

EML Eco 2008

EXERCICE 1

On admet l'encadrement suivant : $2,7 < e < 2,8$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in]0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t \ln(t) - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
2. Justifier que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0, +\infty[$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Dresser le tableau des variations de f .
5. Montrer que f est convexe sur $]0, +\infty[$.
6. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$
 - a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O .
 - b) Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.
 - c) Préciser la nature de la branche infinie de Γ .
 - d) Tracer Γ

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G :]1 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1 ; +\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$$

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $]1 ; +\infty[$ et que, pour tout $x \in]1 ; +\infty[$:

$$G'(x) = \frac{1}{2} (f(x+1) - f(x-1))$$
$$\text{et } G''(x) = \frac{1}{2} (\ln(x+1) - \ln(x-1))$$

À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive F de f sans chercher à calculer F .

2.
 - a) Montrer que G' est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$.
 - b) Vérifier : $G'(2) > 0$.
 - c) Établir que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1 ; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et que $\alpha < 2$

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $\Phi :]1 ; +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $(x, y) \in]1 ; +\infty[^2$, par :

$$\Phi(x, y) = (y - f(x+1))^2 + (y - f(x-1))^2$$

où l'application f est définie dans la partie I.

1. Justifier que Φ est de classe C^2 sur $]1 ; +\infty[^2$ et calculer les dérivées partielles premières de Φ en tout (x, y) de $]1 ; +\infty[^2$.
2. Vérifier que $(\alpha, f(\alpha+1))$ est un point critique de Φ . où α est défini en **II 2.c**.
3. Est-ce que Φ admet un extremum local en $(\alpha, f(\alpha+1))$?

EXERCICE 2

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie I : Réduction simultanée de A et B

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .
2. En déduire une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, de deuxième ligne $(-1 \quad 1 \quad 1)$, telle que $A = P D P^{-1}$, et calculer P^{-1} .
3. Calculer la matrice $C = P^{-1} B P$ et vérifier que C est diagonale.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application $f : E \rightarrow E$ qui, à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe $f(M) = AM - MB$.

1. Donner la dimension de E .
2. Vérifier que f est un endomorphisme de E .
3. Soit $M \in E$. On note $N = P^{-1} M P$, où P est définie en **I.2**.
 - a) Montrer : $M \in \ker(f) \iff DN = NC$.
 - b) Déterminer les matrices N carrées d'ordre trois telles que : $DN = NC$.
 - c) Montrer que l'ensemble des matrices N carrées d'ordre trois telles que $DN = NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.
4.
 - a) En déduire la dimension de $\ker(f)$, puis la dimension de $\text{Im}(f)$.
 - b) Donner au moins un élément non nul de $\ker(f)$ et donner au moins un élément non nul de $\text{Im}(f)$.

EXERCICE 3

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$\forall x \in [0; 1], \quad h(x) = \frac{x}{2-x}$$

- Montrer que h est une bijection de $[0; 1]$ sur $[0; 1]$ et, pour tout $y \in [0; 1]$, exprimer $h^{-1}(y)$.
- Déterminer deux réels α et β vérifiant : $\forall x \in [0; 1], \quad h(x) = \alpha + \frac{\beta}{2-x}$
- Calculer $\int_0^1 h(x) dx$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$

- Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .
- Pour tout réel y de $[0; 1]$ déterminer la probabilité de l'événement $\left(\frac{X}{2-X} \leq y\right)$
- Montrer que la variable aléatoire $Y = \frac{X}{2-X}$ admet une densité et déterminer une densité de Y .
- Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ et déterminer -

Partie II : Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note I_1, I_2, \dots, I_n .

Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire T_k de loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$. On suppose de plus que, pour tout réel t , les n événements $(T_1 \leq t), (T_2 \leq t), \dots, (T_n \leq t)$, sont indépendants.

- Soit un réel t appartenant à $[0; 1]$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \leq t)$ est réalisé et la valeur 0 sinon. On note $S_t = B_1 + B_2 + \dots + B_n$.
 - Que modélise la variable aléatoire S_t ?
 - Déterminer la loi de la variable aléatoire S_t .
- Soit R_1 la variable aléatoire égale à l'instant de la première arrivée.
 - Soit un réel t appartenant à $[0; 1]$. Comparer l'événement $(R_1 > t)$ et l'événement $(S_t = 0)$
 - Montrer que la variable aléatoire R_1 admet une densité et en déterminer une.
- Soit R_2 la variable aléatoire égale à l'instant de la deuxième arrivée. Montrer que la variable aléatoire R_2 admet une densité et en déterminer une.