

ECRICOME 2003

option ECONOMIQUE

EXERCICE 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcul des puissances de A

- Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de l'endomorphisme f , avec $\lambda_1 < \lambda_2$
- La matrice A est-elle inversible ? (On ne demande pas la matrice A^{-1}).
- Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces propres de f .
- Justifier que f n'est pas diagonalisable.
- Déterminer le vecteur \vec{u}_1 de E vérifiant :
 - \vec{u}_1 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_1
 - la première composante de \vec{u}_1 est 1.
- Déterminer le vecteur \vec{u}_2 de E vérifiant :
 - \vec{u}_2 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_2
 - la deuxième composante de \vec{u}_2 est 1.
- Soit $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de E .
- Déterminer la matrice de passage P de la la base \mathcal{B} dans la base \mathcal{C} puis la matrice de passage de la base \mathcal{C} à la base \mathcal{B} .
- Montrer que : $f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$
- En déduire que la matrice de f dans la base \mathcal{C} est la matrice:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Rappeler la relation matricielle entre A et T .
- Prouver que pour tout élément n de \mathbb{N}^* il existe un réel α_n tel que :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

On donnera le réel α_1 ainsi qu'une relation entre α_{n+1} et α_n

13. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = n2^{n-1}$$

En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n .

2. Matrices commutant avec A .

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désignant l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, on considère le sous-ensemble $C(A)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices M telles que :

$$AM = MA$$

1. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

2. Pour M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on pose $M' = P^{-1}MP$.

Montrer que :

$$AM = MA \iff TM' = M'T$$

(T est définie dans la question 1.10)

3. Montrer qu'une matrice M' de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $TM' = M'T$ si et seulement si M' est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois réels.

4. En déduire que M appartient à $C(A)$ si et seulement si il existe des réels a, b, c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} -a + 2b & 2a - 2b & -a + b + 2c \\ -a + b & 2a - b & -a + b + c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

5. Déterminer alors une base de $C(A)$ ainsi que la dimension de $C(A)$.

EXERCICE 2

On considère les fonctions ch et sh définies sur \mathbb{R} par :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ainsi que la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On s'intéresse dans cet exercice à la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Etude des fonctions ch, sh, et f .

1. Etudier la parité des fonctions ch et sh.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction sh, puis en déduire le signe de $\operatorname{sh}(x)$ pour x appartenant à \mathbb{R} .

3. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\text{sh}(x)$. En déduire l'allure de la courbe représentative de la fonction sh en $+\infty$.
4. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R}
5. Etudier les variations de la fonction ch .
6. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) > \text{sh}(x)$$

7. Donner sur un même graphique l'allure des courbes représentatives des fonctions ch et sh .
8. Etudier la parité de la fonction f .
9. Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction sh .
10. En déduire que la fonction f est continue en 0, dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
11. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$
12. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad h(x) = \text{sh}(x) - x\text{ch}(x)$$

Etudier les variations de h , puis en déduire le signe de $h(x)$.

13. Déterminer les variations de f sur \mathbb{R}^+ et donner l'allure de la courbe représentative de la fonction f . (On ne cherchera pas les points d'inflexion).

2. Etude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On donne :

$$\begin{aligned} f(0.8) &\simeq 0.9, & f(1) &\simeq 0.85, \\ \text{sh}(0.6) &\simeq 0.64, & \text{sh}(0.8) &\simeq 0.89, & \text{sh}(1) &\simeq 1.18, & \text{sh}(1.2) &\simeq 1.51 \end{aligned}$$

1. Justifier que $f([0.8, 1]) \subset [0.8, 1]$, puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0.8, 1]$$

2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} (on pourra utiliser la question 1.4, sans chercher à déterminer α).
3. Donner un encadrement de α et justifier que :

$$\forall x \in [0.8, 1], \quad \frac{h(1)}{\text{sh}(0.8)} \leq f'(x) \leq \frac{h(0.8)}{\text{sh}(1)}$$

4. On donne :

$$\frac{h(1)}{\text{sh}(0.8)} \simeq -0.47 \quad \text{et} \quad \frac{h(0.8)}{\text{sh}(1)} \simeq -0.13$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq 0.5 |u_n - \alpha|$$

Puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq 0.2 (0.5)^n$$

5. En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.
6. Ecrire un programme en Turbo-Pascal permettant de calculer et d'afficher u_{10}

EXERCICE 3

Sous diverses hypothèses, l'exercice étudie différentes situations probabilistes concernant une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.

Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.

Partie 1.

On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaîne A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaîne B soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A ".
2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.

On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

- a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y .
- b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{Y=n}(X = k)$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).
- c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i \in \mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Partie 2.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(t) = \frac{2}{(1+t)^3} & \text{si } t \geq 0 \\ f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire Z
2. Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z .
3. Justifier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3} dt$$

La calculer en effectuant le changement de variable $u = t + 1$.

4. Prouver que Z admet une espérance et la déterminer.
5. Z admet-elle une variance ?

6. Dans cette partie, on suppose que le temps de fabrication, exprimé en minutes d'un pièce par la chaîne A (respectivement B) est une variable aléatoire Z_1 (respectivement Z_2) où Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que Z .

a) On considère les événements :

C = "le temps de fabrication d'une pièce sur la chaîne B est supérieur à 2 minutes".

D = "le temps de fabrication d'une pièce sur la chaîne B est inférieur à 3 minutes".

Calculer les probabilités suivantes : $P(C)$, $P(D)$, $P(D/C)$.

b) On note $T = \max(Z_1, Z_2)$ et G_T la fonction de répartition de T .

i. Exprimer l'événement $(T \leq x)$ en fonction des événements $(Z_1 \leq x)$ et $(Z_2 \leq x)$

ii. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_T(x) = [F_Z(x)]^2$$

c) En déduire que T est une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

Partie 3.

On suppose maintenant que pour qu'une pièce soit terminée, il faut qu'elle passe par la chaîne A puis par la chaîne B .

Le temps de passage exprimé en minutes pour un objet sur la chaîne A est une variable aléatoire M suivant une loi exponentielle de paramètre 2.

Le temps de passage exprimé en minutes pour un objet sur la chaîne B est une variable aléatoire N suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$

Les variables M et N sont indépendantes.

1. Rappeler l'expression d'une densité de probabilité v de M et d'une densité w de N .

2. On note S la variable aléatoire représentant le temps total de fabrication d'une pièce.

Exprimer S en fonction de M et de N et déterminer le temps moyen de fabrication d'une pièce.