



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE SUJET :

280

HEC_M1_S

Concepteur : H.E.C.

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES I

Mercredi 2 Mai 2007, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, I la matrice identité, et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et 1 colonne. On confond $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^n .

Préliminaire

Soit E un espace vectoriel réel. On appelle *norme* sur E , toute application ν de E dans \mathbb{R}^+ vérifiant :

- i) $\nu(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;
- ii) pour tout λ réel, pour tout x de E : $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$;
- iii) pour tout couple (x, y) de E^2 : $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$.

Montrer que l'application $\| \cdot \|_\infty$ de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^+ définie par : pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^n ,

$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, est une norme sur \mathbb{R}^n .

Partie I

A. Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que l'application qui, à toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe le réel $\max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$, définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La norme de A sera notée $\|A\|$.

2. a) Établir pour tout X de \mathbb{R}^n , l'inégalité : $\|AX\|_\infty \leq \|A\| \times \|X\|_\infty$.

b) Montrer qu'il existe un vecteur X_0 de \mathbb{R}^n , non nul, tel que $\|AX_0\|_\infty = \|A\| \times \|X_0\|_\infty$.

En déduire que $\|A\| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$.

c) Établir alors que pour tout couple (A, B) de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on a $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.

On dit qu'une suite $(A_m)_{m \geq 0}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|A_m - A\| = 0$. On pose $A_m = (a_{i,j}(m))_{1 \leq i,j \leq n}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

3. a) Montrer que $(A_m)_{m \geq 0}$ converge vers A si et seulement si pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$: $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_{i,j}(m) = a_{i,j}$.
 b) Montrer que si $(A_m)_{m \geq 0}$ converge vers A et $(B_m)_{m \geq 0}$ converge vers B , alors $(A_m B_m)_{m \geq 0}$ converge vers AB .

4. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|A\| < 1$.

- a) Déterminer $\lim_{m \rightarrow +\infty} A^m$.
 b) Montrer que si λ est une valeur propre réelle de A , alors $|\lambda| < 1$. En déduire que les matrices $I - A$ et $I + A$ sont inversibles.

c) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^m A^k \right)_m$ converge, et exprimer sa limite en fonction de la matrice A .

Soit $(A_m)_{m \geq 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la série de terme général A_m (qu'on notera $\sum_{m \geq 0} A_m$) converge, si la suite $\left(\sum_{m=0}^p A_m \right)_p$ converge. Dans ce cas, sa limite est notée $\sum_{m=0}^{+\infty} A_m$.

5. On considère dans cette question, une matrice non nulle N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété suivante : il existe un entier p supérieur ou égal à 2 tel que $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$.

- a) Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} N^k$ converge. On note $M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} N^k$.
 b) Montrer que $\{X \in \mathbb{R}^n / (M - I)X = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n / NX = 0\}$.

6. a) Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} D^k$ converge.

b) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, D une matrice diagonale et P une matrice inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$ converge, et exprimer sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ en fonction de P et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k$.

On admet jusqu'à la fin du problème que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$ converge,

et on note : $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

7. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose, pour tout m de \mathbb{N}^* : $A_m = \left(I + \frac{1}{m} A \right)^m$.

a) Établir l'inégalité :

$$\left\| \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k - A_m \right\| \leq \sum_{k=0}^m \left(1 - \frac{m(m-1) \cdots (m-k+1)}{m^k} \right) \frac{\|A\|^k}{k!}$$

b) En déduire que la suite $(A_m)_m$ converge vers $\exp(A)$.

B. Propriétés de l'exponentielle de matrice

On admet que si A et B sont éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB = BA$, alors, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

1. Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $\exp(A)$ est inversible et déterminer son inverse.
2. a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice S_A telle que $\exp(A) - I = A(I + S_A)$.
 b) Étudier la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par : $x \mapsto e^x - 1 - 2x$.
 c) En déduire que si $\|A\| < 1$, alors $\|S_A\| < 1$.
 d) On suppose que $\|A\| < 1$ et que $\exp(A) = I$. Montrer que A est la matrice nulle.
3. On note \mathcal{S}_n l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n , et \mathcal{S}_n^{++} l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n dont les valeurs propres sont strictement positives.
 - a) Montrer que si A est un élément de \mathcal{S}_n , alors $\exp(A)$ est un élément de \mathcal{S}_n^{++} .
 - b) Montrer que l'application \exp restreinte à \mathcal{S}_n est une surjection de \mathcal{S}_n sur \mathcal{S}_n^{++} .
4. Soit A et B deux matrices de \mathcal{S}_n telles que $\exp(A) = \exp(B)$. On note u (resp. v) l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à A (resp. B), et $\exp(u)$ (resp. $\exp(v)$) l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à $\exp(A)$ (resp. $\exp(B)$).
 - a) Montrer que A et B ont les mêmes valeurs propres.
 - b) Montrer que $A \times \exp(B) = \exp(B) \times A$.
 - c) Soit F un sous-espace propre de v .
 - i) Montrer que F est également un sous-espace propre de $\exp(v)$.
 - ii) Montrer que la restriction de u à F induit un endomorphisme de F diagonalisable.
 - d) En se plaçant dans une base de diagonalisation de v , montrer alors que u et v ont les mêmes vecteurs propres. En déduire que $A = B$.

Partie II

1. On considère \mathbb{R}^n muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.
 Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n défini par $f(e_1) = 0$, et pour tout i de $\llbracket 2, n \rrbracket$, $f(e_i) = e_{i-1}$.
 On note N la matrice associée à f relativement à la base \mathcal{B} . Déterminer, pour tout k de \mathbb{N} , la matrice N^k .
2. Soit p un réel de $]0, 1[$. On définit les matrices R_p et Q_p par : $R_p = (1 - p)I + pN = I + Q_p$.
 - a) Établir l'égalité : $\exp(Q_p) = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-p} \frac{p^j}{j!} N^j$.
 - b) Calculer $\|R_p\|$ et $\|Q_p\|$. Montrer que $\|\exp(Q_p)\| \leq 1$.
3. a) Soit m un entier supérieur ou égal à 1, et p_1, p_2, \dots, p_m des réels de l'intervalle $]0, 1[$.
 On pose pour tout i de $\llbracket 1, m \rrbracket$, $R_i = R_{p_i}$, et $Q_i = Q_{p_i}$. Montrer les égalités suivantes :

$$\prod_{k=1}^m \exp(Q_k) = \exp\left(\sum_{k=1}^m Q_k\right) = \exp\left(\left[-\sum_{k=1}^m p_k\right](I - N)\right)$$

b) Établir la relation suivante :

$$\prod_{k=1}^m R_k - \prod_{k=1}^m \exp(Q_k) = [R_1 - \exp(Q_1)](R_2 \times \dots \times R_m) - \exp(Q_1)[\exp(Q_2) \times \dots \times \exp(Q_m) - R_2 \times \dots \times R_m]$$

- c) En déduire la majoration suivante : $\left\| \prod_{k=1}^m R_k - \prod_{k=1}^m \exp(Q_k) \right\| \leq \sum_{k=1}^m \|R_k - \exp(Q_k)\|$.

4. a) Montrer l'égalité : $\|\exp(Q_1) - R_1\| = |e^{-p_1} - 1 + p_1| + p_1|e^{-p_1} - 1| + e^{-p_1} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{p_1^k}{k!}$.

b) En déduire successivement les deux inégalités :

$$\|\exp(Q_1) - R_1\| \leq 2p_1^2 \text{ et } \left\| \prod_{k=1}^m R_k - \prod_{k=1}^m \exp(Q_k) \right\| \leq 2 \sum_{k=1}^m p_k^2$$

Partie III.

Les notations sont celles de la partie II.

On considère m pièces de monnaie ($1 \leq m < n$), telles que pour tout i de $\llbracket 1, m \rrbracket$, la i -ième pièce donne Pile avec la probabilité p_i , et Face avec la probabilité $1 - p_i$. On pose $\lambda = \sum_{i=1}^m p_i$.

Un joueur lance successivement la première pièce, la deuxième pièce, etc. jusqu'à la m -ième pièce, cette expérience étant modélisée par un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Pour tout k de $\llbracket 1, m \rrbracket$, on note S_k la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus à l'issue des k premiers lancers.

1. a) Montrer que pour tout k de $\llbracket 1, m \rrbracket$, les $k+1$ premiers éléments de la première ligne du produit matriciel $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_k$ représentent la loi de S_k .

b) Montrer la relation suivante : $\left\| \prod_{i=1}^m R_i - \prod_{i=1}^m \exp(Q_i) \right\| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| P([S_m = k]) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right|$.

c) En déduire l'inégalité suivante : $\sum_{k=0}^{+\infty} \left| P([S_m = k]) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq 2 \sum_{i=1}^m p_i^2$.

2. Dans un programme Pascal sont faites les déclarations suivantes :

```
const m = ... ;
Type tab = array[1..m] of real ;
Var prob : tab ;
```

On suppose que prob contient les probabilités p_1, p_2, \dots, p_m (ainsi prob[1] contient p_1 etc.)

Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est $\text{Sm}(\text{prob} : \text{tab}) : \text{integer}$ qui simule la variable aléatoire S_m .