

# ECRICOME Eco 2008

## Exercice 1

A tout couple  $(a, b)$  de deux réels, on associe la matrice  $M(a, b)$  définie par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a + 2b & -b & -2b \\ 2b & a - b & -4b \\ -b & b & a + 3b \end{pmatrix}$$

On désigne par  $E$  l'ensemble des matrices  $M(a, b)$  où  $a$  et  $b$  décrivent  $\mathbb{R}$ .  
Ainsi :

$$E = \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note  $I$  la matrice identité  $M(1, 0)$  et  $A$  la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  des matrices carrées d'ordre 3.
2. Donner une base de  $E$  ainsi que sa dimension.
3. Vérifier que les réels 1 et 2 sont deux valeurs propres de  $A$ .  
Donner les dimensions des sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.  
En déduire que  $A$  est diagonalisable.
4. Déterminer deux matrices  $P$  et  $D$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifiant les conditions suivantes :
  - $P$  est inversible et ses trois éléments diagonaux sont égaux à 1.
  - $D = (d_{i,j})$  est diagonale avec  $d_{1,1} = 2$
  - $D = P^{-1}AP$Donner l'expression de la matrice  $P^{-1}$ .
5. Prouver que la matrice  $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$  est une matrice diagonale.
6. Montrer que  $M(a, b)$  est inversible si et seulement si  $D(a, b)$  est inversible.  
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur  $a$  et  $b$  pour que  $M(a, b)$  soit inversible.

7. Prouver que  $[M(a, b)]^2 = I$  si et seulement si  $[D(a, b)]^2 = I$   
En déduire l'existence de quatre matrices  $M(a, b)$  que l'on déterminera,  
vérifiant  
 $[M(a, b)]^2 = I$ .

## Exercice 2

On considère les fonctions suivantes :  $g(x, y) = 1 + \ln(x + y)$  (fonction des variables  $x$  et  $y$ )

et pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\begin{cases} f_p(x) = g(x, p) \\ h_p(x) = x - f_p(x) \end{cases}$  (famille de fonctions de la variable réelle  $x$ ).

On note  $(C_p)$  la courbe représentative de la fonction  $f_p$ .

### 1. Recherche d'extremum éventuel de la fonction $g$

- Représenter, relativement à un repère orthonormé du plan, le domaine de définition  $D$  de la fonction  $g$ . On hachurera  $D$ . On admet que cet ensemble de définition est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .
- Déterminer sur  $D$  les dérivées partielles premières de  $g$ . La fonction  $g$  admet-elle un extremum sur  $D$  ?

### 2. Etude de la fonction $f_1$

- Donner le domaine de définition de  $f_1$ .
- Déterminer le développement limité en 0, à l'ordre 2, de la fonction  $f_1$ .
- En déduire une équation de la tangente à  $C_1$  au point d'abscisse 0, et la position locale de la courbe  $C_1$  par rapport à cette tangente.
- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ . Donner une interprétation graphique de ces limites.

### 3. Etude d'une suite $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$

- Montrer que l'équation  $f_p(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha_p$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . (On ne cherchera pas à calculer  $\alpha_p$ ).
- Déterminer le signe de  $h_p(\alpha_{p+1})$  et en déduire que la suite  $(\alpha_p)_{p \geq 1}$  est monotone.
- Prouver que l'on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_p \geq 1 + \ln(p)$$

Quel est le comportement de la suite  $(\alpha_p)_{p \geq 1}$  lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$  ?

4. **Valeur approchée de  $\alpha_1$**

On admet que le réel  $\alpha_1$  appartient à l'intervalle  $[1; 3]$ . On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

- (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n : u_n \geq 1$ .
- (b) Appliquer à  $f_1$  l'inégalité des accroissements finis entre  $\alpha_1$  et  $u_n$  et en déduire que pour tout entier naturel  $n$  :

$$|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

- (c) Déterminer un entier naturel  $n_0$  de telle sorte que si  $n$  est supérieur ou égal à  $n_0$  alors  $|u_n - \alpha_1|$  est inférieur ou égal à  $10^{-4}$ .
- (d) Ecrire un programme en langage Pascal permettant d'obtenir les valeurs de  $n_0$  et de  $u_{n_0}$

### Exercice 3

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude de trois jeux présents dans une fête foraine.

#### 1. Premier jeu

Pour ce premier jeu de hasard, la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité  $\frac{1}{10}$ , perdue avec la probabilité  $\frac{9}{10}$ .

Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes. Une personne décide de jouer  $N$  parties ( $N \geq 2$ ). On note  $X_N$  la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et  $Y_N$  la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

- (a) Donner la loi de  $X_N$  ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable.
- (b) Exprimer  $Y_N$  en fonction de  $X_N$ . En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de  $Y_N$ .
- (c) La personne décide de jouer 60 parties. On admet que l'on peut approcher  $X_{60}$  par une loi de Poisson.
  - i. Donner le paramètre de cette loi de Poisson.
  - ii. A l'issue des 60 parties, quelle est la probabilité que le joueur perde moins de 50 euros ? (cette probabilité sera impérativement calculée en utilisant l'annexe située à la fin de l'exercice)

#### 2. Deuxième jeu

Pour ce deuxième jeu, le participant lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre  $O$  et de rayon 1. Pour  $1 \leq i \leq 3$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact de centre  $O$  de la  $i^{\text{ème}}$  fléchette. Ces trois variables aléatoires  $X_1, X_2, X_3$  de même loi, indépendantes, sont des variables à densité dont une densité  $f$  est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le joueur gagne si la distance la plus proche du centre  $O$  se trouve à une distance inférieure à  $\frac{1}{5}$  de ce centre. Enfin, on note  $M$  la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances  $X_1, X_2, X_3$ .

- (a) Vérifier que  $f$  est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X_i$ .
- (b) Déterminer l'espérance de  $X_i$ .
- (c) Exprimer l'événement  $[M > t]$  à l'aide des événements  $[X_1 > t]$ ,  $[X_2 > t]$ ,  $[X_3 > t]$  pour tout réel  $t$ .
- (d) Déterminer la fonction de répartition  $F_M$  de  $M$  et montrer que  $M$  est une variable à densité et en donner une densité notée  $f_M$ .
- (e) Quelle est la probabilité de l'événement  $G$  = "le joueur gagne la partie" ?

### 3. Troisième jeu

Pour ce dernier jeu, le participant lance successivement  $n$  boules au hasard dans  $N$  cases numérotées de 1 à  $N$  avec  $N \geq 2$ . On suppose que les différents lancers de boules sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule quelconque tombe dans une case donnée est  $\frac{1}{N}$ . Une case peut contenir plusieurs boules.

Le gain étant fonction du nombre de cases atteintes, on étudie la variable aléatoire  $T_n$  égale au nombre de cases non vides à l'issue des  $n$  lancers.

- (a) Déterminer en fonction de  $n$  et de  $N$  les valeurs prises par  $T_n$ .
- (b) Donner les lois de  $T_1$  et  $T_2$ .
- (c) Déterminer, lorsque  $n \geq 2$ , la probabilité des événements  $[T_n = 1]$ ,  $[T_n = 2]$ ,  $[T_n = n]$ . (pour la dernière probabilité on distinguera deux cas  $n > N$  et  $n \leq N$ ).
- (d) A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier l'égalité (I) suivante, pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ ,

$$(I) \quad P([T_{n+1} = k]) = \frac{k}{N}P([T_n = k]) + \frac{N - k + 1}{N}P([T_n = k-1])$$

- (e) Afin de calculer l'espérance  $E(T_n)$  de la variable  $T_n$ , on considère la fonction polynomiale  $G_n$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \sum_{k=1}^n P([T_n = k])x^k$$

- i. Quelle est la valeur de  $G_n(1)$  ?
- ii. Exprimer  $E(T_n)$  en fonction de  $G'_n(1)$ .
- iii. En utilisant la relation (I), montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G'_N(x) + xG_n(x)$$

- iv. En dérivant l'expression précédente, en déduire que :

$$E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)E(T_n) + 1$$

- v. Prouver enfin que l'espérance de la variable  $T_n$  est donnée par :

$$E(T_n) = N \left[ 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \right]$$

Table de Poisson donne les probabilités cumulées :  $\sum_{i=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$k$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$
0	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009
1	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073
2	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296
3	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818
4	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730
5	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007
6	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497
7	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987
8	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291
9	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305
10	0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015
11	0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467
12	1,0000	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730
13		0,9999	0,9993	0,9964	0,9872
14		1,0000	0,9998	0,9986	0,9943
15			0,9999	0,9995	0,9976
16			1,0000	0,9998	0,9990
17				0,9999	0,9996
18				1,0000	0,9999
19					1,0000
20					