

# H.E.C. 2007

## OPTION : ÉCONOMIQUE

### MATHÉMATIQUES III

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans {a mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

## EXERCICE

1. On considère  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$ ; soit  $t$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ , dont la matrice associée  $T$  relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de  $t$ . Déterminer les sous-espaces propres de  $t$  associés, et donner une base de chacun d'entre eux.

L'endomorphisme  $t$  est-il diagonalisable? Est-il bijectif?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

2. Soit  $n$  un entier de  $\mathbb{N}^*$ . On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{2n+1}$  muni de sa base canonique  $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$ . Soit  $t$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  défini par :
  - pour tout entier  $i$  de  $[1, 2n + 1]$ , avec  $i \neq n + 1$  :  $t(e_i) = e_i$  ;
  - $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \dots + e_{2n+1}$ .
  - a) Déterminer la matrice  $T$  associée à l'endomorphisme  $t$  relativement à la base  $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$
  - b) Déterminer le rang de  $t$ , ainsi que la dimension du noyau de  $t$ .
  - c) Justifier que 0 est valeur propre de  $t$ . Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.
3. Montrer que  $\text{Im}(t \circ t) \subset \text{Im}(t)$ , où  $\text{Im}(u)$  désigne l'image d'un endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}^{2n+1}$
4. Soit  $\tilde{t}$  l'endomorphisme défini sur  $\text{Im}(t)$  par : pour tout  $x$  de  $\text{Im}(t)$ ,  $\tilde{t}(x) = t(x)$   
Établir que  $\mathcal{B} = (e_1, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i)$  constitue une base de  $\text{Im}(t)$ . Écrire la matrice associée à  $\tilde{t}$  relativement à la base  $\mathcal{B}$
5.
  - a) Soit  $\lambda$  une valeur propre non nulle de  $t$ , et  $x$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . Montrer que  $x$  appartient à  $\text{Im}(t)$ .
  - b) En déduire toutes les valeurs propres de  $t$ . L'endomorphisme  $t$  est-il diagonalisable?

## PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont considérées comme définies sur des espaces probabilisés non nécessairement identiques, mais qui, par souci de simplification, seront tous notés  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

## Partie I

- On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{1}{2} \times e^{-|x|}$ 
  - Montrer que les intégrales  $\int_{-\infty}^0 g(x) dx$  et  $\int_0^{+\infty} g(x) dx$  sont convergentes et de même valeur.
  - Établir que  $g$  est une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $Y$  une variable aléatoire à valeurs réelles admettant  $g$  pour densité. On dit que  $Y$  suit la loi  $\mathcal{L}(0)$ .

- Étudier les variations de  $g$  et tracer l'allure de sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
- Montrer, pour tout  $r$  de  $\mathbb{N}$ , l'existence du moment  $m_r(Y)$  d'ordre  $r$  de la variable aléatoire  $Y$ .
  - Calculer, pour tout  $r$  de  $\mathbb{N}$ ,  $m_r(Y)$  en fonction de  $r$ . Quelles sont les valeurs de l'espérance  $E(Y)$  et de la variance  $V(Y)$  de la variable aléatoire  $Y$  ?
- Déterminer la fonction de répartition  $G$  de  $Y$ .
  - Établir que  $G$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]0; 1[$ .
  - Montrer que l'équation  $G(x) = \frac{1}{2}$  admet une unique solution que l'on déterminera.
  - Établir que la fonction qui, à tout réel  $x$  associe  $G(x)(1 - G(x))$ , est paire.
- Montrer que l'application réciproque  $G^{-1}$  de  $G$  est définie par :

$$G^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(2x) & \text{si } 0 < x \leq 1/2 \\ -\ln(2(1-x)) & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

- Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est **Laplace** qui permet de simuler la loi  $\mathcal{L}(0)$ .  
On rappelle que la fonction **random** permet de simuler en Pascal une loi uniforme sur  $]0; 1[$ .
- Pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on considère la fonction  $g_n$  définie par :

$$g_n(x) = g(x) (1 + xe^{-n|x|})$$

Montrer que  $g_n$  définit une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on désigne par  $Y_n$  une variable aléatoire de densité  $g_n$ , et on note  $G_n$  la fonction de répartition de  $Y_n$ .

- Établir pour tout réel  $x$ , la majoration suivante :  $|G_n(x) - G(x)| \leq \frac{1}{ne} \times G(x)$
  - En déduire que la suite de variables aléatoires  $(Y_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers la loi  $\mathcal{L}(0)$

## Partie II

Soit  $\theta$  un paramètre réel inconnu et  $X$  une variable aléatoire à densité. On dit que  $X$  suit la loi  $\mathcal{L}(\theta)$ ,

si une densité  $f$  de  $X$  est donnée par : pour tout  $x$  réel,  $f(x) = \frac{e^{-|x-\theta|}}{2}$

Soit  $n$  un entier naturel. On considère un  $(2n+1)$ -échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_{2n+1})$  de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi  $\mathcal{L}(\theta)$

- Déterminer la fonction de répartition  $F$  de la variable aléatoire  $X$ .

- b) En déduire que la variable aléatoire  $(X - \theta)$  suit la loi  $\mathcal{L}(0)$  définie dans la partie I.
- c) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $X$ .
- d) Résoudre l'équation  $F(x) = 1/2$
2. Soit  $x$  un réel fixé. Pour tout  $i$  de  $[[1, 2n + 1]]$ , on note  $Z_i$  la variable aléatoire de Bernoulli telle que  $P(Z_i = 1) = P(X_i \leq x)$
- a) Établir l'indépendance des variables aléatoires  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{2n+1}$
- b) Soit  $S_{2n+1}$  la variable aléatoire définie par :  $S_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} Z_i$ . Quelle est la loi de probabilité de  $S_{2n+1}$  ?  
Préciser l'espérance et la variance de  $S_{2n+1}$ .
3. On pose  $\bar{X}_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} X_i$
- a) Montrer que  $\bar{X}_{2n+1}$  est un estimateur sans biais du paramètre  $\theta$
- b) Calculer le risque quadratique de  $\bar{X}_{2n+1}$  en  $\theta$ .

### Partie III

Le contexte de cette partie est identique à celui de la partie précédente.

Pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on réordonne par ordre croissant les réels  $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_{2n+1}(\omega)$ , et on note  $\hat{X}_1(\omega), \hat{X}_2(\omega), \dots, \hat{X}_{2n+1}(\omega)$  les nombres ainsi rangés, c'est-à-dire que  $\hat{X}_1(\omega) \leq \hat{X}_2(\omega) \leq \dots \leq \hat{X}_{2n+1}(\omega)$ . On définit ainsi  $(2n+1)$  variables aléatoires  $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_{2n+1}$ , telles que  $\hat{X}_1 \leq \hat{X}_2 \leq \dots \leq \hat{X}_{2n+1}$  qui constituent un réarrangement par ordre croissant des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_{2n+1}$ . On admet que  $P\left(\left[\hat{X}_1 < \hat{X}_2 < \dots < \hat{X}_{2n+1}\right]\right) = 1$ .

On s'intéresse dans cette partie à la variable aléatoire  $\hat{X}_{n+1}$ .

1. a) Pour tout réel  $x$ , justifier l'égalité entre événements suivante :  $\left[\hat{X}_{n+1} \leq x\right] = [S_{2n+1} \geq n+1]$ .
- b) En déduire la fonction de répartition  $\hat{F}_{n+1}$  de  $\hat{X}_{n+1}$  en fonction de  $F$  (on exprimera cette fonction sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer).
2. On note  $\hat{f}_{n+1}$  une densité de  $\hat{X}_{n+1}$ , et  $\hat{g}_{n+1}$  une densité de  $(\hat{X}_{n+1} - \theta)$ .
- a) Établir pour tout  $j$  de  $[[0; 2n]]$ , l'égalité suivante :  $(j+1) \binom{2n+1}{j+1} = (2n-j+1) \binom{2n+1}{j}$ .
- b) En déduire, pour tout  $x$  réel, l'égalité :

$$\hat{f}_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} (F(x))^n (1-F(x))^n f(x)$$

- c) Établir, pour tout  $x$  réel, l'égalité suivante :

$$\hat{g}_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} (G(x))^n (1-G(x))^n g(x)$$

où  $g$  et  $G$  ont été définies dans la partie I.

- d) En utilisant la question I.4.d), montrer que  $\hat{X}_{n+1}$  est un estimateur sans biais du paramètre  $\theta$ .
3. Dans cette question, on étudie le comportement de la suite  $\left(\hat{X}_{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ , lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .  
On désigne par  $\hat{h}_{n+1}$  une densité de la variable aléatoire  $\sqrt{2n+1} (\hat{X}_{n+1} - \theta)$ .

a) Montrer que pour tout réel  $x$ , on a :

$$\widehat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \times \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \left( G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \right)^n \left( 1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \right)^n g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)$$

b) Écrire, lorsque  $u$  tend vers 0, le développement limité à l'ordre 2 de  $e^{-u}$ , et le développement limité à l'ordre 1 de  $\ln(1-u)$ .

c) Soit  $x$  un réel fixé. Montrer que lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a :

$$G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \left( 1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \right) = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{x^2}{2n+1} + o\left(\frac{1}{(2n+1)}\right) \right)$$

d) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n \left[ G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \left( 1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \right) \right]^n = e^{-x^2/2}$$

e) On admet que lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\binom{2n}{n} \times \frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Montrer alors que pour tout réel  $x$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

4. On admet que le résultat de la question précédente entraîne la convergence en loi de la suite de variables aléatoires  $\sqrt{2n+1} \left( \widehat{X}_{n+1} - \theta \right)$  vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Montrer qu'un intervalle de confiance  $[I_n; J_n]$  pour le paramètre  $\theta$  au risque  $\alpha = 0,05$ , est donné par :

$$I_n = \widehat{X}_{n+1} - \frac{1,96}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{et} \quad J_n = \widehat{X}_{n+1} + \frac{1,96}{\sqrt{2n+1}}$$

(on rappelle que si  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on a  $\Phi(1,96) \simeq 0,975$ )