# Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2001

# MATHEMATIQUES

## 1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

---

## Exercice 1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre quatre :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est $A$.

**1.** Montrer que $A$ n'est pas inversible. En déduire que 0 est valeur propre de $A$.

**2.** (a) Calculer $A^2$, $A^3$, $A^4$.

(b) Etablir que 0 est la seule valeur propre de $f$.

(c) Déterminer la dimension du noyau de $f$.

(d) Est-ce que $f$ est diagonalisable ?

**3.** On note $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$, et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Déterminer la matrice $N$ de $f$ relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.

**4.** Existe-t-il un automorphisme $g$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$ ?

## Exercice 2

On considère l'application $f\ : [0; +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x$ de $[0; +\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que $f$ est continue sur $[0; +\infty[$.

(b) Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x \in ]0,+\infty[$, calculer $f'(x)$.

(c) Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$ lorsque $x$ tend vers 0.

(d) En déduire que $f$ est $C^1$ sur $[0;+\infty[$.

2. (a) Montrer que $f$ est de classe $C^2$ sur $]0;+\infty[$ et que: $\forall x \in ]0;+\infty[ \quad f''(x) = \dfrac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$

(b) Etudier les variations de la fonction $g\ : [0;+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x$ de $[0;+\infty[$, par:

$$g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$$

En déduire : $\quad \forall x \in ]0;+\infty[, \quad f''(x) > 0.$

(c) En déduire le sens de variation de $f$. On précisera la limite de $f$ en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de $f$.

(d) Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$.

**3.** On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer :

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

(b) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in ]0;+\infty[$.

(c) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$$

(d) Etablir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

# Exercice 3

**1.** Pour tout entier naturel $n$, on considère la fonction $f_n\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}t^n}{n!} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f_n(t) = 0$.

En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$ est convergente.

(b) Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0;+\infty[, \quad \int_0^x f_n(t)\, dt = -\dfrac{e^{-x}x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t)\, dt.$

(c) En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = 1$

(d) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, la fonction $f_n$ est la densité de probabilité d'une variable aléatoire.

1. Pour tout entier naturel $n$, on définit la variable aléatoire $X_n$ admettant $f_n$ pour densité de probabilité.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ vérifient:

$$E(X_n) = n+1 \qquad V(X_n) = n+1$$

(b) Dans cette question, on suppose que $n = 4$. On donne les valeurs approchées à $10^{-2}$ suivantes:

$$\int_0^4 f_4(t)\,dt \simeq 0,37 \qquad \int_0^6 f_4(t)\,dt \simeq 0,71 \qquad \int_0^8 f_4(t)\,dt \simeq 0,90$$

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition de $X_4$.
Déterminer une valeur décimale approchée de la probabilité $P(X_4 > 4)$ et une valeur décimale approchée de la probabilité $P(4 < X_4 \leqslant 8)$.

**3.** Pour tout réel $t > 0$, on définit la variable aléatoire $Y_t$ égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant $t$.
On suppose que la variable aléatoire $Y_t$ suit une loi de Poisson de paramètre $t$.

(a) Rappeler, pour tout réel $t > 0$, les valeurs de l'espérance et de la variance de $Y_t$.
Pour tout entier naturel $n$ non nul, on définit la variable aléatoire réelle $Z_n$, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, égale à l'instant d'arrivée de la $n^{ième}$ voiture au péage à partir de l'instant 0.

(b) Soient $t \in ]0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Justifier l'égalité de l'événement $(Z_n \leqslant t)$ et de l'événement $(Y_t \geqslant n)$

(c) En déduire, pour tout entier naturel $n$ non nul, la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle $Z_n$.

(d) Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, la variable aléatoire $Z_n$ admet $f_{n-1}$ comme densité de probabilité.

\- FIN -