CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Jeudi 16 Mai 2002, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le sujet ci-dessous vise à faire comprendre comment deux concurrents aux intérêts antagonistes, ne parvenant pas à fixer conjointement les stratégies de l'un et l'autre, conviennent de les tirer au sort avec des probabilités bien déterminées.

Notations :

Dans tout le problème n et p désignent des entiers naturels non nuls fixés et on pose $E_n = \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit de même E_p.

On note K_n l'ensemble $\left\{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_n, x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$ *; on définit de même K_p.*

Les espaces E_n et E_p sont munis de leur structure euclidienne canonique ; la norme euclidienne d'un vecteur X de E_n est notée $\|X\|$; le produit scalaire de deux vecteurs X et Y de E_n est noté $\langle X, Y\rangle$; on adopte la même notation pour les vecteurs de E_p.

Enfin, si k est un entier naturel non nul et si $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ est une famille finie de réels, on note $\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\operatorname{Max}} z_i$ ou $\underset{i}{\operatorname{Max}} z_i$ (respectivement $\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\operatorname{Min}} z_i$ ou $\underset{i}{\operatorname{Min}} z_i$) son plus grand (respectivement son plus petit) élément.

Plus généralement, si f est une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{A}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant un maximum (respectivement un minimum) sur E, on note $\underset{x\in\mathscr{A}}{\operatorname{Max}} f(x)$, (respectivement $\underset{x\in\mathscr{A}}{\operatorname{Min}} f(x)$), ce maximum, (respectivement ce minimum).

Partie I. Le plus petit des plus grands et le plus grand des plus petits

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice appartenant à $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On note $u(A) = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\operatorname{Min}} \left(\underset{1\leqslant j\leqslant p}{\operatorname{Max}} a_{ij}\right)$ et $v(A) = \underset{1\leqslant j\leqslant p}{\operatorname{Max}} \left(\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\operatorname{Min}} a_{ij}\right)$. Pour simplifier les notations, on pourra écrire ces expressions : $u(A) = \underset{i}{\operatorname{Min}}\underset{j}{\operatorname{Max}} a_{ij}$ et $v(A) = \underset{j}{\operatorname{Max}}\underset{i}{\operatorname{Min}} a_{ij}$.

1) Calculer $u(A)$ et $v(A)$ dans les deux cas suivants : $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2) On revient au cas général où $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour tout $j_0 \in \{1, \ldots, p\}$ et tout $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $s_{j_0} = \underset{i}{\operatorname{Min}}\, a_{ij_0}$ et $t_{i_0} = \underset{j}{\operatorname{Max}}\, a_{i_0 j}$.

a) Montrer que $s_{j_0} \leqslant t_{i_0}$ pour tout $j_0 \in \{1, \ldots, p\}$ et tout $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$.

b) En déduire que $v(A) \leqslant u(A)$.

3) On suppose que dans le préambule d'un programme écrit en Turbo-Pascal on a défini :

1) deux constantes entières : **n** et **p**,

2) un type : **matrice = array[1..n,1..p] of real;**

a) Écrire le corps de la fonction **function Max_ligne (A:matrice; i:integer): real;** cette fonction doit retourner le plus grand élément de la ligne **i** de la matrice **A**, c'est-à-dire la valeur $\underset{j}{\operatorname{Max}} A[i,j]$.

b) Écrire le corps de la fonction **function MinMax(A:matrice):real;** cette fonction doit retourner la valeur $u(A)$, définie plus haut; on pourra utiliser la fonction **Max_ligne.**

Partie II. Le minimum des maxima et le maximum des minima

1) Dans cette question on étudie un exemple. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$ puis $h(x,y) = {}^tXAY$.

a) Calculer $h(x,y)$ en fonction de x et y.

b) Déterminer suivant les valeurs de $x \in [0,1]$, le maximum de la fonction $y \longmapsto h(x,y)$ sur $[0,1]$; ce maximum sera noté $\lambda(x)$.

c) Déterminer la valeur minimum de $\lambda(x)$ lorsque x décrit $[0,1]$. Cette valeur sera notée $\alpha(A)$, elle est donc égale à $\underset{X\in K_2}{\operatorname{Min}}\left(\underset{Y\in K_2}{\operatorname{Max}}\ {}^tXAY\right)$, qu'on note plus simplement $\underset{X}{\operatorname{Min}}\,\underset{Y}{\operatorname{Max}}\ {}^tXAY$, étant entendu que X et Y décrivent K_2.

d) Par une méthode analogue, montrer l'existence de $\beta(A) = \underset{Y}{\operatorname{Max}}\,\underset{X}{\operatorname{Min}}\ {}^tXAY$ et donner sa valeur.

Dans la suite de cette partie $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *désigne une matrice appartenant à* $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On définit la fonction f *sur* $K_n \times K_p$ *par:* $\forall (X,Y) \in K_n \times K_p,\ f(X,Y) = {}^tXAY$.

Pour tout $j \in \{1,\ldots,p\}$ *et tout* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K_n$, *on pose* $\varphi_j(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i$, *puis* $\lambda(X) = \underset{1\leqslant j\leqslant p}{\operatorname{Max}} \varphi_j(X)$.

2) On considère des fonctions $g_1, \ldots, g_p$ définies et continues sur K_n, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) On pose $h = \operatorname{Max}(g_1, g_2)$, c'est-à-dire la fonction de K_n dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \operatorname{Max}\big(g_1(x), g_2(x)\big)$. Vérifier que $h = \dfrac{g_1 + g_2 + |g_1 - g_2|}{2}$ et en déduire que h est continue sur K_n.

b) Montrer que la fonction $g = \operatorname{Max}(g_1, \ldots, g_p)$ est continue sur K_n, g étant définie sur K_n par: $\forall x \in K_n,\ g(x) = \operatorname{Max}\big(g_1(x), \ldots, g_p(x)\big)$.

3) Dans cette question on considère un élément X appartenant à K_n.

a) Montrer que pour tout $Y \in K_p$, $f(X,Y) \leqslant \lambda(X)$.

b) Montrer qu'il existe $Y_X \in K_p$ tel que $f(X, Y_X) = \lambda(X)$.

c) En déduire qu'on peut poser: $\lambda(X) = \underset{Y\in K_p}{\operatorname{Max}} f(X,Y)$.

4) a) Montrer que K_n est borné.

(*On admet pour la suite du problème, que* K_n *est une partie fermée de* E_n)

b) Montrer que λ admet un minimum sur K_n.

Ce minimum est noté $\alpha(A)$ *et il est donc égal à* $\underset{X\in K_n}{\operatorname{Min}}\left(\underset{Y\in K_p}{\operatorname{Max}}\ {}^tXAY\right)$, *qu'on note plus simplement* $\underset{X}{\operatorname{Min}}\,\underset{Y}{\operatorname{Max}}\ {}^tXAY$.

On montrerait de manière analogue que le nombre $\underset{Y\in K_p}{\operatorname{Max}}\left(\underset{X\in K_n}{\operatorname{Min}}\ {}^tXAY\right)$ *existe. Il est noté* $\beta(A)$ *et on l'écrit plus simplement* $\underset{Y}{\operatorname{Max}}\,\underset{X}{\operatorname{Min}}\ {}^tXAY$.

5) a) Soit (X',Y) appartenant à $K_n \times K_p$. Montrer que $\underset{X\in K_n}{\operatorname{Min}} f(X,Y) \leqslant \lambda(X')$.

b) En déduire: $\beta(A) \leqslant \alpha(A)$.

6) *On dit qu'une partie non vide* $\mathscr{C}$ *de* E_p *est convexe lorsque:* $\forall (X,Y) \in \mathscr{C}^2,\ \forall m \in [0,1],\ mY + (1-m)X \in \mathscr{C}$.

On considère dans cette question une partie $\mathscr{C}$ de E_p convexe, fermée, bornée et non vide.

a) Montrer qu'il existe $W \in \mathscr{C}$, tel que: $\forall Y \in \mathscr{C},\ \|W\| \leqslant \|Y\|$.

b) Soit Y appartenant à $\mathscr{C}$, on pose pour tout $m \in [0,1]$: $Y_m = (1-m)W + mY$.

- Montrer que: $\forall m \in]0,1[,\ \langle W, Y\rangle \geqslant \dfrac{2-m}{2(1-m)}\|W\|^2 - \dfrac{m}{2(1-m)}\|Y\|^2$.

On rappelle que $\langle W, Y\rangle$ $(= {}^tWY)$ désigne le produit scalaire de W et Y.

- En déduire que: $\langle W, Y\rangle \geqslant \|W\|^2$.

7) Dans cette question et jusqu'à la fin de cette partie on considère l'ensemble:
$$\mathscr{C} = \left\{m\ {}^tAX + (1-m)\ Y,\ X \in K_n,\ Y \in K_p,\ m \in [0,1]\right\}$$

a) Montrer que K_n est une partie convexe de E_n.

b) Montrer que $\mathscr{C}$ est une partie convexe et bornée de E_p.

On admet pour la suite que $\mathscr{C}$ est une partie fermée de E_p.

8) On suppose dans cette question que le vecteur nul appartient à $\mathscr{C}$.

a) Montrer qu'il existe $X_0 \in K_n$, $Y_0 \in K_p$ et un réel $\mu \leqslant 0$ tels que: ${}^tAX_0 = \mu Y_0$.

b) Déterminer le signe de ${}^tX_0AY$ pour tout $Y \in K_p$.

c) Déterminer le signe de $\alpha(A)$.

9) Dans cette question on suppose que le vecteur nul n'appartient pas à $\mathscr{C}$.

a) Montrer qu'il existe un élément $W \in \mathscr{C}$ tel que :
$$\forall m \in [0,1],\ \forall X \in K_n,\ \forall Y \in K_p,\ m\ {}^tXAW + (1-m)\ {}^tYW > 0$$

b) On note $w_1, \ldots, w_p$ les coordonnées de W dans la base canonique de E_p.
Montrer que $w_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

c) Montrer que: $\forall X \in K_n$, ${}^tXAW > 0$.

d) Montrer qu'il existe un vecteur $W' \in K_p$ tel que: $\forall X \in K_n$, ${}^tXAW' > 0$.

e) Montrer que $\beta(A) > 0$.

10) On définit la matrice $B \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par $B = A - \beta(A)J$ où J est la matrice appartenant à $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

a) Déterminer les valeurs $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ en fonction de $\alpha(A)$ et $\beta(A)$.

b) Déduire des questions précédentes que $\alpha(A) = \beta(A)$.

Partie III. Point-selle et point critique

Dans cette partie, A désigne toujours une matrice de à $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout (X, Y) appartenant à $K_n \times K_p$: $f(X, Y) = {}^tXAY$.

On dit que le couple (X_0, Y_0) appartenant à $K_n \times K_p$ est un point-selle pour f, lorsque:
$$\forall (X, Y) \in K_n \times K_p,\ f(X_0, Y) \leqslant f(X_0, Y_0) \leqslant f(X, Y_0)$$

1) Montrer qu'il existe un point-selle pour f et que si (X_0, Y_0) en est un, alors $f(X_0, Y_0) = \alpha(A)$.

2) On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on définit la fonction g sur $\mathbb{R}^2$ par:
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x, y) = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$$

On appelle point critique de g tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(u, v) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(u, v) = 0$.

a) Montrer que g admet un unique point critique (x_0, y_0) si et seulement si $a + d - b - c \neq 0$. Déterminer dans ce cas (x_0, y_0).

b) On suppose $a - b$ et $d - c$ de même signe et non tous nuls et on suppose également que $a - c$ et $d - b$ sont de même signe et non tous nuls.

- Montrer que dans ce cas g admet un unique point critique (x_0, y_0) et que $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$.
- Montrer que: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = g(x_0, y_0) + (x - x_0)(y - y_0)(a + d - b - c)$.

On pourra introduire les notations suivantes: $X = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1-x_0 \end{pmatrix}$, $Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ 1-y_0 \end{pmatrix}$, $U = X - X_0$, $V = Y - Y_0$, et on exprimera $g(x, y)$ à l'aide de U, V, A, X_0 et Y_0.

- En déduire que $\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ 1-x_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 \\ 1-y_0 \end{pmatrix}\right)$ est un point-selle pour l'application f définie sur $K_2 \times K_2$ par: $\forall (X, Y) \in K_2 \times K_2$, $f(X, Y) = {}^tXAY$.
- Quelle est la valeur de $\alpha(A)$?

Partie IV. Application à une étude de la concurrence

Deux entrepreneurs Primus et Secundus se partagent le marché d'un produit sur un territoire commun, de sorte qu'au cours d'un trimestre, si l'un voit sa part de marché varier de Δ unités (nombre réel positif ou négatif) l'autre voit la sienne varier de $-\Delta$ unités. Cette variation dépend à chaque trimestre des stratégies choisies par l'un et l'autre.
Primus a le choix entre deux stratégies notées P_1 et P_2, Secundus a le choix entre deux stratégies S_1 et S_2. Lorsque Primus et Secundus choisissent chacun l'une de leurs deux stratégies, leurs parts de marché sont modifiées et le tableau suivant donne les variations trimestrielles de la part de marché de Secundus, celles de Primus étant opposées.

Variation trimestrielle de la part de marché de Secundus lorsque :	Secundus choisit S_1	Secundus choisit S_2
Primus choisit P_1	-2	3
Primus choisit P_2	1	-1

Dans une négociation entre Primus et Secundus, si Secundus propose par exemple S_2, Primus propose alors P_2, mais dans ce cas Secundus préfère S_1 et Primus souhaite alors P_1, ce qui pousse Secundus à choisir de nouveau S_2; finalement toute entente semble être impossible.
Primus et Secundus décident alors de s'en remettre au hasard de la manière suivante: les deux concurrents choisissent simultanément et aléatoirement l'une des deux stratégies dont chacun dispose: Primus choisit la stratégie P_1 avec la probabilité x ($x \in [0,1]$) et la stratégie P_2 avec la probabilité $1-x$, Secundus, indépendamment du choix de Primus, choisit la stratégie S_1 avec la probabilité y, ($y \in [0,1]$) et la stratégie S_2 avec la probabilité $1-y$. On note, dans ces conditions, $V_{x,y}$ la variable aléatoire égale à la variation trimestrielle de la part de marché de Secundus.

1) Déterminer l'espérance de $V_{x,y}$.

2) Établir qu'il existe des probabilités x_0 et y_0 telles que Primus (respectivement Secundus) ne trouve aucun avantage à prendre x différent de x_0 (respectivement y différent de y_0), lorsque Secundus (respectivement Primus) s'en tient à y_0 (respectivement à x_0).
Déterminer les valeurs de x_0 et y_0.