Prépa ECE 2
DS n°6 / Concours blanc / Durée 4h / Le 8/3/2005
EML 2002

Exercice 1

On considère les deux matrices carrées réelles d'ordre quatre suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Les questions 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

1. a) Calculer K^2.
   b) En déduire que la matrice K est inversible et déterminer K^{-1}.
   c) Montrer que la matrice K n'admet aucune valeur propre réelle.

2. Soient a et b deux nombres réels. On note M la matrice définie par $M = aI + bK$.

   a) Montrer : $\quad M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM$.
   b) En déduire que, si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors la matrice M est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de I et M.
   c) *Application :* donner l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à la matrice K relativement à la base $\mathcal{B}$. On considère les quatre éléments suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = e_1 \qquad v_2 = f(e_1) \qquad v_3 = e_3 \qquad v_4 = f(e_3)$$

   a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   b) Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$, $f(v_4)$ en fonction de v_1, v_2, v_3, v_4 et en déduire la matrice K' associée à f relativement à la base $\mathcal{C}$.
   c) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
   d) Rappeler l'expression de K' en fonction de K, P et P^{-1}.

Exercice 2

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0,+\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Étude des fonctions polynomiales $\mathbf{P_n}$

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$:

$$P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1} \quad \text{où } P_n' \text{ désigne la dérivée de } P_n$$

2. Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.

3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

4. a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right)$$

   b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geqslant 0$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1,+\infty[$, admet une solution et une seule notée x_n, et que :

$$1 < x_n \leqslant 2$$

6. Écrire un programme en langage Pascal qui calcule une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $(\mathbf{x_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^*}$

1. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\, dt$$

3. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1,+\infty[$:

$$t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1)$$

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt \geqslant \frac{n}{2}(x_n-1)^2\ ,$$

puis :

$$0 < x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}$$

5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3

1. **Étude préliminaire**

On admet, pour tout entier k et pour tout $x \in [0,1[$ que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}x^n$ est convergente et on note $s_k(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n$.

a) Vérifier, pour tout réel x de $[0,1[$:

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

b) Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tels que $n<k$, montrer :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

c) Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0,1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = xs_k(x) + xs_{k+1}(x)$$

d) Montrer par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1[\qquad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

2. **Étude d'une expérience aléatoire**

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
  On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
  On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance .

b) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{N=n}(X = k)$.

c) Vérifier que : $\quad P(X = 0) = \dfrac{4}{9}$.

d) En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad P(X = k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k$$

e) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.

f) Montrer : $\qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad P(X \leqslant k) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.

3. **Étude d'une variable à densité**

On note $a = -\dfrac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ F(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On rappelle : $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\dfrac{4}{9}\right)^x = e^{x \ln \frac{4}{9}}$.

a) Montrer que F est la fonction de répartion d'une variable à densité, notée Y.

b) Déterminer une densité f de Y.

c) Déterminer une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\, e^{x \ln \frac{4}{9}}$.

d) Montrer que Y admet une espérance $E\,(Y)$ et calculer $E(Y)$.