4 .

b) Vérifier que la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4) est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- c) Justifier que f est diagonalisable.
3. a) Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
b) Écrire la matrice D de f dans cette base.
c) En déduire l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = P D P^{-1}$
4. a) Déterminer la matrice P^{-1} .
b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = P D^n P^{-1}$
c) En déduire explicitement la matrice A^n .

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x e^{x(y^2+1)}$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. a) Déterminer les dérivées partielles premières de f
b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.
3. a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f .
b) Montrer qu'effectivement, f présente un extremum local en A . En préciser la nature et la valeur.
4. a) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq x e^x$.
b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x e^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 2b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

1. On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{a-1} & \text{si } t \in [0, 1[\\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1[\end{cases}$

a) Pour tout x de $[0, 1[$, calculer $\int_0^x f(t) dt$

b) En déduire que $\int_0^1 f(t) dt$ est une intégrale convergente et donner sa valeur.

c) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

On considère maintenant une variable aléatoire X admettant f comme densité et on note F sa fonction de répartition.

2. Expliciter $F(x)$ pour tout réel x .

On se propose de déterminer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X . Pour ce faire, on pose $Y = -\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note alors G sa fonction de répartition.

3. a) Pour tout réel x positif, exprimer $G(x)$ en fonction de x
b) En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre a .

4. a) Pour tout réel $\lambda > 0$, donner la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$.

b) En déduire que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de a .

c) Exprimer X en fonction de Y , puis en déduire que X possède une espérance dont on donnera l'expression en fonction de a .

- d) Montrer que la variable aléatoire e^{-2Y} possède une espérance et que $E(e^{-2Y}) = \frac{a}{a+2}$

En déduire la variance de e^{-Y} puis la variance de X .

Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O

Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n , alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$) ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont $0, 0, 1, 2, 0, 0, 1$, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : $1, 2, 3, 0, 0, 1$, alors on a $T = 4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

1. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i .
b) Donner la loi de X_1 .
c) En déduire $P(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T .

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $X_n(\Omega) = [[0, n]]$
 b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer que : $P(X_n = 0) = 1 - p$
3. a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\}, P(X_{n+1} = k) = p P(X_n = k-1)$
 b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, P(X_n = k) = p^k (1-p)$.
 En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
 c) Vérifier que $\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1$.
4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \frac{1}{3}$.

On rappelle que `random(3)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

Program edhec2005 ;

Var k, n, u, X : integer ;

begin

 Readln(n) ;

 Randomize ;

 X := 0 ;

 For k := 1 to n do

 begin

 u := random(3) ;

 if (u = 2) then X := ;

 else X := ;

 end ;

 Writeln (X) ;

end.

5. a) Montrer que : $\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - n p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$
 b) En déduire que $E(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.
6. a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1}^2) = p(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1)$.
 b) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = E(X_n^2) + (2n-1) \frac{p^{n+1}}{1-p}$
 Montrer que $u_{n+1} = p u_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$
 c) En déduire l'expression de u_n , puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction de p et n .
 d) Montrer enfin que : $V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$