Maths Ecricome mai 2000
Voie Economique

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé. On note f une densité de X, F sa fonction de répartition. On fait les trois hypothèses suivantes:

1. (a) i. Si t appartient à $]-\infty, 0[$, $f(t) = 0$.
   ii. Si t appartient à $[0, +\infty[$, $f(t)$ est strictement positif.
   iii. f est continue sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution unique sur $]0, +\infty[$.
   Cet unique réel, que l'on notera m, sera appelé **médiane** de X.

3. Dans cette question, on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre 1.
   Montrer que X satisfait aux hypothèses du début de l'exercice et déterminer la médiane de X.

4. On suppose dans cette question que la densité de X est donnée sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = t\, e^{-t}$ et sur $]-\infty, 0[$ par $f(t) = 0$.

   (a) Vérifier que f satisfait aux hypothèses du début de l'exercice.

   (b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

   (c) Montrer, sans chercher à la calculer, que la médiane m de X vérifie $1 \leq m \leq 2$.
   (On donne $6 < e^2 < 9$).
   On se propose, dans la suite de cette question, de calculer une valeur approchée de m. On introduit pour cela la fonction g définie sur $[1, 2]$ par $g(x) = \ln(2x + 2)$, fonction qui va permettre de construire une suite convergeant vers m.

   (d) Montrer que $g(m) = m$.

   (e) Montrer que si x appartient à $[1, 2]$ alors $g(x)$ appartient à $[1, 2]$ et
   $$|g(x) - m| \leq \frac{1}{2}|x - m|$$

   (f) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour $n > 0$ par $u_n = g(u_{n-1})$.
   Montrer que $|u_n - m| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

(g) Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

5. On revient maintenant au cas général et on suppose que la variable X admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$. On note toujours m la médiane de X.

   (a) Montrer qu'on a les inégalités :

   $$V(X) \geq \int_0^m (t-E(X))^2 \, f(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad V(X) \geq \int_m^{+\infty} (t-E(X))^2 \, f(t)\, dt$$

   (b) En distinguant les cas $m \leq E(X)$ et $m > E(X)$, montrer que:

   $$|m - E(X)| \leq \sqrt{2V(X)}$$

Exercice 2

E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par f l'application qui à un polynôme P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(P)(x) = P(x+1) + P(x)$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.

2) On nore $\mathcal{B}$ la base usuelle de E constituée, dans cet ordre des quatre polynômes 1, X, X^2, X^3.

Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3) Montrer que f est bijectif.

4) Calculer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

5) Soit P un élément de E défini par : $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$.

a: Expliciter en fonction des réels a_0, a_1, a_2, a_3 le polynôme $Q = f^{-1}(P)$.

b: On considère pour tout entier strictement positif n la somme

$$S(n) = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k P(k)$$

Exprimer simplement $S(n)$ en fonction de $(-1)^n$, $Q(n+1)$ et $Q(1)$.

c: Expliciter alors la valeur de $S(n)$ en fonction de n, a_0, a_1, a_2, a_3

Exercice 3

T est l'ensemble des couples (x, y) de réels solutions du système d'inéquations

$$x \geq \frac{1}{4} \quad y \geq \frac{1}{4} \quad x + y \leq \frac{3}{4}$$

On note T' l' "intérieur" de T à savoir l'ensemble des couples (x, y) solutions du système d'inéquations

$$x > \frac{1}{4} \quad y > \frac{1}{4} \quad x + y < \frac{3}{4}$$

Soit f la fonction définie sur T par : $\quad f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{x + y}$

1) Représenter sur un même graphique T et T'.

2) On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

a: Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de la fonction f.

b: Montrer que f n'admet pas d'extremum local (et donc a fortiori absolu) sur T'.

3) Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple (x, y) de T:

$$2 \leq f(x, y) \leq \frac{16}{3}$$

On considère une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u).
On suppose que $\quad p \geq \dfrac{1}{4} \quad r \geq \dfrac{1}{4} \quad u \geq \dfrac{1}{4} \quad$ et que $\quad p + r + u = 1$.

On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement: "Tirer une boule blanche (respectivement rouge, verte) au $n^{ième}$ tirage".
On appelle X (resp Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première blanche (resp rouge).
On définit alors la variable $D = |X - Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

4) Déterminer la loi de X. Faire de même pour Y.

5) Soit i et j des entiers naturels non nuls. En distinguant les cas $i = j$, $i < j$ et $i > j$, exprimer l'événement $(X = i) \cap (Y = j)$ à l'aide des événements décrits dans l'énoncé.
En déduire la loi du couple (X, Y).

6) Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

7) Soit k un entier naturel non nul, montrer l'égalité:

$$P(D = k) = \frac{pr}{p + r}\left[(1 - p)^{k-1} + (1 - r)^{k-1}\right]$$

8) Montrer que D admet une espérance et que $E(D) = f(p, r)$. Encadrer alors $E(D)$.