ECRICOME Eco 2010

EXERCICE 1.

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la
base ,$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$est donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que la fonction polynômiale Q qui à tout réel x associe le réel :

$$Q(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a$$

I. Recherche des valeurs propres de f_a.

1. Montrer que le réel λ est une valeur propre de f_a si et seulement si λ est racine du polynôme Q.
2. Vérifier que le réel $\lambda = 1$ est racine de Q.
3. En déduire les racines de Q ainsi que leur nombre en fonction de a.
4. Lorsque $a = 1$, l'endomorphisme f_1 est-il diagonalisable ?

II. Réduction de la matrice M_a.

Dans toute la suite de l'exercice on suppose a différent de 1.
Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par

$$\begin{cases} e'_1 = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 + e_2 \end{cases}$$

1. Prouver que $\mathcal{B}'$ est une base de E.

On note P_a la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

2. Montrer que e'_1 est un vecteur propre de f_a.
3. Vérifier que le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs e'_2 et e'_3 est stable par f_a c'est-à-dire :
$$f_a(F) \subset F$$
4. Donner l'expression de la matrice T_a de l'endomorphisme f_a dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$.
5. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
où, par convention, on pose $T_a^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

III. Etude d'une suite récurrente linéaire.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0 \\ \text{pour tout entier naturel } n : u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$$

1. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

2. Etablir par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

3. Donner l'expression matricielle de la matrice inverse de P_2 puis exprimer u_n en fonction de n.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

EXERCICE 2

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

I. Résolution de l'équation $\varphi(x) = 1$.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
   Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   Interpréter graphiquement cette limite.
3. Prouver que φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Dresser le tableau de variation de φ et y faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(3) \simeq 1,1$.
   Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que :

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$

6. Proposer un programme en Pascal permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}.

II. Une variable à densité.

Soit α le réel défini à la question **I.5.** On considère la variable aléatoire réelle X dont une densité de probabilité est donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq \alpha \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Montrer que X admet une espérance $E(X)$.
3. Démontrer que pour $x > \alpha$:
$$xf(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}$$
En déduire que l'espérance de X est donnée par :
$$E(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$
Donner un encadrement de $E(X)$ par deux entiers consécutifs.
4. La variable aléatoire réelle X admet-elle une variance ?

EXERCICE 3

Dans cet exercice, on étudie des situations probabilistes liées à un jeu de dés à six faces.
Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés.
On note :
– D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé
– E_1 l'événement : $(D_1 < D_2)$, E_2 l'événement : $(D_1 = D_2)$ et E_3 l'événement : $(D_1 > D_2)$
Lors d'une partie,
– si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,
– si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,
– si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

I. Etude de parties successives.

Soit n un entier naturel non nul. Le joueur joue successivement n parties.
Pour tout entier naturel $i \geq 1$, on note :
– X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la $i^{ème}$ partie ;
– Y_i le nombre de points marqués après i parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2 et E_3.
2. Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, déterminer la loi de la variable aléatoire X_i puis calculer son espérance et sa variance.
3. Trouver la loi de la variable aléatoire Y_1.
4. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y_2 ?
5. a) Préciser l'ensemble $Y_3(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y_3.
   b) Construire et remplir le tableau de la loi conjointe du couple (Y_2, Y_3).
   On justifiera précisément une valeur non nulle de ce tableau, les autres pouvant être données directement.
   c) En déduire la loi de la variable aléatoire Y_3.
6. a) Ecrire Y_n en fonction des variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n.
   En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y_n.
   b) En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points ?

II. Etude du temps d'attente.

Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il dépasse un nombre de points donné.
Plus précisément on note :
T_1 (respectivement T_2) la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur lorsque le total de ses points est supérieur ou égal à 1 (respectivement 2) pour la première fois (si cet événement se produit).
Par exemple si les points marqués par le joueur sont dans l'ordre :
Exemple 1 : 0 0 1 0 1 2 . . . .. alors $T_1 = 3$ et $T_2 = 5$.
Exemple 2 : 0 0 0 2 1 2.... alors $T_1 = 4$ et $T_2 = 4$.

1. a) Préciser l'ensemble $T_1(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_1 puis, pour tout k appartenant à $T_1(\Omega)$, donner la valeur de la probabilité $\mathrm{P}(T_1 = k)$.

   b) Donner la valeur de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire T_1.

2. a) Déterminer l'ensemble $T_2(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.

   b) Calculer les probabilités $\mathrm{P}(T_2 = 1)$ et $\mathrm{P}(T_2 = 2)$.

   c) Prouver que, pour $k \geq 3$, on a :

$$\mathrm{P}(T_2 = k) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} + (k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12}$$

   d) Ce résultat est-il valable pour $k = 1$ et $k = 2$?

   e) Etablir que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(T_2 = k) = 1$.

   f) Que peut-on en déduire pour l'événement « le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2 » ?

   g) Calculer $E(T_2)$.