

## BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2013

Conception : H.E.C.

OPTION : ÉCONOMIQUE

## MATHÉMATIQUES

Mardi 30 avril 2013, de 8h à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

## EXERCICE

On note  $E = \mathbb{R}_3[X]$  l'espace vectoriel polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

Soit  $f$  l'application définie sur  $E$  qui associe à tout polynôme  $P \in E$ , le polynôme  $f(P)$  défini par :

$$f(P)(X) = -3XP(X) + X^2P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1.
  - a) Rappeler la dimension de  $E$ .
  - b) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
  - c) Déterminer la matrice  $M$  de  $f$  dans la base canonique de  $E$ .
  - d) La matrice  $M$  est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $M^n$ .
  - e) Préciser le noyau  $\text{Ker } f$  de  $f$  ainsi qu'une base de  $\text{Ker } f$ .
  - f) Déterminer l'image  $\text{Im } f$  de  $f$ .
2. On note  $\text{id}_E$  et  $0_E$  respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de  $E$ , et pour tout endomorphisme  $v$  de  $E$ , on pose  $v^0 = \text{id}_E$  et pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $v^k = v \circ v^{k-1}$ .  
 Soit  $u$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que :  $u^4 = 0_E$ ,  $u^3 \neq 0_E$  et  $g = \text{id}_E + u + u^2 + u^3$ .
  - a) Soit  $P$  un polynôme de  $E$  tel que  $P \notin \text{Ker}(u^3)$ . Montrer que la famille  $(P, u(P), u^2(P), u^3(P))$  est une base de  $E$ .
  - b) Montrer que  $g$  est un automorphisme de  $E$ . Déterminer l'automorphisme réciproque  $g^{-1}$  en fonction de  $u$ .
  - c) Établir l'égalité  $\text{Ker } u = \text{Ker}(g - \text{id}_E)$
  - d) Montrer que 1 est la seule valeur propre de  $g$ .

## PROBLÈME

- Le problème aborde d’une part, l’analyse mathématique de l’évolution du prix de vente d’un bien sous différents modes d’anticipation d’agents économiques et d’autre part, la mise en évidence de certaines propriétés de la fonction de profit d’une entreprise.
- On note  $E(X)$  et  $V(X)$  respectivement, l’espérance et la variance d’une variable aléatoire  $X$  définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .
- Les quatre parties du problème sont très largement indépendantes. Les questions 10 et 11 font appel aux résultats de la partie III.

### Partie I. Prix d’équilibre

Sur le marché d’un certain bien, on note  $D$  la fonction de demande globale (des consommateurs),  $O$  la fonction d’offre globale (des entreprises) et  $p$  le prix de vente du bien.

On suppose habituellement que la fonction  $D : p \mapsto D(p)$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  à valeurs réelles est décroissante et que la fonction  $O : p \mapsto O(p)$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  à valeurs réelles est croissante.

Si l’équation  $O(p) = D(p)$  admet une solution  $p^*$ , on dit que  $p^*$  est un *prix d’équilibre du marché*.

Avant d’atteindre un niveau d’équilibre, le prix  $p$  peut être soumis à des fluctuations provoquées par des excès d’offre ( $O(p) > D(p)$ ) ou des excès de demande ( $D(p) > O(p)$ ) au cours du temps.

Afin de rendre compte de cette évolution, on note pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n$  la valeur du prix à l’instant  $n$ .

On suppose que la demande dépend de la valeur du prix selon la relation  $D_n = D(p_n)$  valable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Quant aux entreprises, elles adaptent à chaque instant  $n \in \mathbb{N}$ , la quantité offerte  $O_n$  à l’instant  $n$  à un *prix anticipé* à l’instant  $(n-1)$ , noté  $\hat{p}_n$ , selon la relation  $O_n = O(\hat{p}_n)$ , où  $\hat{p}_0$  peut être interprété comme un prix d’étude de marché.

On suppose qu’à chaque instant, l’offre est égale à la demande, c’est à dire : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $O_n = D_n$ .

Dans toute cette partie, on considère quatre paramètres réels strictement positifs  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ , avec  $a > d$ , et on suppose que les fonctions  $D$  et  $O$  sont définies sur  $\mathbb{R}_+$  par :  $D(p) = a - bp$  et  $O(p) = cp + d$ .

Par suite, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D(p_n) = a - bp_n$  et  $O(\hat{p}_n) = c\hat{p}_n + d$ .

1. Dans cette question uniquement, les réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  ont les valeurs suivantes :  $a = 40$ ,  $b = 8$ ,  $c = 2$  et  $d = 20$ .

On suppose que  $p_0$  et  $p_1$  sont donnés et que pour tout entier  $n \geq 2$ , on a :  $\hat{p}_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$

- a) Établir l’existence et l’unicité d’un prix d’équilibre  $p^*$ . Calculer  $p^*$ .
  - b) Montrer que pour tout  $n \geq 2$ , on a :  $p_n = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2}$ .
  - c) Écrire une fonction Pascal récursive, d’en-tête `function p(p0,p1 :real ;n :integer) :real ;` qui renvoie, pour  $p_0$ ,  $p_1$  et  $n$  fixés, le terme  $p_n$ .
  - d) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n = p_n - p^*$ . Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire d’ordre 2.
  - e) Calculer les solutions  $r_1$  et  $r_2$  de l’équation caractéristique de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - f) Exprimer pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n$  en fonction de  $n$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $p_0$ ,  $p_1$  et  $p^*$ .
  - g) Montrer que la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Quelle est sa limite ? Interpréter.
2. Soit  $\beta$  un paramètre réel vérifiant  $0 < \beta \leq 1$ . On suppose que le prix  $p_0$  est donné et que les anticipations de prix sont adaptatives, c’est-à-dire que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :  $\hat{p}_n = \hat{p}_{n-1} + \beta(p_{n-1} - \hat{p}_{n-1})$ .
    - a) Exprimer pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le prix courant  $p_n$  en fonction du prix anticipé  $\hat{p}_n$ .
    - b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le prix  $p_n$  vérifie l’équation de récurrence suivante :

$$p_n = \left(1 - \beta \frac{b+c}{b}\right) p_{n-1} + \beta \frac{a-d}{b}$$

- c) Quel est le prix d’équilibre  $p^*$  ? Déterminer l’expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ ,  $p_0$ ,  $p^*$ ,  $b$ ,  $c$  et  $\beta$ .

- d) En supposant que  $p_0 \neq p^*$ , montrer que la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si :  $\frac{c}{b} < \frac{2}{\beta} - 1$ .  
Quelle est alors sa limite ?
- e) Étudier la convergence de la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque  $c < b$ .

## Partie II. Convexité du profit et prix aléatoire

3. Soit  $p$  un paramètre réel positif ou nul et  $h_p$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  donnée par :

$$h_p(x) = px - \frac{x^3}{3}$$

- a) Dresser le tableau de variation de  $h_p$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Préciser les limites aux bornes de l'intervalle de définition, les racines de l'équation  $h_p(x) = 0$  et la valeur maximale de  $h_p$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
- b) Tracer la courbe représentative de  $h_1$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

On considère une entreprise présente sur le marché d'un bien qui adapte son volume de production  $x \in \mathbb{R}_+$  à un niveau de prix  $p \in \mathbb{R}_+$  donné (par l'équilibre du marché) ou administré (par l'État).

On modélise le *coût total* de l'entreprise par une fonction  $F$  définie et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+$ , strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  ainsi que sa dérivée  $F'$ , telle que  $F(0) = F'(0) = 0$  et  $F(x)$  équivalent à  $sx^r$  avec  $s > 0$  et  $r > 1$ , lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . On note  $F''$  la dérivée seconde de  $F$  et on suppose que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $F''(x) > 0$ .

Soit  $\Pi_p$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  à valeurs réelles telle que :  $\Pi_p(x) = px - F(x)$

4. a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = +\infty$  et que  $F'$  admet sur  $\mathbb{R}_+$  une fonction réciproque, que l'on note  $S$ , dont on précisera l'ensemble de définition (*la fonction  $S$  est la fonction d'offre de l'entreprise*).
- b) Montrer que  $\Pi_p$  est concave sur  $\mathbb{R}_+$  et admet sur  $\mathbb{R}_+$  un maximum atteint en un seul point.
5. Soit  $M$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  à valeurs réelles telle que :  $M(p) = \max_{x \in \mathbb{R}_+} \Pi_p(x)$  (*la fonction  $M$  est la fonction de profit de l'entreprise*).
- a) Pour tout  $p \in \mathbb{R}_+$ , exprimer  $M(p)$  à l'aide de  $p$ ,  $F$  et  $S$ .
- b) Montrer que la fonction  $M$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et calculer sa dérivée  $M'$ .
- c) Montrer que la fonction  $M$  est convexe et croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .
6. On suppose que le prix  $p$  est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , à valeurs dans l'ensemble  $\{p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(k)}\} \subset \mathbb{R}_+$ , où  $k$  est un entier fixé supérieur ou égal à 2.
- a) Montrer que pour tout  $i \in [1, k]$  et pour tout  $y \in \mathbb{R}_+$ , on a :  $M(p^{(i)}) - M(y) \geq M'(y)(p^{(i)} - y)$
- b) En déduire pour tout  $y \in \mathbb{R}_+$ , l'inégalité :  $E(M(p)) \geq M(y) + M'(y)(E(p) - y)$
- c) Établir l'inégalité  $E(M(p)) \geq M(E(p))$ . Quelle conclusion peut-on en tirer ?
7. On suppose que le prix  $p$  est une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , dont une densité  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}_-$  et continue sur  $\mathbb{R}_+$ . On suppose l'existence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} M(x) f(x) dx$ . Justifier que  $p$  admet une espérance et montrer que :  $E(M(p)) \geq M(E(p))$ .

## Partie III. Espérance conditionnelle

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , à valeurs dans  $\{x_1, x_2, \dots, x_q\} \subset \mathbb{R}$  et  $\{y_1, y_2, \dots, y_r\} \subset \mathbb{R}$ , respectivement ( $q \geq 2$  et  $r \geq 2$ ).

On suppose que pour tout  $i \in [1, q]$ , on a  $P([X = x_i]) > 0$ .

Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\{x_1, x_2, \dots, x_q\}$  à valeurs réelles telle que :

$$\forall i \in [1, q], \quad \varphi(x_i) = \sum_{j=1}^r y_j P_{[X=x_i]}([Y = y_j]).$$

Ainsi, pour tout  $i \in [1, q]$ ,  $\varphi(x_i)$  est l'*espérance conditionnelle* de  $Y$  sachant l'évènement  $[X = x_i]$ , notée également  $E(Y | [X = x_i])$ . On définit alors une variable  $Z$  sur  $\Omega$  en posant pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $Z(\omega) = E(Y | [X = X(\omega)])$  et on note  $Z = E(Y | X) = \varphi(X)$ .

8. a) On suppose que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. Déterminer la variable aléatoire  $E(Y | X)$ .
- b) Quelle est la variable aléatoire  $E(X | X)$ ?
- c) On suppose que les réels  $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_q)$  sont deux à deux distincts.  
Déterminer pour tout  $i \in [[1, q]]$ ,  $P([E(Y | X) = \varphi(x_1)])$
- d) Montrer que  $E(E(Y | X)) = E(Y)$  (on pourra appliquer le théorème du transfert).
- e) Soit les réels  $\lambda, \rho$  et  $\mu$ . Exprimer  $E(\lambda Y + \rho X + \mu | X)$  en fonction de  $\lambda, \rho, \mu, X$  et  $E(Y | X)$ .

#### Partie IV. Anticipation naïve et anticipation rationnelle

Dans cette partie, on suppose qu'à chaque instant  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), le prix  $p_n$  d'un certain bien est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , à valeurs dans  $\{p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(k)}\} \subset \mathbb{R}_+$ , où  $k$  est un entier fixé supérieur ou égal à 2. On suppose que la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constituée de variables aléatoires de même loi et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $i \in [[1, k]]$  on a :  $P([p_n = p^{(i)}]) > 0$ .

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires discrètes finies indépendantes et de même loi, telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $E(u_n) = 0$  et  $V(u_n) = \sigma^2 > 0$ .

On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les variables aléatoires  $u_n$  et  $p_{n-1}$  sont indépendantes.

Soit  $\theta$  et  $p^*$  deux paramètres réels vérifiant  $-1 < \theta < 1$  et  $p^* \geq 0$ .

On suppose que  $p_0$  est de la forme  $p_0 = lu_0 + m$ , où  $l$  et  $m$  sont des constantes réelles, et que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $p_n = \theta p_{n-1} + (1 - \theta)p^* + u_n$ . (1)

9. a) Calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E(p_n)$  et  $V(p_n)$ . Déterminer les constantes  $l$  et  $m$  en fonction de  $\theta$  et  $p^*$
- b) Calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la covariance  $Cov(p_n, p_{n-1})$   
Que représente le paramètre  $\theta$  pour le couple de variables  $(p_n, p_{n-1})$ ?
10. Déterminer la variable aléatoire  $E(p_n | p_{n-1})$
11. On rappelle que l'on note  $\hat{p}_n$  l'anticipation de  $p_n$  faite à l'instant  $(n - 1)$ .  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $e_n = p_n - \hat{p}_n$  (erreur d'anticipation à l'instant  $n$ ).
- a) On suppose dans cette question que les anticipations de prix sont *naïves*, c'est à dire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\hat{p}_n = p_{n-1}$ .  
Déterminer  $E(\hat{p}_n | p_{n-1})$ . Calculer  $E(\hat{p}_n)$ ,  $V(\hat{p}_n)$ ,  $E(e_n)$  et  $V(e_n)$ .
- b) On suppose dans cette question que les anticipations de prix sont *rationnelles*, ce qui se traduit dans le cadre du modèle (1) par :  $\hat{p}_n = E(p_n | p_{n-1})$ .  
Déterminer  $E(\hat{p}_n | p_{n-1})$ . Calculer  $E(\hat{p}_n)$ ,  $V(\hat{p}_n)$ ,  $E(e_n)$  et  $V(e_n)$ .
- c) Comparer les deux types d'anticipation *naïve* et *rationnelle*.