



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EM LYON

CODE ÉPREUVE :

295

EML\_MATS

1<sup>ère</sup> épreuve (option scientifique)

## MATHÉMATIQUES

Mardi 2 mai 2006 de 8 heures à 12 heures

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

### PROBLÈME I

#### Préliminaires

1.a. Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $t^n e^{-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ .

b. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$  est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$  converge.

On admet dans tout le problème :  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ .

On note, dans tout le problème, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ .

3.a. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$ .

b. Montrer, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :  $I_{2p+1} = 0$ .

c. Montrer, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :  $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$ .

## I Recherche d'extrémums locaux pour une fonction de deux variables réelles

On note  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , par :

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :  $F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2$ .
2. Calculer les dérivées partielles premières de  $F$  en tout point  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , et en déduire les trois points critiques de  $F$ .
3. Déterminer les extrémums locaux de  $F$ . En chacun de ceux-ci, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local, et préciser la valeur de  $F$  en chacun de ces points.

## II Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , les intégrales  $\int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt$  et  $\int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt$  convergent.

On note  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  les applications définies, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt.$$

2. Établir, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :  $|\sin(a + \lambda) - \sin a - \lambda \cos a| \leq \frac{\lambda^2}{2}$ .  
*On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

- 3.a. Démontrer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

b. En déduire que  $S$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $S'(x) = C(x)$ .

- 4.a. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)$ .

b. Montrer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $2e^{\frac{x^2}{4}}S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$ .

c. En déduire, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $S(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$  et  $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$ .

## III Obtention d'un développement limité

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} dt$  converge.

On note  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par :  $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} dt$ .

- 2.a. Montrer, pour tout  $u \in [0; +\infty[$  :  $0 \leq (1-u+u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3$ .

b. En déduire, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1-x^2t^2+x^4t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8}x^6$ .

3. Montrer que  $g$  admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

#### IV Nature d'une série

1. Montrer que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$  converge.

On note, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :  $u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$ .

2. Montrer, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :  $0 \leq u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!}$ .

En déduire que la série de terme général  $u_p$  est convergente.

### PROBLÈME II

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par  $I_n$  la matrice unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

On considère un  $n$ -uplet  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$  de  $\mathbb{C}^n$  et le polynôme  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ .

On note  $C$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  définie par  $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ .

On dit que  $C$  est la matrice compagnon du polynôme  $P$ .

On note  $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ .

On note  $\text{id}$  l'application identité de  $\mathbb{C}^n$  et on appelle  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  tel que  $C$  soit la matrice associée à  $f$  relativement à la base  $\mathcal{B}_0$ .

On note  $f^0 = \text{id}$  et, pour tout entier naturel  $k$ ,  $f^{k+1} = f^k \circ f$ .

1.a. Exprimer, pour tout  $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ ,  $f(e_i)$  en fonction de  $e_{i+1}$ .

b. En déduire :  $\forall j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, f^j(e_1) = e_{j+1}$  et  $f^n(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + \dots + a_{n-1}e_n)$ .

2. Soit  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  défini par  $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0\text{id}$ .

a. Vérifier :  $g(e_1) = 0$ .

b. Montrer :  $\forall i \in \mathbb{N}, g \circ f^i = f^i \circ g$ .

c. En déduire :  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, g(e_i) = 0$ .

d. Montrer que le polynôme  $P$  est annulateur de l'endomorphisme  $f$ .

*Application 1* : Déterminer une matrice  $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$  telle que  $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$ .

e. Établir que toutes les valeurs propres de  $C$  sont des racines du polynôme  $P$ .

**3.a.** Soit  $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$  un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ . On note  $Q(f)$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  défini par  $Q(f) = \alpha_0 \text{id} + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$ . Calculer  $Q(f)(e_1)$ .

**b.** En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à  $n - 1$  et annulateur de  $f$ .

**c.** Soit  $\lambda$  une racine du polynôme  $P$ .

Il existe donc un unique polynôme  $R \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P = (X - \lambda)R$ .

Vérifier que  $(f - \lambda \text{id}) \circ R(f) = \tilde{0}$ , où  $\tilde{0}$  est l'endomorphisme nul de  $\mathbb{C}^n$ .

**d.** Conclure que toutes les racines du polynôme  $P$  sont des valeurs propres de  $C$ .

**4.a.** Montrer que, pour tout nombre complexe  $x$ , la matrice  $(C - xI_n)$  est de rang supérieur ou égal à  $n - 1$ . En déduire que chaque sous-espace propre de  $C$  est de dimension 1.

**b.** En déduire que  $C$  est diagonalisable si et seulement si  $P$  admet  $n$  racines deux à deux distinctes.

**5.a.** *Application 2* : Montrer que la matrice  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  est diagonalisable.

**b.** *Application 3* : Montrer que la matrice  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  n'est pas diagonalisable.

**6.** On note  $B = {}^t C$  la matrice transposée de  $C$ .

**a.** Montrer que, pour tout nombre complexe  $t$ , la matrice  $(B - tI_n)$  est inversible si et seulement si la matrice  $(C - tI_n)$  est inversible.

**b.** En déduire que les matrices  $B$  et  $C$  ont les mêmes valeurs propres.

**c.** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $B$ . Déterminer une base du sous-espace propre de  $B$  associé à  $\lambda$ .

**d.** On suppose que le polynôme  $P$  admet  $n$  racines  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  deux à deux distinctes. Montrer que

$B$  est diagonalisable et en déduire que la matrice  $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$  est inversible.

**7.** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$  admettant  $n$  valeurs propres  $\mu_1, \dots, \mu_n$  deux à deux distinctes.

L'endomorphisme  $u$  est donc diagonalisable et on note  $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$  respectivement associés à  $\mu_1, \dots, \mu_n$ .

**a.** Soit  $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$ . Montrer que la famille  $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$  est une base de  $E$ .

**b.** Montrer qu'il existe un polynôme  $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1X + b_0$  tel que la matrice associée à  $u$  relativement à la base  $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$  soit la matrice compagnon du polynôme  $P_1$ .