European Entrepreneurial Learning

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2001

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 14 mai 2001 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On note $I = \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$.

Le but du problème est la construction d'une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et telle que :

$$\forall x \in I,\quad f(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left(f(t) + f(t^2)\right) \mathrm{d}t\,.$$

On considère les applications $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$, définies par $f_0 = 1$ (application constante égale à 1) et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\quad f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left(f_n(t) + f_n(t^2)\right) \mathrm{d}t\,.$$

1. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une application polynomiale.

b. Vérifier que, pour tout $x \in I$, $f_1(x) = 1 + x$ et $f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}$, et calculer $f_3(x)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction continue $|f_n - f_{n-1}|$ admet une borne supérieure sur I.
On note :

$$D_n = \sup_{x\in I} \left|f_n(x) - f_{n-1}(x)\right|.$$

a. Calculer D_1 et D_2.

b. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\quad \left|f_{n+1}(x) - f_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{2} D_n\,.$$

On pourra étudier séparément les cas $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ et $x \in \left[-\frac{1}{2}\,;0\right]$.

c. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

d. Établir la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} D_n$.

En déduire que, pour tout x fixé dans I, la série $\sum_{n \geqslant 1} \big(f_n(x) - f_{n-1}(x)\big)$ converge.

3. Établir que, pour tout x fixé dans I, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

On définit ainsi une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \operatorname{Sup}_{x \in I} |f_n(x)|$.

a. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; M_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} M_{n-1}.$$

b. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; M_n \leqslant 2.$$

c. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; \forall (x,y) \in I^2, \quad \big|f_n(x) - f_n(y)\big| \leqslant 2\,|x - y|.$$

5. **a.** Établir :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant 2\,|x - y|.$$

b. En déduire que f est continue sur I.

6. **a.** Établir :

$$\forall x \in I, \; \forall n \in \mathbb{N}^*, \; \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \big|f_{n+p}(x) - f_n(x)\big| \leqslant \frac{1}{2^n}\Big(1 - \frac{1}{2^p}\Big).$$

b. En déduire :

$$\forall x \in I, \; \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \big|f(x) - f_n(x)\big| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

7. En déduire :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x \big(f(t) + f(t^2)\big)\,\mathrm{d}t.$$

DEUXIÈME PROBLÈME

Rappel :

Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $z^n = 1$, d'inconnue z appartenant à $\mathbb{C}$, admet exactement n racines complexes distinctes qui sont :

$$1,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}, \dots,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\theta} \text{ avec } \theta = \frac{2\pi}{n}.$$

Définitions :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

- On note id_E l'application identique de E.
- Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$, et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p s'il existe un élément x_0 de E vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} \star & f^p(x_0) = x_0, \\ \star & \text{la famille } \big(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\big) \text{ est génératrice de } E, \\ \star & \text{la famille } \big(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\big) \text{ est constituée d'éléments deux à deux distincts.} \end{cases}$$

La famille $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est alors appelée un cycle de f.

Partie I : Etude d'un exemple

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $\big(e_1,\ f(e_1),\ f^2(e_1)\big)$ est une base de E et déterminer la matrice associée à f relativement à cette base.

2. Montrer que f est cyclique d'ordre 4 et que $\big(e_1,\ f(e_1),\ f^2(e_1),\ f^3(e_1)\big)$ est un cycle de f.

3. Montrer que $f^4 = \mathrm{id}_E$.

4. Montrer que f est diagonalisable en déterminant une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Partie II : Cas général

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, et on considère un endomorphisme f de E cyclique d'ordre p.
Soit $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ un cycle de f.

1. Montrer : $p \geqslant n$.

2. Montrer que $f^p = \mathrm{id}_E$. En déduire que f est bijective.

3. On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\big)$ est libre.

a. Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$.

b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à m, le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$.

c. En déduire que $m = n$ et que la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E.

4. On note $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_{n-1}$ les n nombres complexes tels que

$$f^n(x_0) = a_0\, x_0 + a_1\, f(x_0) + a_2\, f^2(x_0) + \cdots + a_{n-1}\, f^{n-1}(x_0).$$

a. On considère l'endomorphisme g de E défini par $g = a_0\,\mathrm{id}_E + a_1\, f + a_2\, f^2 + \cdots + a_{n-1}\, f^{n-1}$.
Montrer : $\forall\, k \in \mathbb{N},\quad g\big(f^k(x_0)\big) = f^{n+k}(x_0)$.
En déduire : $f^n = a_0\,\mathrm{id}_E + a_1\, f + a_2\, f^2 + \cdots + a_{n-1}\, f^{n-1}$.

b. Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ à l'aide des coefficients $a_0,\ a_1, \ldots, a_{n-1}$.

c. Montrer : $\forall\, \lambda \in \mathbb{C},\quad \mathrm{rg}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \geqslant n - 1$.
En déduire que les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.

5. On suppose dans cette question que f est cyclique d'ordre n (et $\dim(E) = n$).
Soit $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ un cycle de f.

a. Montrer que si un nombre complexe λ est valeur propre de f, alors $\lambda^n = 1$.

b. Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$.

c. Montrer que f est diagonalisable en déterminant une base de E constituée de vecteurs propres de f.