



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE ÉPREUVE :

Concepteur : EM LYON

295

EML_MATS

1^{ère} épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 9 mai 2005 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On considère la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1, T_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geq 2, \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel x ,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

PARTIE I : Étude de la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Calculer T_2 et T_3 .
- 2.a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , T_n est un polynôme de degré n , dont on déterminera le coefficient du terme de degré n .
 - b. Établir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).
3. Calculer, pour tout entier naturel n , $T_n(1)$ en fonction de n .
- 4.a. Établir, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0; \pi[$:

$$T_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $] -1; 1[$, que l'on explicitera.
- c. Établir, pour tout entier naturel non nul n :

$$T_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right).$$

- d. En déduire, pour tout entier naturel non nul n , la valeur de $\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n .

5. a. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0; \pi[$:

$$\sin^2 \theta T_n''(\cos \theta) - 3 \cos \theta T_n'(\cos \theta) + (n^2 + 2n) T_n(\cos \theta) = 0 .$$

Indication: On pourra dériver deux fois la fonction (nulle) :

$$\theta \longmapsto \sin \theta T_n(\cos \theta) - \sin(n+1)\theta .$$

b. En déduire, pour tout entier naturel n :

$$(X^2 - 1) T_n'' + 3X T_n' - (n^2 + 2n) T_n = 0 .$$

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel fixé tel que $n \geq 2$, et on note E l'espace vectoriel réel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n .

On note L l'application qui, à un polynôme P de E , associe le polynôme $L(P)$ défini par :

$$L(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP' .$$

PARTIE II : Étude de l'endomorphisme L

1. Montrer que L est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

2. a. Calculer $L(T_k)$ pour tout k de $\{0, 1, \dots, n\}$.

b. En déduire les valeurs propres de L et, pour chaque valeur propre de L , une base et la dimension du sous-espace propre associé.

PARTIE III : Étude d'un produit scalaire

Dans la suite du problème, on note φ l'application qui, à un couple (P, Q) de polynômes de E , associe le réel $\varphi(P, Q)$ défini par :

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x) Q(x) dx .$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

2. Démontrer, pour tous polynômes P, Q de E :

$$\varphi(L(P), Q) = \varphi(P, L(Q)) .$$

Indication: On pourra, à l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\varphi(L(P), Q) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} P'(x) Q'(x) dx .$$

3. Établir que $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de E .

DEUXIÈME PROBLÈME

PARTIE I : Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$

2. Établir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in]0; \pi]$:

$$\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it} = \frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} e^{i\frac{(m+1)t}{2}}, \text{ puis } \sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

3. Soit $u : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 .

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :
$$\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

4. Soit l'application $f : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin \frac{t}{2}}$ si $t \in]0; \pi]$, et $f(0) = -1$.

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi]$.

5.a. Montrer : $\forall m \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt.$$

b. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

PARTIE II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1.a. Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in ([0; +\infty[)^2$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$$
 convergent.

b. Montrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ converge.

On note S l'application définie, pour tout x de $[0; +\infty[$, par
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

3.a. Établir : $\forall (x, y) \in ([0; +\infty[)^2$, $S(y) - S(x) = (y - x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

b. En déduire : $\forall (x, y) \in ([0; +\infty[)^2$, $|S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y - x|$.

c. Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0; +\infty[$.

4.a. Montrer, pour tout couple (x, y) de $([0; +\infty[)^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

b. En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

c. Préciser les valeurs de $S'(0)$ et de $S'(1)$.

5. On admet que S est deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad S''(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}.$$

Montrer que S est concave.

6. Soit $x \in]0; +\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\forall t \in [1; +\infty[, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}.$$

a. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge et calculer sa valeur.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \varphi(n)$,

et en déduire : $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$.

c. Conclure : $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x$.

7.a. Dresser le tableau de variation de S , en précisant la limite de S en $+\infty$.

b. Tracer l'allure de la courbe représentative de S .