EML 2000 Eco

Exercice 1 :

On considère une matrice carrée d'ordre 3 :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice J dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.On considère, pour tout nombre réel a, la matrice carrée réelle d'ordre 3 :

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
   b) Montrer que J est diagonalisable. Déterminer une matrice réelle diagonale D d'ordre trois et une matrice réelle inversible P d'ordre trois telles que $J = PDP^{-1}$
   c) En déduire que, pour tout nombre réel a, il existe une matrice réelle diagonale D_a d'ordre trois, que l'on calculera, telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.
   d) Quel est l'ensemble des nombres réels a tels que M_a soit inversible ?
2. On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice carrée réelle d'ordre trois vérifiant $X^2 = M_a$.
   a) Soient a un nombre réel et X une matrice carrée réelle d'ordre trois tels que $X^2 = M_a$
      i. Montrer que X commute avec M_a, puis que X commute avec J.
      ii. On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice X dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déduire de la question précédente que tout vecteur propre de f est vecteur propre de h.
      iii. Etablir qu'il existe une matrice réelle diagonale Δ d'ordre trois telle que $X = P\Delta P^{-1}$ et montrer : $\Delta^2 = D_a$.
      iv. En déduire : $a \geqslant 2$.
   b) Réciproquement, montrer que, pour tout nombre réel a supérieur ou égal à 2, il existe une matrice carrée réelle X d'ordre trois telle que $X^2 = M_a$.
   c) Conclure.

Exercice 2 :

On considère la fonction $f :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]-1;+\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[\end{cases}.$$

1. a) Montrer que f est continue sur $]-1;+\infty[$.
   b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$Pour tout réel x de $]-1;0[\cup]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$
   c) Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.
   d) En déduire que f est de classe C^1 sur $]-1;+\infty[$.
2. Montrer : $\forall x \in]-1;+\infty[,\ \dfrac{x}{x+1} - \ln(1+x) \leqslant 0$ En déduire les variations de f . On précisera les limites de f en -1 et $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$ existe.
4. On considère la fonction $F : \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ et que F est croissante.

b) Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[\,, F(x) \geqslant xf(2x)$.

c) En déduire que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

d) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)\,dt$. est convergente. En déduire que la fonction F admet une limite finie de $-\dfrac{1}{2}$. On ne cherchera pas à calculer cette limite.

Exercice 3 :

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

I Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon alétoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $E(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, ..., 2n-1\}\,, P(X = k) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$
2. Montrer : $E(X) = \dfrac{2n+1}{3}$ On rappelle que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.
3. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs losqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, G_1 est égale à $a-k$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1.

II Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs losqu'il obtient le premier roi rouge.On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a-k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, ..., n\}$, déterminer $P(G_2 = a-k)$.
2. Vérifier : $P(G_2 = -n) = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.
3. Montrer : $E(G_2) = \dfrac{3(3n-1)a - \left(7n^2-1\right)}{6(2n-1)}$.

III Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.