

Exercice 1

On considère l'application

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = (x + \ln x) e^{x-1}.$$

Partie I : Étude et représentation graphique de f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$.

2. Établir :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln x + \frac{1}{x} > 0$$

3. En déduire :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0.$$

4. En déduire le sens de variation de f .

5. Dresser le tableau de variation de f , comprenant la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.

6. Préciser la nature des branches infinies de la courbe représentative C de f dans un repère du plan.

7. Tracer l'allure de C . On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

Il n'est demandé ni l'étude de la convexité, ni la recherche d'éventuels points d'inflexion.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f .

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.

2. Établir, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq e^n$.

Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

3. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^{20}$.

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f

On considère l'application

$$F :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

1. Montrer que F est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et exprimer $F'(x)$, pour tout $x \in]0; +\infty[$, à l'aide de $f(x)$.

On considère l'application de classe C^2

$$G :]0; +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto G(x, y) = F(x) + F(y) - 2e^{\frac{x+y}{2}}.$$

2. Exprimer les dérivées partielles premières $G'_x(x, y)$ et $G'_y(x, y)$, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$ à l'aide de $f(x)$, $f(y)$ et $e^{\frac{x+y}{2}}$.
3.
 - a) Montrer que f est bijective.
 - b) Établir que, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$, (x, y) est un point critique de G si et seulement si :

$$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln x = e.$$
4. Montrer que l'équation $x + \ln x = e$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$ admet une solution et une seule, que l'on notera α , et montrer que : $1 < \alpha < e$.
5. Montrer que G admet un extremum local. Préciser sa nature.

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Partie I : Détermination d'une racine carrée de A

1. Sans calcul, justifier que A est diagonalisable et non inversible. Déterminer le rang de A .
2. Montrer que 0, 1 et 4 sont les trois valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.
3. En déduire une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que : $A = PDP^{-1}$.
4. Calculer P^{-1} .
5. Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, telle que $\Delta^2 = D$, et déterminer Δ .
6. On note $R = P\Delta P^{-1}$. Montrer $R^2 = A$ et calculer R .

Partie II : Étude d'endomorphismes

On munit \mathbb{R}^3 de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère les endomorphismes f et g de \mathbb{R}^3 dont les matrices dans \mathcal{B} sont respectivement A et R .

On note $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ la base de \mathbb{R}^3 telle que P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} .

1. Déterminer les matrices de f et g dans la base \mathcal{C} .
2.
 - a) Déterminer une base et la dimension de $\ker(f)$.
 - b) Déterminer une base et la dimension de $\text{Im}(f)$.
3.
 - a) Déterminer une base et la dimension de $\ker(g)$.
 - b) Déterminer une base et la dimension de $\text{Im}(g)$.
4. Trouver au moins un automorphisme h de \mathbb{R}^3 tel que $g = f \circ h$.
On déterminera h par sa matrice H dans la base \mathcal{C} , puis on exprimera la matrice de h dans la base \mathcal{B} à l'aide de H et de P .

Exercice 3

Les deux parties sont indépendantes.

Soit $p \in]0; 1[$. On note $q = 1 - p$.

Partie I : Différence de deux variables aléatoires.

Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1. Déterminer la loi de X . Rappeler son espérance et sa variance.
2. Montrer que Z suit une loi binomiale. Donner son espérance et sa variance.

On note $Y = Z - X$.

3. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer la loi de Y .
4. a) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
b) Calculer la covariance du couple (X, Y) .

Partie II : Variable aléatoire à densité conditionnée par une variable aléatoire discrète

Dans cette partie, on note U une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p .

1. Rappeler la loi de U , son espérance et sa variance.

On considère une variable aléatoire T telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0; +\infty[, P_{(U=n)}(T > t) = e^{-nt}$.

2. a) Montrer : $\forall t \in [0; +\infty[, P(T > t) = \frac{p e^{-t}}{1 - q e^{-t}}$.
b) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T .
c) En déduire que T est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

3. On note $Z = UT$.

- a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in [0; +\infty[, P_{(U=n)}(Z > z) = e^{-z}$.
- b) En déduire que la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
- c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in [0; +\infty[, P(U = n, Z > z) = P(U = n) P(Z > z)$.