2

ALGÈBRE

Exercice 2.01.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

1. Montrer que la forme linéaire tr définie sur $\mathcal{M}_n$ en posant :

$$\text{si } M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}, \operatorname{tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}$$

est telle que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ pour tout couple de matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$.

2. Dans cette question, on suppose que A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n$.

a) Montrer qu'il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale de la forme $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PD\,{}^tP$.

b) Montrer que $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

c) On suppose que A est non nulle. Vérifier que $\operatorname{tr}(A^2) > 0$.

d) Soit $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, où $m \in \mathbb{N}^*$. Établir l'inégalité :

$$(x_1 + \cdots + x_m)^2 \leqslant m(x_1^2 + \cdots + x_m^2)$$

e) Montrer que : $\operatorname{rg}(A) \geqslant \dfrac{[\operatorname{tr}(A)]^2}{\operatorname{tr}(A^2)}$.

3. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n$, montrer que $\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2$.

4. En utilisant le plus possible les résultats précédents, déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Solution

1. On a
$\mathrm{tr}(AB) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{h=1}^{n} a_{i,h}b_{h,i} = \sum\limits_{h=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} b_{h,i}a_{i,h} = \mathrm{tr}(BA)$.

2. a) D'après le cours, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n$ et une matrice diagonale (les éléments diagonaux étant les valeurs propres de A répétées selon la dimension du sep associé) telles que $A = PD^tP$.

b) Si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est une liste des valeurs propres ainsi répétées, On choisit D de sorte que $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
En utilisant la question 1, on obtient :

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P(D^tP)) = \mathrm{tr}((D^tP)P) = \mathrm{tr}(D) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

c) On sait qu'une liste des valeurs propres de A^2 est alors $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$. Il résulte de la question précédente (A^2 est symétrique) que $\mathrm{tr}(A^2) = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 > 0$, car $A \neq 0$ montre que l'une de ses valeurs propres est non nulle.

d) Cette inégalité s'obtient en appliquant celle de Cauchy-Schwarz. En effet, on a :
$(x_1 + \cdots + x_m)^2 = (1\times x_1 + \cdots + 1\times x_m)^2 \leqslant (1 + \cdots + 1)\times(x_1^2 + \cdots + x_m^2)$
Soit :

$$(x_1 + \cdots + x_m)^2 \leq m(x_1^2 + \cdots + x_m^2)$$

e) Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A (toujours répétées selon les dimensions...). Comme A et A^2 sont symétriques, avec la question précédente il vient :

$$(\mathrm{tr}(A))^2 = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_r)^2 \leqslant r(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_r^2) = \mathrm{rg}(A)\,\mathrm{tr}(A^2)$$

D'où l'inégalité souhaitée.

3. Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, on a :

$$\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum_{j=0}^{n}({}^tAA)_{j,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}({}^tA)_{j,i}(A)_{i,j} = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$$

4. On a $\mathrm{tr}(A) = 10$ et comme A est symétrique on voit que $\mathrm{tr}(A^2) = 30+\dfrac{15}{8} = \dfrac{255}{8}$. Il résulte alors de 2. e) que

$$\mathrm{rg}(A) \geqslant \frac{[\mathrm{tr}(A)]^2}{\mathrm{tr}(A^2)} = \frac{800}{255} = \frac{160}{51} > 3,$$

par conséquent on a nécessairement $\mathrm{rg}(A) = 4$. La matrice A est donc inversible.

Pour la matrice B, on trouve $\mathrm{tr}(B) = 6$ et $\mathrm{tr}(B^2) = \frac{29}{2}$.

D'où $\mathrm{rg}(B) \geqslant \frac{72}{29} \simeq 2{,}48$, il s'ensuit que $\mathrm{rg}(B) \geqslant 3$. Comme la première colonne et la dernière sont identiques, on a donc $\mathrm{rg}(B) = 3$.

Exercice 2.02.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients complexes d'ordre n, où n est un entier supérieur ou égal à 2 et on note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Dans cette question, on suppose $n = 2$.

a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, que l'on écrit sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Prouver que $A^2 = (a+d)A + (bc - ad)I$.

b) Montrer que A est inversible si et seulement si $bc - ad \neq 0$. Déterminer alors l'expression de A^{-1}.

c) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n appartient au sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices I et A.

d) On suppose que $a + d \neq 0$. Montrer que si une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ commute avec A^2, alors elle commute avec la matrice A. Donner un contre-exemple simple à cette propriété lorsque $a + d = 0$.

2. On revient au cas général. On considère une matrice A, qui n'est pas proportionnelle à l'identité, vérifiant la relation $A^2 = bA + I$, pour un certain b réel.

On note λ_1 et λ_2 les racines complexes du polynôme $X^2 - bX - 1$.

a) Montrer que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et que λ_1 et λ_2 sont des valeurs propres de A.

On pose : $p(X) = \dfrac{X - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$ et $q(X) = \dfrac{X - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

b) Montrer que $P = p(A)$ (resp. $Q = q(A)$) est un projecteur dont l'image est contenue dans le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_1 (resp. λ_2). Montrer que A est diagonalisable.

c) On suppose que $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. Montrer que si une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commute avec A^2 alors elle commute avec la matrice A.

Solution

1. a) Il suffit de développer le membre de droite et de constater que l'on trouve A^2.

b) Supposons que $bc-ad\neq 0$, on écrit $A(A-(a+d)I)=(bc-ad)I$ et on en déduit immédiatement que A est inversible et que $A^{-1}=(bc-ad)^{-1}(A-(a+d)I)$.
Si A est inversible, supposons que $bc-ad=0$, alors la relation trouvée en 1. a) implique que $A=(a+d)I$ et par suite que $a=b=c=d=0$ ce qui est absurde.

De plus, lorsque A est inversible on a vu que $A^{-1}=(bc-ad)^{-1}(A-(a+d)I)$, on a donc :

$$A^{-1}=\frac{1}{bc-ad}\begin{pmatrix}-d & b\\ c & -a\end{pmatrix}$$

c) On procède par récurrence. Pour $n=0,1,2$ c'est évident. Supposons que $A^k=x_kA+y_kI$ pour $n\geqslant k\geqslant 2$, alors en multipliant par A^{n-1} la relation vérifiée par A on trouve :

$$\begin{aligned}A^{n+1}&=(a+d)A^n+(bc-ad)A^{n-1}\\&=(a+d)\left[x_nA+y_nI\right]+(bc-ad)\left[x_{n-1}A+y_{n-1}I\right]\\&=\left((a+d)x_n+(bc-ad)x_{n-1}\right)A+\left((a+d)y_n+(bc-ad)y_{n-1}\right)I\end{aligned}$$

Donc $A^{n+1}\in\operatorname{Vect}\{I,A\}$ et la conclusion.

d) Si $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ commute avec A^2, on en déduit que :

$$A^2B=(a+d)AB+(ad-bc)B=BA^2=(a+d)BA+(ad-bc)B$$

Par suite, on a $(a+d)AB=(a+d)BA$ et par conséquent $AB=BA$ puisque $a+d\neq 0$.

Dans le cas où $a+d=0$, un contre-exemple simple est donné en prenant :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\text{ et }B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

En effet B commute évidemment avec $A^2=I$ mais ne commute pas avec A.

2. a) Comme $X^2-bX-1=(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$, on voit que si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ alors $-1=\lambda_1\lambda_2=\lambda^2$ et $b=2\lambda$.

D'où $\lambda=\pm i$ et par suite $b=\pm 2i$, ce qui est impossible puisque $b\in\mathbb{R}$.
On a donc bien $\lambda_1\neq\lambda_2$.
Supposons par exemple que λ_1 n'est pas une valeur propre de A, alors la matrice $A-\lambda_1I$ est inversible. Comme $0=A^2-bA-I=(A-\lambda_1I)(A-\lambda_2I)$, en multipliant par $(A-\lambda_1I)^{-1}$ on en déduit que $A-\lambda_2I=0$ ce qui est contradictoire avec le fait que A n'est pas un multiple de l'identité. On raisonnerait d'une façon analogue pour λ_2.

b) C'est évident.

c) De la relation vérifiée par A, on déduit immédiatement que :

$$PQ = p(A)q(A) = 0$$

Comme $p(X) + q(X) = 1$, on a $P + Q = p(A) + q(A) = I$ et par suite $P^2 = P^2 + PQ = P$, d'où $P^2 = P$.

De la même manière, on montre que Q est un projecteur.

Observons que $(A - \lambda_1 I)P = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0$.

Il en résulte que $\mathrm{Im}(P) \subseteq \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I)$.

On montre d'une façon analogue que $\mathrm{Im}(P) \subseteq \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I)$.

Par suite $E = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Ker}(I - P) \subseteq \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) \oplus \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I)$, il s'ensuit que $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) \oplus \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I) = E$.

D'après un théorème du cours, ceci entraîne que A est diagonalisable.

d) Si la somme des deux valeurs propres est non nulle, on voit que $b = \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ et par suite la relation $A^2 = bA + I$ implique (comme en 1. d)) que B commute avec la matrice A.

Exercice 2.03.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$, I la matrice identité d'ordre n.

A chaque matrice $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de E, on associe l'application T_U de E dans $\mathbb{R}$, qui à une matrice M associe la somme des éléments diagonaux du produit UM :

$$M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mapsto T_U(M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{i,j} m_{j,i}$$

1. a) Montrer que $T_U \in E^*$.

b) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(T_U)$.

c) Montrer que pour toutes matrices U et M de E, on a :

$$T_U(M) = T_M(U) = T_I(UM) = T_I(MU)$$

2. Un cas particulier : $n = 2$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\mathrm{Ker}(T_U)$ est l'ensemble des matrices de E dont la somme des 4 coefficients est nulle et qu'il contient au moins une matrice inversible.

On suppose désormais que $n \geqslant 2$ et que U est une matrice non nulle.

3. Montrer que l'application $\varphi : E \to E^*, U \mapsto \varphi(U) = T_U$, est une application linéaire bijective.

4. Soit H un hyperplan de E, *i.e.* un sous-espace de E de dimension $n^2 - 1$.

a) Montrer que pour toute matrice A non nulle de E qui n'appartient pas à H on a : $E = H \oplus \mathrm{Vect}(A)$.

b) Prouver l'existence d'une matrice U de E telle que $H = \mathrm{Ker}(T_U)$. On note $r = \mathrm{rg}(U)$.

c) Soit les matrices de E : $P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $R_r = (r_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, avec $\begin{cases} r_{i,i} = 1 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant r \\ r_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que P est une matrice inversible appartenant à $\mathrm{Ker}(T_{R_r})$

d) En déduire que tout hyperplan H de E contient une matrice inversible. (On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'il existe deux matrices inversibles S_1 et S_2 telles que : $S_1 U S_2 = R_r$ et considérer la matrice $M = S_2 P S_1$.)

Solution

1. a) On a $T_U(M) \in \mathbb{R}$. de plus :

$$T_U(M + \lambda N) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{i,j}[m_{j,i} + \lambda n_{j,i}] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{i,j} m_{j,i} + \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{i,j} n_{j,i}$$
$$= T_U(M) + \lambda T_U(N).$$

ce qui montre que $T_U \in E^*$.

b) Si U est la matrice nulle, $\mathrm{Ker}(T_U) = E$ entraîne $\dim(\mathrm{Ker}(T_U)) = n^2$. Sinon $\mathrm{Ker}(T_U)$ est un hyperplan de E en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle (car $T_U({}^tU) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{i,j}^2 \neq 0$) et $\dim(\mathrm{Ker}(T_U)) = n^2 - 1$.

c) $\star$ On écrit :

$$T_U(M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{i,j} m_{j,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{j,i} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} m_{j,i} u_{i,j} = T_M(U).$$

$\star$ $T_{Id}(UM) = T_U(M)$ et $T_{id}(MU) = T_M(U)$

2. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors :

$$UM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

Donc $T_U(M) = a + b + c + d$ et $\mathrm{Ker}(T_U) = \{M \in E \ / \ a + b + c + d = 0\}$.

Par exdmple la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est bien inversible.

3. $\star$ Pour tout $M \in E$:
$$\begin{aligned}\varphi(U+\lambda V)(M) = T_{U+\lambda V}(M) &= T_M(U+\lambda V) = T_M(U) + \lambda T_M(V)\\ &= T_U(M) + \lambda T_V(M) = [\varphi(U) + \lambda \varphi(V)](M)\end{aligned}$$
$\star$ $\varphi(U) = 0_{E^*}$ si et seulement si $\forall\, M \in E, T_U(M) = 0$ soit si et seulement si $U = O_E$ et φ est injective.
Comme on est en même dimension finie, au départ et à l'arrivée :
$$\varphi : E \to E^*,\ U \mapsto \varphi(U) = T_U \text{ est un isomorphisme.}$$

4. Soit H un hyperplan de E.

a) On a $H \cap \mathrm{Vect}(A) = 0_E$ sinon $A \in H$ absurde.
Ainsi $\dim(H \oplus \mathrm{Vect}(A)) = n^2 - 1 + 1 = n^2 = \dim(E)$. Donc $E = H \oplus \mathrm{Vect}(A)$.

b) Soit $N \in E, N = M + \lambda A$ avec $M \in H$. On définit une forme linéaire ℓ de E^* par : $\ell(N) = \lambda$. On peut vérifier que ℓ est linéaire et que $H = \mathrm{Ker}\,\ell$. Comme φ est unisomorphisme, on a l'existence d'une matrice U de E telle que $\ell = T_U$, d'où $H = \mathrm{Ker}(T_U)$.

c) On a $\mathrm{rg}(P) = n$ si et seulement si P est inversible et
$$T_{R_r}(P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{i,j} p_{j,i} = \sum_{i=1}^{r} p_{i,i} = 0$$

d) On pose $M = S_2 P S_1$ et on a : M inversible car P inversible. Puis :
$$\begin{aligned}T_{R_r}(P) &= T_{S_1 U S_2}(S_2^{-1} M S_1^{-1}) = T_{Id}(S_2^{-1} M S_1^{-1} S_1 U S_2)\\ &= T_{Id}(S_2^{-1} M U S_2) = T_{S_2}(S_2^{-1} M U) = T_{Id}(S_2^{-1} S_2 M U)\\ &= T_{Id}(MU) = T_U(M).\end{aligned}$$
Or $T_{R_r}(P) = 0$, d'où $T_U(M) = 0$ ce qui entraîne $M \in \mathrm{Ker}(T_U) = H$.

Donc tout hyperplan H de E contient au moins une matrice inversible.

Exercice 2.04.

Cet exercice propose de déterminer, par différentes méthodes, les polynômes réels P tels que P' divise P.

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tels que P' divise P.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n. Montrer que si P' divise P, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :
$$P(X) = \left(\frac{X}{n} + \alpha\right) P'(X)$$

3. **Méthode 1.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P' divise P.

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, déduire de la question 2. une relation de récurrence entre $P^{(k)}$ et $P^{(k+1)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de la fonction polynomiale identifiée à P.

b) En déduire tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

4.**Méthode 2.**

a) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{x}{n} + \alpha\right) f'(x)$$

b) En déduire tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

5. **Méthode 3.** Soit $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$, tel que P' divise P.

a) Établir une relation de récurrence entre les coefficients de P (on pourra utiliser la question 2.).

b) En déduire les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ solutions.

Solution

1. Par coefficients indéterminés et identification :

$$(aX^2 + bX + c) = (2aX + b)(dX + e) \iff \begin{cases} 2ad = a \\ bd + 2ae = b \\ be = c \end{cases} \iff \begin{cases} d = 1/2 \\ ae = b/4 \\ be = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = b^2/4a \\ d = 1/2 \\ e = b/4a \end{cases}$$

d'où : $P(X) = aX^2 + bX + \dfrac{b^2}{4a} = a(X^2 + \dfrac{b}{a}X + \dfrac{b^2}{4a^2}) = a(X + \dfrac{b}{2a})^2$.

2. Par différence des degrés, le facteur est de degré 1 ; puis par identification des termes de plus haut degré,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = (\beta X + \alpha) \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \Rightarrow \beta = \frac{1}{n}$$

3. Par récurrence à partir de $P(X) = (\dfrac{X}{n} + \alpha)P'(X)$, puis par produit :

$$\left(1 - \frac{p}{n}\right) P^{(p)} = \left(\frac{X}{n} + \alpha\right) P^{(p+1)}$$

$$\frac{(n-1)!}{n^{n-1}} P = (\frac{X}{n} + \alpha)^n P^{(n)} = (\frac{X}{n} + \alpha)^n \, n!\, a_n$$

Soit : $P(X) = a(X + n\alpha)^n = a(X + b)^n$. On vérifie alors que ces polynômes conviennent.

4. a) La résolution de l'équation différentielle donne l'existence d'une constante μ, donc d'une constante λ telle que :

$$f(x) = \mu \exp\left[\int_{x_0}^{x} \frac{n}{t + n\alpha}dt\right] = \lambda(x + n\,\alpha)^n$$

sur chaque intervalle $]-\infty, -n\alpha[$ ou $]-n\alpha, +\infty[$.

b) D'où les solutions polynomiales $P(x) = \lambda(x + n\alpha)^n$ sur $\mathbb{R}$. On vérifie . . .

5. a) Par identification :
$\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k = \big(\frac{X}{n} + \alpha\big)\sum\limits_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ donne :
$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], a_k = \frac{k}{n}a_k + \alpha(k+1)a_{k+1}$, soit :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \big(1 - \frac{k}{n}\big)a_k = \alpha(k+1)a_{k+1}$$

b) D'où, par récurrence, $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$a_k = \frac{\alpha n(k+1)}{n-k}a_{k+1} = \alpha^{n-k}n^{n-k}\binom{n}{k}a_n$$

formule encore valable pour $k = n$; puis :

$$P(X) = a_n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha\, n)^{n-k}X^k = a_n\big(X + \alpha n\big)^n$$

et on vérifie une fois encore.

Exercice 2.05.

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que la matrice $J_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ soit une matrice de projecteur.

On suppose désormais que α prend cette valeur et on note J la matrice associée.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = I_3 + (-1 + \mathrm{e}^x)J$ et $G(x) = I_3 - (1 + \mathrm{e}^x)J$.
Calculer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x)F(y)$.
La matrice $F(x)$ est-elle inversible ?
La matrice $G(x)$ est-elle inversible ?

3. Déterminer les éléments propres de J.

4. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M_{a,b} = aI_3 + bJ$. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la matrice $\Delta_{a,b} = P^{-1}M_{a,b}P$ soit une matrice diagonale que l'on explicitera.

5. Montrer que si $M_{a,b}$ est inversible, alors :

$$\exists\, x \in \mathbb{R}, M_{a,b} = aF(x) \text{ ou } M_{a,b} = aG(x).$$

Dans ce cas, calculer $M_{a,b}^{-1}$ en fonction de a, b, J et I_3.

6. On pose : $\mathcal{C}_{a,b} = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \;/\; AM_{a,b} = M_{a,b}A\}$.

On suppose que $M_{a,b}$ est inversible.

Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_{a,b}$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Solution

1. Le calcul donne : $J^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2-2 & 0 & \alpha-1 \\ \alpha-1 & 1 & 1 \\ -2\alpha+2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $J^2 = J$ si et seulement si $\alpha = 2$.

2. Comme $J^2 = J$, le calcul donne $F(x)F(y) = F(x+y)$.
On remarque que $F(0) = I_3$, donc $F(x)F(-x) = I_3$, $F(x)$ est inversible d'inverse $F(x)^{-1} = F(-x)$. On remarque de même que $G(x)G(y) = F(x+y)$, donc $G(x)G(-x) = I_3$, donc $G(x)$ est inversible d'inverse $G(x)^{-1} = G(-x)$.

3. Le polynôme $X(X-1)$ est annulateur pour J donc les seules valeurs propres possibles de J sont les racines 0 et 1 de ce polynôme.

Si 1 n'est pas valeur propre, alors $J - I_3$ est inversible et la relation $J(J - I_3) = 0$ se simplifie en $J = 0$, ce qui n'est pas vrai, donc $1 \in \mathrm{Sp}(J)$; de même on a $0 \in \mathrm{Sp}(J)$ car $J \neq I_3$. Finalement on a :

$$\mathrm{Sp}(J) = \{0, 1\}$$

4. On a $J - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1, donc $\dim \mathrm{Ker}(J - I) = 2$ et comme $\dim \mathrm{Ker}\, J \geqslant 1$ (question précédente), J est diagonalisable en :

$$J = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ et alors } P^{-1}M_{a,b}P = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \Delta_{a,b}$$

5. $\star$ Si $b = 0$, alors $M_{a,b} = aI$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$, et alors on a $M_{a,b} = aF(0)$ et $M_{a,b}^{-1} = \dfrac{1}{a} I_3$.

$\star$ Si $b \neq 0$, alors $M_{a,b} = b\big(J - (-\frac{a}{b})I_3\big)$ est inversible si et seulement si $J - \big(-\frac{a}{b}\big)I_3$ est inversible c'est-à-dire que $-\frac{a}{b}$ n'est pas valeur propre de J c'est-à-dire différent de 0 et de 1 soit $a \neq 0$ et $b \neq -a$. On a alors :

$$M_{a,b} = a\big(I_3 + \frac{b}{a}J\big)$$

• Si $\dfrac{b}{a} + 1 > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{b}{a} + 1 = \mathrm{e}^x$ et alors $M_{a,b} = aF(x)$ et :

$$M_{a,b}^{-1} = \frac{1}{a}F(-x) = \frac{1}{a}F\big(-\ln\big(\frac{b}{a}+1\big)\big) = \frac{1}{a}I_3 - \frac{b}{a(b+a)}J$$

• Si $\dfrac{b}{a} + 1 < 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{b}{a} + 1 = -\mathrm{e}^x$ et alors $M_{a,b} = aG(x)$ et :

$$M_{a,b}^{-1} = \frac{1}{a}G(-x) = \frac{1}{a}G\big(-\ln\big(\frac{b}{a}+1\big)\big) = \frac{1}{a}I_3 - \frac{b}{a(b+a)}J$$

Finalement, $M_{a,b}$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$ et $a + b \neq 0$ et alors, dans tous les cas, on a :

$$M_{a,b}^{-1} = \frac{1}{a}I_3 - \frac{b}{a(b+a)}J$$

6. L'ensemble $\mathcal{C}_{a,b}$ est le noyau de l'application linéaire $A \mapsto AM_{a,b} - M_{a,b}A$, donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Comme $M_{a,b} = P\Delta_{a,b}P^{-1}$, on remarque que :

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{C}_{a,b} &\iff P\Delta_{a,b}P^{-1}A = AP\Delta_{a,b}P^{-1} \iff \Delta_{a,b}P^{-1}AP = P^{-1}AP\Delta_{a,b} \\ &\iff P^{-1}AP \in \mathcal{D}_{a,b}. \end{aligned}$$

en posant $\mathcal{D}_{a,b} = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ B\Delta_{a,b} = \Delta_{a,b}B\}$. Comme l'application $A \mapsto PAP^{-1}$ est un isomorphisme (clairement linéaire et bijective de réciproque $B \mapsto P^{-1}BP$) la dimension recherchée est égal à celle de $\mathcal{D}_{a,b}$.

On remarque que $\mathcal{D}_{a,b}$ contient toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} s & t & 0 \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}$, et le calcul montre la réciproque (en utilisant $a \neq 0$ et $a + b \neq 0$).
Donc $\mathcal{D}_{a,b}$ est engendré par les matrices élémentaires $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3}$, qui forment une famille libre, donc finalement $\dim M_{a,b} = 5$.

Exercice 2.06.

À toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on associe la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } F(x) = \int_0^1 tf(x-t)\,dt$$

1. Démontrer que pour tout réel x : $F(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} (x-u)f(u)\,du$.

2. En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_{x-1}^{x} f(u)\,du - f(x-1).$$

Pour tout entier naturel p, on note $E_p = \mathbb{R}_p[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p, que l'on identifie à l'espace des fonctions polynômes associé, $\mathcal{F} = \big(f_0, f_1, \ldots, f_p\big)$ la base canonique de E_p.

Soit L l'application qui à tout polynôme P de E_p, associe la fonction $L(P)$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, L(P)(x) = \int_0^1 tP(x-t)\,dt$$

3. Pour tout entier $i \in [\![0, p]\!]$, on note $F_i = L(f_i)$.

a) Prouver que pour tout x réel, $F_i(x) = \sum\limits_{k=0}^{i} \dfrac{1}{k+2}\dbinom{i}{k}(-1)^k\, x^{i-k}$.

b) A l'aide du résultat de la question 2, donner une expression de $F_i'(x)$. En déduire une nouvelle expression de $F_i(x)$, ainsi qu'une forme simplifiée de $\sum\limits_{k=0}^{i} \dfrac{1}{k+2}\dbinom{i}{k}$.

4. a) Démontrer que L réalise un endomorphisme de E_p.

b) Déterminer la matrice M associée à L dans la base $\mathcal{F}$. Donner en particulier les termes de sa diagonale principale.

c) Justifier que L est un automorphisme de E_p. Dans le cas où $p \geqslant 1$, L est-il diagonalisable ?

Solution

1. Pour tout réel x, on pose le changement de variable affine $u = x - t$, d'où :

$$F(x) = \int_0^1 tf(x-t)dt = \int_x^{x-1} -(x-u)f(u)du = \int_{x-1}^{x}(x-u)f(u)du \quad (*)$$

2. On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = x\displaystyle\int_{x-1}^{x} f(u)du - \int_{x-1}^{x} uf(u)du.$

Sous cette forme il est clair que F est de classe $\mathcal{C}^1$, et :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{x-1}^{x} f(u)du + x(f(x) - f(x-1)) - (xf(x) - (x-1)f(x-1)) \\ &= \int_{x-1}^{x} f(u)du - f(x-1) \end{aligned}$$

3. Pour tout entier $i \in [\![0, p]\!]$, on note $F_i = L(f_i)$.

a) La formule du binôme de Newton donne $t(x-t)^i = \sum\limits_{k=0}^{i}\dbinom{i}{k}t^{k+1}(-1)^k x^{i-k}$ puis par intégration :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_i(x) = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}(-1)^k x^{i-k} \int_0^1 t^{k+1} dt = \sum_{k=0}^{i} \frac{\binom{i}{k}(-1)^k}{k+2} x^{i-k} \quad (1)$$

b) D'après 2. :

$$F_i'(x) = \int_{x-1}^{x} f_i(u)du - f_i(x-1) = \int_{x-1}^{x} u^i du - (x-1)^i$$
$$= \frac{x^{i+1}}{i+1} - \frac{(x-1)^{i+1}}{i+1} - (x-1)^i$$

Donc : $F_i(x) = \dfrac{x^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \dfrac{(x-1)^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \dfrac{(x-1)^{i+1}}{i+1} + C.$

Comme $F_i(0) = \dfrac{(-1)^i}{i+2}$, on en déduit, en remplaçant, que l'on a $C = 0$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, F_i(x) = \frac{x^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \frac{(x-1)^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \frac{(x-1)^{i+1}}{i+1} \quad (2)$$

On tire de (1) : $F_i(-1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} \frac{\binom{i}{k}(-1)^k}{k+2}(-1)^{i-k} = \sum_{k=0}^{i} (-1)^i \frac{\binom{i}{k}}{k+2}$

et de (2) :

$$F_i(-1) = \frac{(-1)^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \frac{(-2)^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \frac{(-2)^{i+1}}{i+1} = (-1)^i \frac{i.2^{i+1}+1}{(i+1)(i+2)}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{i} \frac{\binom{i}{k}}{k+2} = \frac{i.2^{i+1}+1}{(i+1)(i+2)}$$

4. a) Pour tout couple (P, Q) de polynômes de E_p et tout couple (λ, μ) de réels, on a clairement

$\forall x \in \mathbb{R}, L(\lambda P + \mu Q)(x) = [\lambda L(P) + \mu L(Q)](x)$, donc :

$$L(\lambda P + \mu Q) = \lambda L(P) + \mu L(Q)$$

D'autre part pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, $F_i = L(f_i)$ est d'après (1) un polynôme de degré i donc de E_p.

On déduit que L est un endomorphisme de E_p.

b) La matrice M de L s'obtient à partir des coordonnées dans la base $\mathcal{F}$ de $L(f_0)$,$L(f_1)$, ..., $L(f_p)$. C'est une matrice réelle d'ordre $p+1$. Compte tenu des expressions des $L(f_i)$, elle se présente sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & & \dots & \frac{(-1)^i}{i+2} & & \frac{(-1)^p}{p+2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \cdots & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ \vdots & & & \dots & 0 & \frac{1}{2} & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

C'est une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont égaux à $1/2$.

c) On déduit de ce qui précède que M est inversible et que L est un automorphisme de E_p.

La matrice M n'est pas diagonalisable car $\frac{1}{2}$ est sa seule valeur propre : si elle était diagonalisable alors L serait une homothétie et M serait diagonale, ce qui n'est pas. Donc L n'est pas diagonalisable.

Exercice 2.07.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique donné par :

$$\text{pour } x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Si u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et A sa matrice dans la base canonique, on désigne par ${}^t u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à ${}^t A$. On a donc :

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, ({}^t u)(y) \rangle, \text{ pour tout couple } (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2.$$

1. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = [\mathrm{Im}({}^t u)]^\perp$.

2. Dans la suite, on considère un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

On dit alors que u est une contraction.

a) Montrer que u^n est encore une contraction pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que ${}^t u$ est aussi une contraction.

c) Montrer que $\mathrm{Ker}(u - Id) = \mathrm{Ker}({}^t u - Id)$.

d) Prouver que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(u - Id)$ et $\mathrm{Im}(u - Id)$ sont supplémentaires et orthogonaux.

e) Si $x \in \mathbb{R}^n$, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$s_m(x) = \frac{1}{m+1}\big(x + u(x) + \cdots + u^m(x)\big),$$

et on note P la projection orthogonale sur les points fixes de u (c.a.d. sur $\mathrm{Ker}(u - Id)$).

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la suite $(s_m(x))_m$ converge vers $P(x)$, c'est-à-dire que :

$$\lim_{m\to\infty} \|s_m(x) - P(x)\| = 0.$$

3. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) & 0 \\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\omega \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

a) Vérifier que u est une contraction.

b) Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Quelle est la limite lorsque m tend vers l'infini de $\dfrac{x + u(x) + \cdots + u^{m+1}(x)}{m+1}$?

Solution

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$, il vient $\langle x, {}^t u(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que x est orthogonal à $\mathrm{Im}({}^t u)$.

Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}({}^t u)^\perp$ on a $0 = \langle x, {}^t u(y)\rangle = \langle u(x), (y)\rangle$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

En prenant $y = u(x)$, on voit que $\|u(x)\|^2 = 0$, d'où $u(x) = 0$ et par suite $x \in \mathrm{Ker}(u)$.

En récapitulant, on obtient bien $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}({}^t u)^\perp$.

2. a) On montre cette propriété par récurrence. Elle est évidemment vraie pour $n = 0, 1$.

Supposons cette propriété vraie au rang n, alors on a :

$$\|u^{n+1}(x)\| = \|u^n(u(x))\| \leqslant \|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

et la conclusion.

b) Soient u une contraction et $x \in \mathbb{R}^n$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\|{}^t u(x)\|^2 = \langle {}^t u(x) \mid {}^t u(x)\rangle \leqslant \|u({}^t u(x))\|\|x\| \leqslant \|{}^t u(x)\|\|x\|,$$

d'où $\|{}^t u(x)\| \leqslant \|x\|$. Ainsi, ${}^t u$ est aussi une contraction.

c) Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - I) \setminus \{0\}$, il vient : $\|x\|^2 = \langle u(x), x\rangle \leqslant \|u(x)\|\|x\| \leqslant \|x\|^2$, d'où $\langle {}^t u(x), x\rangle \leqslant \|x\|^2$.

Ecrivons ${}^tu(x) = ax + y$ où y est orthogonal à x, on voit déjà que
$\|x\|^2 = \langle {}^tu(x) \mid x\rangle = a\|x\|^2 + \langle x \mid y\rangle = a\|x\|^2$ et par suite $a = 1$.
On a donc $\|x\|^2 \geqslant \|{}^tu(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ et par suite $y = 0$.

Il en résulte que $\mathrm{Ker}(u - I) \subseteq \mathrm{Ker}({}^tu - I)$. Comme ${}^tu$ est une contraction et ${}^t({}^tu) = u$, on peut échanger les rôles de u et ${}^tu$ et on obtient l'égalité souhaitée.

d) Compte tenu de l'égalité précédente et de la question 1), il vient

$$(\mathrm{Ker}(u - I))^{\perp} = (\mathrm{Ker}({}^tu - I))^{\perp} = \mathrm{Im}({}^t({}^tu - I)) = \mathrm{Im}(u - I)).$$

e) Si $x \in \mathbb{R}^n$, on décompose x suivant la somme orthogonale $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(u - I) \oplus \mathrm{Im}(u - I)$, en $x = a + b$ avec $b = c - u(c)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} s_m(x) - a &= s_m(a) - a + s_m(b) = s_m(b) \\ &= \frac{1}{m+1}\frac{(c - u(c)) + \cdots (u^m(c) - u^{m+1})(c)}{m+1} = \frac{1}{m+1}\left(c - u^{m+1}(c)\right). \end{aligned}$$

On a vu que u^{m+1} est encore une contraction, d'où :

$$\|s_m(x) - P(x)\| = \|s_m(x) - a\| \leqslant \frac{1}{m+1}\left(\|c\| + \|u^{m+1}(c)\|\right) \leqslant \frac{2}{m+1}\|c\|.$$

Il en résulte bien que $s_m(x)$ converge vers $P(x)$.

3. a) Si $x = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= (\cos(\omega)x_1 + \sin(\omega)x_2)^2 + (-\sin(\omega)x_1 + \cos(\omega)x_2)^2 + x_3^2 \\ \|u(x)\|^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|x\|^2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que u est une isométrie, donc une contraction.

b) On voit facilement que $\mathrm{Ker}(u - I) = \{(0, 0, t); t \in \mathbb{R}\}$. Il résulte alors de la question 2. e) que les moyennes considérées convergent vers le point $(0, 0, x_3)$.

Exercice 2.08.

Dans cet exercice, on étudie les matrices A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ (c'est-à-dire à coefficients dans $\mathbb{Z}$) vérifiant :

$$\text{il existe } p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } A^p = I_3$$

Dans toute la suite, soit A une telle matrice.

1. a) Montrer que la matrice A est inversible. Donner son inverse.

b) Déterminer les valeurs propres possibles de A.

On admet que la condition imposée entraîne que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

2. Montrer que si A admet une valeur propre complexe non réelle λ, alors elle admet aussi pour valeur propre le nombre complexe conjugué $\overline{\lambda}$.

On rappelle que pour toute matrice M, la trace de M est la somme de ses coefficients diagonaux et que deux matrices semblables ont même trace.

3. a) On suppose que A n'admet pas de valeur propre complexe non réelle. Montrer que $A^2 = I_3$.

b) On suppose que A admet une valeur propre complexe non réelle. Soit θ un argument de cette valeur propre. Montrer que $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$. Quelles sont les valeurs possibles de θ ?

c) Montrer que dans tous les cas on a $A^{12} = I_3$.

Solution

1. a) Comme $A^{p-1} \times A = I$, la matrice A est inversible et $A^{-1} = A^{p-1}$.

b) Si λ est une valeur propre de A alors $\lambda^p = 1$, ce qui entraîne que λ est une racine de l'unité d'ordre p.

2. Si $AX = \lambda X$, alors $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$: fin.

3. a) Si A n'a pas de valeur propre complexe, alors $\mathrm{spec}(A) \subset \{-1, 1\}$ (et même $\mathrm{spec}(A) \subset \{1\}$ si p est impair). Comme A est diagonalisable, elle est donc semblable à une matrice diagonale D telle que $d_{i,i} \in \{-1, 1\}$. On a donc $D^2 = I_3$ et il en est de même de A^2.

b) Si $\lambda = \mathrm{e}^{i\theta}$ est valeur propre non réelle, alors $\mathrm{e}^{-i\theta}$ l'est aussi et le terme manquant dans la réduite diagonale est nécessairement -1 ou 1 (sinon la trace serait complexe non réelle !) et comme la trace est même entière, on a $2\cos\theta \pm 1 \in \mathbb{Z}$.
Donc $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$ et $\cos\theta$ peut valoir $-1/2, 0, 1/2$ (-1 et 1 sont interdits car $\mathrm{e}^{i\theta}$ est non réel)
Bref θ peut valoir $\pi/3, \pi/4$ ou $2\pi/3$ (car on peut supposer $0 < \theta < \pi$)
Dans chaque cas $(\mathrm{e}^{i\theta})^{12} = (\pm 1)^{12} = 1$ et $D^{12} = I_3$, donc $A^{12} = I_3$. Le cas a) ne change pas la conclusion finale et on ne peut pas faire mieux que 12 car c'est le plus petit commun multiple des puissances adéquates possibles.

Exercice 2.09.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_k[X]$ l'ensemble de ces polynômes de degré au plus k. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}[X]$ pour ce produit scalaire est noté $F^{\perp}$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit le polynôme $L_j = \big(X^j(1-X)^j\big)^{(j)}$ (polynôme dérivé d'ordre j du polynôme $X^j(1-X)^j$).

1. a) Montrer que si $P(0) = P(1) = 0$, alors $\langle P', Q\rangle = -\langle P, Q'\rangle$.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que si 0 et 1 sont racines d'ordre k de P, alors $\langle P^{(k)}, Q\rangle = (-1)^k\langle P, Q^{(k)}\rangle$.

2. a) Déterminer, pour tout $j \geqslant 1$, le degré de L_j et montrer que L_j est orthogonal à $\mathbb{R}_{j-1}[X]$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(L_j)_{0\leq j\leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit un polynôme $A \in E$ non nul, et soit $f_A : E \to E$ l'application qui à tout polynôme $P \in E$ associe le reste de sa division euclidienne par A.

a) Montrer que f_A est un projecteur de E ; déterminer son noyau et son image.

b) Montrer que si A n'est pas de degré n et possède au moins une racine réelle α, alors f_A n'est pas un projecteur orthogonal.

Solution

1. a) Par intégration par parties on a :

$$\langle P', Q\rangle = [P(t)Q(t)]_0^1 - \langle P, Q'\rangle = -\langle P, Q'\rangle$$

b) D'après la caractérisation de l'ordre k d'une racine x_0, si 0 (resp. 1) est racine d'ordre k de P, alors c'est une racine d'ordre $k-1$ de P'.

On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la relation : pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, si 0 et 1 sont racines d'ordre k de P, alors $\langle P^{(k)}, Q\rangle = (-1)^k\langle P, Q^{(k)}\rangle$.
La relation est évidente pour $k = 0$; si elle est vraie à l'ordre k on la montre à l'ordre $k+1$ en appliquant l'hypothèse de récurrence à P' et Q puis en appliquant la question 1. a)

2. a) Le polynôme L_j est de degré $(j+j) - j = j$ (degré d'un produit et degré de la dérivée j-ième).
Comme 0 et 1 sont racines d'ordre j de $X^j(1-X)^j$, d'après 1. b), pour tout $Q \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$ on a :

$$(-1)^j\langle L_j, Q\rangle = \langle X^j(1-X)^j, Q^{(j)}\rangle = \langle X^j(1-X)^j, 0\rangle = 0$$

b) La famille $(L_j)_{0\leq j\leq n}$ est orthogonale, formée de vecteurs non nuls (d'après le degré) donc elle est libre ; comme $\dim(\mathbb{R}_{j-1}[X]) = j$ c'est une base.

Remarque : la base n'est pas orthonormale car $\|L_1\|^2 = \displaystyle\int_0^1 (1-2t)^2\,dt = \frac{1}{3}$.

3. a) Si $P_i = AQ_i + R_i$ avec $\deg R_i < \deg A$ ($i = 1$ ou 2), alors on a :

$$\lambda P_1 + P_2 = A(\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda R_1 + R_2),\text{ avec } \deg(\lambda R_1 + R_2) < \deg A.$$

Par unicité dans le théorème de division euclidienne, on a donc :

$$f_A(\lambda P_1 + P_2) = \lambda R_1 + R_2 = \lambda f_A(P_1) + f_A(P_2)$$

Puis :
$P \in \operatorname{Ker} f_A \iff R = 0 \iff P = AQ \iff P \in A\mathbb{R}[X] \cap E$, soit :

$$\operatorname{Ker} f_A = A.\mathbb{R}[X] \cap E$$

Il est clair que $\operatorname{Im} f_A \subset \mathbb{R}_{(\deg A)-1}[X]$; c'est une égalité car $f_A(R) = R$ si $R \in \mathbb{R}_{(\deg A)-1}[X]$, et cette relation prouve aussi que $f_A \circ f_A = f_A$.

b) Soit B tel que $A = (X-\alpha)B$, alors $B \in \mathbb{R}_{(\deg A)-1}[X] = \operatorname{Im} f_A$ et $(X-\alpha)A \in \operatorname{Ker} f_A$; or on a :

$$\langle (X-\alpha)A, B\rangle = \langle (X-\alpha)^2 B, B\rangle = \|(X-\alpha)B\|^2 = \|A\|^2 > 0$$

Donc $\operatorname{Im} f_A$ et $\operatorname{Ker} f_A$ ne sont pas orthogonaux.

Exercice 2.10.

Dans tout l'exercice n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A lorsque $R^2 = A$.

1. Déterminer toutes les racines carrées de la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Dans cette question, on s'intéresse aux racines carrées $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit R une telle matrice et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice R dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$; enfin, soit r le rang de f.

a) Comparer $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ et montrer que $r \leqslant n/2$.

On suppose $r \geqslant 1$; on note $\big(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{n-r}\big)$ une base de $\operatorname{Ker}(f)$ telle que $\big(e_1, \dots, e_r\big)$ soit une base de $\operatorname{Im}(f)$.

b) Justifier que, pour $i \in [\![1, r]\!]$, il existe un vecteur u_i de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(u_i) = e_i$. Montrer qu'alors la famille $\mathcal{B} = \big(e_1, \dots, e_{n-r}, u_1, \dots, u_r\big)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et expliciter la matrice M_r de f dans cette base.

c) En déduire une expression de toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont racines carrées de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Expliciter dans le cas $n = 4$.

3. Dans cette question, on s'intéresse aux racines carrées $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la matrice identité $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Déterminer les matrices diagonalisables $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont racines carrées de I_n.

Soit R une racine carrée de I_n ; on note encore f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice R dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f + id) \cap \mathrm{Ker}(f - id) = \{0\}$.

c) Déterminer deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P(X)(X + 1) + Q(X)(X - 1) = 1$$

En déduire que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f + id) \oplus \mathrm{Ker}(f - id)$.

d) Justifier que f est diagonalisable et en déduire toutes les solutions R cherchées.

Solution

1. On résout :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc & = 0 \\ d^2 + bc & = 0 \\ a\,(c + d) & = 0 \\ b\,(a + d) & = 0 \end{cases}$$

• Si $a = 0$, alors $bc = 0$, donc $d = 0$, et b ou c nul, donc $R = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, qui conviennent ;

• Si $a \neq 0$, alors $d = -c$ et $bc = -a^2 \neq 0$, donc $a + d = 0$, d'où $a = c = -d \neq 0$; puis $bc = -a^2$ donc $b = -a$; soit $R = \begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix}$ qui convient.

2. a) $f^2 = 0$ entraîne $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$; le théorème du rang donne $r + \dim[\mathrm{Ker}(f)] = n$, d'où $2r \leqslant n$.

b) Pour $i \in [\![1, r]\!], e_i \in \mathrm{Im}(f)$, donc a des antécédents par f ;

On a, en composant par f, puisque $f^2 = 0$ et $e_i \in \mathrm{Ker}(f)$ pour $i \in [\![r + 1, n - r]\!]$:

$$0 = \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i\, e_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j\, u_j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\, f(u_i) + \sum_{i=r+1}^{n-r} \alpha_i\, e_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j\, u_j$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{r} \beta_j\, f(u_j) = \sum_{j=1}^{r} \beta_j\, e_j = 0$$

donc tous les β_j sont nuls car $(e_1, \ldots, e_r)$ libre ; puis $\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i\, e_i = 0$ et tous les α_i sont nuls car $(e_1, \ldots, e_{n-r})$ libre ; ainsi $\mathcal{B}$ est libre de cardinal n donc est une base de E.

La matrice M_r est alors donnée par $M_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Ainsi, si R convient, on a $R = 0$ ou R est semblable à une matrice M_r avec $r \leq n/2$. Réciproquement toutes ces matrices conviennent.

Pour $n = 4$, $R = 0$ ou R semblable à :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. a) Si $P^{-1}RP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, alors :

$$\begin{aligned} R^2 = I_n &\iff \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2) = I_n \\ &\iff \forall i, \lambda_i \in \{-1, 1\}\,; \end{aligned}$$

Réciproquement, ces matrices conviennent.

b) Un vecteur u appartenant à $\mathrm{Ker}(f + id) \cap \mathrm{Ker}(f - id)$ vérifie $u = f(u) = -u$ donc $u = 0$.

c) Les polynômes $P = 1/2$ et $Q = -1/2$ conviennent ; en appliquant à f on a

$$\frac{1}{2}(f + id) - \frac{1}{2}(f - id) = id\,;$$

et en appliquant à $u \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{2}(f + id)(u) - \frac{1}{2}(f - id)(u) = u$$

On a : $u_1 = \frac{1}{2}(f + id)(u) \in \mathrm{Ker}(f - id)$ car $f^2 - id = 0$, et de même $u_2 = -\frac{1}{2}(f - id)(u) \in \mathrm{Ker}(f + id)$; d'où le résultat puisque l'on sait que l'intersection est réduite au vecteur nul.

d) $\mathbb{R}^n$ est somme directe de sous-espaces de f, donc f est diagonalisable et la question 3. a) donne toutes les solutions.

Exercice 2.11.

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Pour tout couple (k, ℓ) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, $E_{k,\ell}$ désigne la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé sur la k-ème ligne et la ℓ-ème colonne vaut 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls.

On rappelle que $(E_{k,\ell})_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout réel K, on définit les ensembles :

- $L_K = \{M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \forall\, i \in [\![1, n]\!], \sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j} = K\}$.

- $C_K = \{M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \forall\, j \in [\![1, n]\!], \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j} = K\}$.
- $L = \bigcup\limits_{K\in\mathbb{R}} L_K$, $C = \bigcup\limits_{K\in\mathbb{R}} C_K$.

1. a) Montrer que L_0 est un espace vectoriel.

b) Montrer que L_0 est engendré par la famille de matrices :

$$(E_{i,j} - E_{i,n})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n-1]\!]}$$

c) Déterminer la dimension de L_0.

2. a) Soit K un réel.
Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à L_K si et seulement si $M - K.I_n$ appartient à L_0.

b) Montrer que $L = \mathrm{Vect}\{I_n\} \oplus L_0$ puis en déduire la dimension de L.

3. a) Soit $M = (m_{i,j}) \in L_0$. Montrer que M appartient à C_0 si et seulement si, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j} = 0$.

b) En déduire une base et la dimension de $L_0 \cap C_0$.

4. a) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à $L \cap C$ si et seulement s'il existe un réel K tel que M appartienne à $L_K \cap C_K$.

b) Déterminer la dimension de l'espace $L \cap C$.

Solution

1. a) Notons U la matrice colonne dont tous les éléments valent 1 :

$$M \in L_0 \iff MU = 0 \text{ (colonne nulle)},$$

donc L_0 est le noyau de l'application $\varphi : M \mapsto MU$, qui est clairement linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: L_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) $M \in L_0 \iff \forall\, i, m_{i,n} = -\sum\limits_{j=1}^{n-1} m_{i,j}$.

Ainsi, en utilisant la décomposition de M dans la base des $E_{i,j}$:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}(E_{i,j} - E_{i,n}) \in \mathrm{Vect}\{E_{i,j} - E_{i,n},\ (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n-1]\!]\}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que ces matrices $E_{i,j} - E_{i,n}$ sont bien dans L_0, ce qui donne la réponse à la question

c) La famille $(E_{i,j} - E_{i,n})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n-1]\!]}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, soit $(m_{i,j})$ une famille de scalaires telle que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}(E_{i,j}-E_{i,n}) = 0$.
Alors : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}E_{i,j} - \sum_{i=1}^{n}\big(\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}\big)E_{i,n} = 0$ et, pour tout (i,j), $m_{i,j} = 0$.
Ainsi, c'est une base de L_0 et comme elle contient $n(n-1)$ éléments $\dim L_0 = n(n-1)$.
(on pouvait aussi remarquer que φ est surjective, car pour $M = (C|0|\dots|0)$, on a $\varphi(M) = C$ et appliquer le théorème du rang)

2. a) $M \in L_K \iff MU = KU \iff (M - KI_n)U = 0 \iff M - KI_n \in L_0$.
b) $M \in L \iff \exists\, K \in \mathbb{R}$ tel que $M \in L_K \iff \exists\, K, M - KI_n \in L_0$
$\iff M \in \mathrm{Vect}\{I_n\} + L_0$.
$L_0 \cap \mathrm{Vect}\{I_n\} = \{0\}$ étant clair, on a : $L = \mathrm{Vect}\{I_n\} \oplus L_0$.
D'après la formule de Grassmann : $\dim L = 1 + n(n-1)$.

3. a) Soit $M \in L_0$. La somme des éléments de chaque ligne est nulle, donc la somme de tous les coefficients est nulle et la somme des éléments de chaque colonne est nulle si et seulement si la somme des éléments de chacune des $n-1$ premières colonnes est nulle :

$$\text{Si } M \in L_0,\ M \in C_0 \iff \forall\, j \in [\![1, n-1]\!],\ \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0.$$

b) En utilisant un raisonnement analogue au précédent, ou en transposant, on montre que C_0 est un espace vectoriel. Ainsi, $L_0 \cap C_0$ est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $L_0 \cap C_0$ est un espace vectoriel.
Un élément de $L_0 \cap C_0$ est donc parfaitement déterminé par son bloc $(n-1, n-1)$ situé en haut à gauche.
Il est donc combinaison linéaire des matrices $E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n}$ (pour ajuster la nullité par ligne et par colonne, ainsi que pour la dernière ligne et la dernière colonne)
Ainsi, la famille $(E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})_{(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2}$ est une famille génératrice (et libre par un argument analogue à celui de la question 1.b)) de $L_0 \cap C_0$ donc c'est une base de $L_0 \cap C_0$. Ainsi :

$$\dim L_0 \cap C_0 = (n-1)^2$$

4. a) On raisonne par double implication. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
($\Longleftarrow$) S'il existe un réel K tel que $M \in L_K \cap C_K$, alors $M \in L \cap C$.
($\Longrightarrow$) On suppose que $M \in L \cap C$. Alors, il existe $K, K' \in \mathbb{R}$ tels que $M \in L_K$ et $M \in C_{K'}$. Ainsi, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = K$, $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = K'$

Ainsi : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = nK = nK'$ et $K = K'$, donc $M \in L_K \cap C_K$.
Finalement, $M \in L \cap C$ si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $M \in L_K \cap C_K$.

b) Ainsi $M \in L \cap C$ si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $M - KI_n \in L_0 \cap C_0$.
Donc, $L \cap C = \mathrm{Vect}\{I_n\} \oplus (L_0 \cap C_0)$, et $\dim L \cap C = 1 + (n-1)^2$.

Exercice 2.12.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note I_n la matrice identité d'ordre n. Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes.

1. a) Montrer que si A est diagonalisable, alors A^2 l'est également.

b) En s'intéressant à la matrice d'ordre $n \geqslant 2$ qui a un 1 dans le coin supérieur droit et des 0 partout ailleurs, montrer que la réciproque est fausse.

2. Montrer que si A est diagonalisable, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ **deux à deux distincts** tels que :

$$(A - \alpha_1 I_n) \cdots (A - \alpha_k I_n) = 0.$$

3. On veut montrer la réciproque en terme d'endomorphismes, à savoir :
« pour tout endomorphisme f d'un espace vectoriel complexe E de dimension finie, s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts tels que :

$$(f - \alpha_1 id_E) \circ \cdots \circ (f - \alpha_k id_E) = 0,$$

alors f est diagonalisable »
On procède par récurrence sur $k \geqslant 1$.

a) Pour tout $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1} \in \mathbb{C}$, deux à deux distincts, montrer qu'il existe un polynôme P et un nombre complexe β tels que qu'on ait l'égalité suivante entre polynômes :

$$1 = (X - \alpha_{k+1})P + \beta(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_k).$$

b) On suppose que le résultat voulu est vrai pour l'entier k et que l'on a un endomorphisme f (d'un espace E de dimension finie) et des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1} \in \mathbb{C}$, deux à deux distincts tels que :

$$(f - \alpha_1 id_E) \circ \cdots \circ (f - \alpha_k id_E) \circ (f - \alpha_{k+1} id_E) = 0.$$

i) Montrer que le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Im}(f - \alpha_{k+1} id_E)$ est stable par f.
On note alors g l'endomorphisme de F défini par : $\forall\, v \in F,\ g(v) = f(v)$.

ii) Calculer $(g - \alpha_1 id_F) \circ \cdots \circ (g - \alpha_k id_F)$.

iii) Montrer que tout vecteur $v \in F$ s'écrit sous la forme :
$v = v_1 + \cdots + v_k,$ avec $v_j \in \mathrm{Ker}(f - \alpha_j id_E)$ pour tout j de $[\![1, k]\!]$.

c) Conclure.

4. Montrer que si A^2 est diagonalisable et A est inversible, alors A est diagonalisable.

Solution

1. Si A est diagonalisée en $A = P\Delta P^{-1}$, alors $A^2 = P\Delta^2 P^{-1}$ et Δ^2 est encore diagonale.
Contre-exemple de la réciproque : la dite matrice A est triangulaire supérieure avec les 0 sur la diagonale donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc serait la matrice nulle, ce qui n'est pas.
Par ailleurs A^2 est nulle donc diagonalisable, car diagonale.

2. Si $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ sont les valeurs propres de A (sans répétition) et si on diagonalise A en $A = P\Delta P^{-1}$, en posant $M = (X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_k)$, le calcul donne bien :

$$(A - \alpha_1 I_n)\cdots(A - \alpha_k I_n) = M(A) = PM(\Delta)P^{-1} = 0$$

3. a) Par division euclidienne de $(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_k)$ par $(X - \alpha_{k+1})$, il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_k) = Q(X - \alpha_{k+1}) + R, \text{ avec } \deg R < \deg(X - \alpha_{k+1}) = 1$$

Ainsi R est une constante, qui ne peut être nulle, sinon α_{k+1} serait racine de $(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$, ce qui est impossible car $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ sont distincts.
On conclut en divisant l'égalité par R et en prenant $\beta = \dfrac{1}{R}$ et $P = -\dfrac{1}{R}Q$.

b) i) Pour tout $v \in F$, il existe $u \in E$ tel que $v = (f - \alpha_{k+1}id)(u)$; alors :

$$f(v) = (f \circ (f - \alpha_{k+1}id))(u) = (f - \alpha_{k+1}id)(f(u)) \in \mathrm{Im}(f - \alpha_{k+1}id) = F$$

ii) $(g - \alpha_1 id_F) \circ \cdots \circ (g - \alpha_k id_F)(v) =$

$$((f - \alpha_1 id) \circ \cdots \circ (f - \alpha_k id) \circ (f - \alpha_{k+1}id))(u) = 0$$

iii) D'après l'hypothèse de récurrence à l'ordre k, l'endomorphisme g est diagonalisable ; de plus comme on dispose d'un polynôme annulateur, les valeurs propres possibles sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, et donc :

$$F = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(g - \alpha_k id_F)$$

d'où le résultat annoncé.

c) D'après 3. a), en remplaçant X par f, puis en évaluant en $v \in E$ quelconque, d'après 3. b), on a :

$$v = \beta(f-\alpha_1 id)\cdots(f-\alpha_k id)(v) + \underbrace{(f-\alpha_{k+1}id)(P(f)(v))}_{\in \mathrm{Im}(f-\alpha_{k+1}id)}$$

$$= \underbrace{\beta(f-\alpha_1 id)\cdots(f-\alpha_k id)(v)}_{\in \mathrm{Im}(f-\alpha_1 id)\cdots(f-\alpha_k id)\subset \ker(f-\alpha_{k+1}id)} + v_1 + \cdots + v_k \text{ avec } v_j \in \ker(f-\alpha_j id)$$

Ainsi la somme des espaces $\ker(f-\alpha_1 id),\dots,\ker(f-\alpha_k id),\ker(f-\alpha_{k+1}id)$ contient E, donc f est diagonalisable.
On conclut par récurrence sur k en remarquant que le cas $k=1$ (*i.e.* $f=\lambda_1 id$) est évident.

4. A^2 est diagonalisable, d'après la question 2 précédente il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ distincts tels que

$$(A^2-\alpha_1 I_n)\cdots(A^2-\alpha_k I_n)=0$$

Comme A est inversible, il en est de même de A^2 ; donc, quitte à simplifier l'égalité ci-dessus par A^2 si l'un des α_i vaut 0, on peut supposer que tous les $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ sont non nuls.
Alors l'équation $z^2=\alpha_j$ possède deux solutions z_j et $-z_j$ non nulles, donc l'égalité précédente s'écrit :

$$(A-z_1 I_n)(A+z_1 I_n)\cdots(A-z_k I_n)(A+z_k I_n)=0$$

Les nombres $z_1,-z_1,\dots,z_k,-z_k$ sont distincts, donc A est diagonalisable d'après le résultat de la question 3.

Exercice 2.13.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E tel que :

$$3f^3-f^2-f-Id_E=0$$

1. a) Factoriser $T=3X^3-X^2-X-1$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que T admet une unique racine réelle et deux racines complexes conjuguées notées α et $\overline{\alpha}$.

c) Calculer $\alpha+\overline{\alpha}$ et $\alpha\overline{\alpha}$.

2. On considère les trois polynômes :

$$L_1(X)=\frac{(X-1)(X-\alpha)}{(\overline{\alpha}-1)(\overline{\alpha}-\alpha)},\ L_2(X)=\frac{(X-1)(X-\overline{\alpha})}{(\alpha-1)(\alpha-\overline{\alpha})},$$

$$L_3(X)=\frac{(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})}{(1-\alpha)(1-\overline{\alpha})}$$

Montrer que (L_1,L_2,L_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

3. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on appelle R_n le reste dans la division euclidienne de X^n par T.

a) Expliciter R_0, R_1 et R_2.

b) Expliciter R_3.

c) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$R_n = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3.$$

d) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f)$.

e) Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n et de α.

f) Montrer que les suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont convergentes de limites respectives notées a, b, c.

g) On pose $h = aL_1(f) + bL_2(f) + cL_3(f)$, montrer que h est un projecteur.

Solution

1. a) On constate que $T(1) = 0$, d'où $T(X) = (X-1)(3X^2 + 2X + 1)$. Le polynôme du second degré $Q(X) = 3X^2 + 2X + 1$ a un discriminant strictement négatif : il n'a donc pas de racine réelle et ne se factorise pas davantage dans $\mathbb{R}[X]$.

b) La question précédente montre que T admet une seule racine réelle 1 et deux racines complexes conjuguées qui sont les racines de $Q(X) = 3X^2 + 2X + 1$.

c) Avec $3X^2 + 2X + 1 = 3(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$, on obtient : $\alpha + \overline{\alpha} = -\dfrac{2}{3}$, $\alpha\overline{\alpha} = \dfrac{1}{3}$.

2. Comme on a une famille de trois polynômes dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$ de dimension 3, il suffit de montrer que la famille est libre pour pouvoir en conclure que c'est une base.
Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\lambda L_1(X) + \mu L_2(X) + \nu L_3(X) = 0$.
→ En évaluant en 1, comme $L_1(1) = L_2(1) = 0$, on trouve $\nu = 0$.
→ En évaluant en α, comme $L_1(\alpha) = L_3(\alpha) = 0$, on trouve $\mu = 0$.
→ En évaluant en $\overline{\alpha}$, comme $L_2(\overline{\alpha}) = L_3(\overline{\alpha}) = 0$, on trouve $\lambda = 0$.
La famille (L_1, L_2, L_3) est donc libre. C'est ainsi une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

3. a) Facilement : $R_0(X) = 1$, $R_1(X) = X$ et $R_2(X) = X^2$.

b) La division euclidienne de X^3 par T s'écrit $X^3 = \dfrac{1}{3}T + \dfrac{1}{3}(X^2 + X + 1)$ avec pour quotient $Q_3 = \dfrac{1}{3}$ et pour reste $R_3 = \dfrac{1}{3}(X^2 + X + 1)$ de degré $2 < 3$.

c) Par définition de la division euclidienne, le degré du polynôme R_n est strictement inférieur au degré du polynôme par lequel on divise : T,*i.e.* $\deg(R_n) < 3$. Donc, $R_n \in \mathbb{C}_2[X]$.

Comme (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$, il existe un unique triplet (a_n, b_n, c_n) dans $\mathbb{C}^3$ tel que $R_n = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3$.

d) Par définition de la division euclidienne, il existe un unique couple de polynômes (Q_n, R_n) tel que

$$X^n = T(X)Q_n(X) + R_n(X) \qquad (**)$$

avec $\deg(R_n) < 3$. En évaluant cette égalité polynomiale pour $X = f$ et en se rappelant que, par hypothèse, $T(f) = 0$, on trouve :

$$f^n = R_n(f) = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f).$$

e) On vient de voir que $X^n = T(X)Q_n(X) + R_n(X) \qquad (**)$.
En évaluant en 1, comme $T(1) = 0$, $L_1(1) = 0$, $L_2(1) = 0$ et $L_3(1) = 1$, on trouve

$$1 = R_n(1) = a_n L_1(1) + b_n L_2(1) + c_n L_3(1) = c_n$$

De même, en évaluant $(**)$ en α, comme $T(\alpha) = 0$, $L_1(\alpha) = 0$, $L_2(\alpha) = 1$ et $L_3(\alpha) = 0$, on trouve

$$\alpha^n = R_n(\alpha) = a_n L_1(\alpha) + b_n L_2(\alpha) + c_n L_3(\alpha) = b_n$$

Enfin, en évaluant $(**)$ en $\overline{\alpha}$:

$$\overline{\alpha}^n = R_n(\overline{\alpha}) = a_n L_1(\overline{\alpha}) + b_n L_2(\overline{\alpha}) + c_n L_3(\overline{\alpha}) = a_n$$

f) On a $|\alpha| < 1$. Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{\alpha}^n = 0$.
Par conséquent, les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0, alors que la suite (c_n) qui est constante converge vers 1.

g) On a donc : $h = L_3(f) = \dfrac{(f - \alpha id)(f - \overline{\alpha} id)}{(1-\alpha)(1-\overline{\alpha})} = \dfrac{1}{2}(f^2 + \dfrac{2}{3} f + \dfrac{1}{3} id)$

Il reste à vérifier que $h \circ h = h$, ce qui se fait simplement en développant et en remplaçant f^3 et f^4 par leurs expressions en fonction de $id, f, f^2 \dots$

Exercice 2.14.

1. Soit la matrice $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice F dans la base canonique, notée $\mathcal{C}$.

a) Déterminer le noyau et l'image de f, et vérifier qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme (par blocs) :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in GL_2(\mathbb{R})$$

c) Déterminer un polynôme annulateur P de f de la forme $P(X) = XQ(X)$, avec $Q(0) \neq 0$.

Plus généralement, soit un entier $n \geqslant 2$ et g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ non injectif. On note r son rang.

2. On suppose que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(g) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

a) Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de g est de la forme (par blocs) :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \ A \in GL_r(\mathbb{R})$$

b) En déduire qu'il existe un polynôme annulateur P de g tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

3. On suppose maintenant qu'il existe un polynôme annulateur P de g de la forme $P(X) = XQ(X)$ avec $Q(0) \neq 0$; on note $K = \mathrm{Ker}\left[Q(g)\right]$.

a) Montrer par double inclusion que $K = \mathrm{Im}(g)$.

b) Déterminer deux polynômes C et B tels que $C(X)Q(X) + B(X)X = 1$.

c) En déduire que $K \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.

d) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(g) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

Solution

1. a) On a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Ces deux sous-espaces vectoriels sont bien supplémentaires car d'intersection nulle et de dimensions *ad hoc*..

b) Il suffit de prendre $\mathcal{B}$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$; alors $A = \mathcal{M}(f|_{\mathrm{Im}(f)})$ est inversible. Par exemple :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ donne } M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) La matrice M est triangulaire et a pour valeurs propres 0, 1 et 2, donc est diagonalisable et semblable à $D = \mathrm{diag}(2, 1, 0)$ qui annule le polynôme $P(X) = X(X-1)(X-2)$, donc M aussi.

2. a) Procédons comme ci-dessus : on prend $\mathcal{B}$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(g) \oplus \mathrm{Ker}(g)$; alors $A = M(g|_{\mathrm{Im}(f)})$ est inversible.

b) A admet un polynôme annulateur $R = X^k Q$, avec $Q(0) \neq 0$; et A inversible donne $Q(A) = 0$. Alors $P = XQ$ convient.

3. a) Soit $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{q} a_k\, X^k$, avec $a_0 = Q(0) \neq 0$.

• $y = g(x) \in \mathrm{Im}(g) \implies 0 = P(g)(x) = Q(g)\circ g(x) = Q(g)(y)$; donc $\mathrm{Im}(g) \subset K$;

• $x \in K \implies 0 = Q(g)(x) = \sum\limits_{k=0}^{q} a_k\, g^k(x) \implies x = \dfrac{-1}{a_0}\sum\limits_{k=1}^{q} a_k g^k(x) \in \mathrm{Im}(g)$; d'où $K \subset \mathrm{Im}(g)$.

b) En prenant $C = \dfrac{1}{a_0}$ et $B(X) = \sum\limits_{k=0}^{q-1} b_k X^k$, on a :

$$\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{q} a_k X^k + \sum_{k=0}^{q-1} b_k X^{k+1} = 1 \iff \forall k, b_k = -\frac{a_{k+1}}{a_0}$$

c) D'après la question b) :

$x \in K \cap \mathrm{Ker}(g) \implies x = C(g)\circ Q(g)(x) + B(g)\circ g(x) = 0.$

d) $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont d'intersection nulle donc sont en somme directe, et ils sont supplémentaires grâce au théorème du rang.

Exercice 2.15.

Dans tout cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note :

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \exists\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{tel que } A = B^p\}$$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est diagonalisable.

b) Montrer que $A \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \notin \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $N^n = 0$. Montrer que $N \notin \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

4. Dans cette question N est une matrice non nulle, telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$. On pose $A = I_n + N$.

a) Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On suppose qu'au voisinage de 0, on a : $V(x) = o(x^q)$, où $q \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $V(X) = X^q Q(X)$.

c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $U_q \in \mathbb{R}[X]$ tel qu'au voisinage de 0 on a : $1 + x = (U_q(x))^p + o(x^q)$.
(On pourra utiliser le développement limité de $(1+x)^\alpha$).

d) En déduire que $I_n + N \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Solution

1. a) La matrice A est triangulaire supérieure : ses valeurs propres se lisent sur la diagonale. Ce sont : $1, 2, 4$. La matrice A d'ordre 3 admet 3 valeurs propres réelles : elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b) On peut écrire $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $D_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{1/p} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{1/p} \end{pmatrix}$.

Alors $B = PD_pP^{-1}$ vérifie $A = B^p$.

2. Montrons qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Par l'absurde si $B^2 = A$, alors $AB = BA = B^3$.
La matrice A est diagonale avec deux éléments distincts. La commutation montrer qu'alors B est également diagonale et $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Ainsi $B^2 = A$ entraîne $b^2 = -2$ qui n'a pas de solutions réelles.

3. a) Soit q l'ordre de nilpotence de N, soit $N^q = 0$ et $N^{q-1} \neq 0$. Ainsi, il existe un vecteur x non nul tel que $N^{q-1}(x) \neq 0$ et on montre (classiquement) que la famille $(x, N(x), \ldots, N^{q-1}(x))$ est libre. Son cardinal q vérifie donc $q \leqslant n$ et $N^n = 0$.

b) Supposons que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice B telle que $B^p = N$. Alors $B^{pq} = N^q = 0$ et par la question précédente $pq \leqslant n$, ce qui est impossible pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

4. a) Une matrice nilpotente N n'admet comme valeur propre que 0 ; donc $A = I + N$ admet comme unique valeur propre 1 (travailler sur l'équation $AX = \lambda X$). La matrice A ne peut donc pas être diagonalisable car sinon elle serait semblable (donc égale) à I et N serait nulle.

b) L'hypothèse : au voisinage de 0, le polynôme V vérifie $V(x) = o(x^q)$ signifie que V s'écrit sous la forme :

$$V(X) = a_\ell X^\ell + \cdots + a_n X^n$$

avec $\ell \geqslant q + 1$ et $a_\ell \neq 0$. Donc $V(X) = X^\ell R(X) = X^q Q(X)$.

c) Le développement limité de $(1 + x)^{1/p}$ au voisinage de 0 à l'ordre q donne :

$$(1 + x)^{1/p} = 1 + \frac{x}{p} + \cdots + \frac{\alpha_q}{q!} x^q + o(x^q) = P_q(x) + o(x^q)$$

En élevant à la puissance p, et en développant la puissance, il vient :

$$1 + x = (P_q(x) + o(x^q))^p = U^p(x) + o(x^q)$$

d) Par les questions précédentes $1 + X = U^p(x) + o(x^q) = U^p(X) + X^q Q(x)$.

5. Soit q l'indice de nilpotence de N. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En remplaçant formellement la dernière équation par la matrice N, il vient :

$$I + N = U^p(N) + N^q Q(N) = U^p(N) = (U(N))^p$$

Exercice 2.16.

On rappelle qu'une matrice symétrique M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es dite *définie positive* si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, on a ${}^tXMX > 0$.

1. Soit M une matrice symétrique réelle. Montrer l'équivalence des quatre propositions suivantes :

i) M est définie positive.

ii) Les valeurs propres de M sont strictement positives.

iii) Il existe une matrice P orthogonale, une matrice D diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telles que $M = PD{}^tP$.

iv) Il existe une matrice L inversible et symétrique telle que $M = L^2$.

2. Soit A et B deux matrices symétriques réelles avec B définie positive. Par la question précédente, on écrit $B = {}^tLL$.
Trouver une matrice C symétrique réelle telle que pour tout réel λ, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$AX = \lambda BX \text{ si et seulement si } CZ = \lambda Z, \text{ avec } Z = LX$$

3. a) Montrer que l'application Φ définie sur $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ par $\Phi(X, Y) = {}^tXBY$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels tels que $Ae_i = \lambda_i Be_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Solution

1. Montrons les équivalences demandées.
i) $\Rightarrow$ *ii)* : soit X tel que $AX = \lambda X$. Alors ${}^tXAX = \lambda ||X||^2$ ce qui entraîne que $\lambda > 0$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* : la matrice A est symétrique à valeurs propres strictement positives ; elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres et la matrice diagonale est à diagonale strictement positive.

iii) $\Rightarrow$ *iv)* : si $A = PD^tP$ en notant Δ la matrice diagonale dont les éléments sont les racines carrées positives des éléments de D, il vient $A = P\Delta^tP \times P\Delta^tP = {}^tLL$, avec L inversible. De plus L est symétrique

iv) $\Rightarrow$ *i)* : la matrice ${}^tLL$ est symétrique réelle.
Si $A = {}^tLL$, alors ${}^tXAX = ||LX||^2 \geqslant 0$. Enfin ${}^tXAX = 0 = ||LX||^2$ entraîne $LX = 0$ et $X = 0$ puisque L est inversible.

2. L'équation $AX = \lambda BX$ s'écrit $AX = \lambda^tLLX$ ou ${}^t(L^{-1})AX = \lambda LX$. On remarque alors que ceci est équivalent à :

$$^t(L^{-1})AL^{-1}LX = \lambda LX, \text{ soit } {}^t(L^{-1})AL^{-1}Z = \lambda Z$$

On pose donc $C = {}^t(L^{-1})AL^{-1}$ et on vérifie que C est symétrique réelle.

3. a) La matrice B étant symétrique définie positive, on écrit $B = {}^tLL$ et ceci montre que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) La matrice C est symétrique. Il existe donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de C orthonormée pour la produit scalaire canonique. Donc $(Z_1, \ldots, Z_n)$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tels que :

$$CZ_i = \lambda_i Z_i \text{ et } \langle Z_i, Z_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Par la question 2. a) il existe $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, avec $X_i = L^{-1}Z_i$ tels que $AX_i = \lambda_i BX_i$.
Il reste à montrer que cette famille est orthonormée pour le produit scalaire Φ. Or :

$$\Phi(X_i, X_j) = {}^tX_jBX_i = {}^tZ_jL^{-1}L^2L^{-1}Z_j = {}^tZ_jZ_j = \delta_{i,j}$$

Exercice 2.17.

On considère l'équation différentielle : (E) : $\dfrac{x^2-1}{2}f'(x) = xf(x)$.

1. a) Déterminer les solutions de (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$.

b) Quelles sont les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$?

Soit n un entier naturel au moins égal à 3 On considère l'application f_n qui, à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, associe : $f_n(P) = \dfrac{X^2-1}{2}P''(X) - XP'(X) + P(X)$.

2. Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Établir que 1 est valeur propre de f_n et déterminer le sous-espace propre associé.

4. Déterminer Ker f_n.

5. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles les seules valeurs propres de f_n sont 0 et 1 ? Montrer que dans ce cas f_n est un projecteur.

Solution

1. a) Pour tout x différent de 1 et de -1, l'équation proposée s'écrit :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1} f(x)$$

D'après le cours, les solutions sont les fonctions $x \mapsto f(x) = K|x^2 - 1| = C(x^2 - 1)$ sur chacun des intervalles proposés.

b) Pour déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit de « raccorder » chaque solution précédente en 1 et -1. Comme chaque fonction s'annule en ces points, le raccord de f et f' se fait sans problème et les solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont polynomiales $f(x) = k(x^2 - 1)$.

2. La linéarité provient de la définition de l'addition des fonctions et de leur produit par un réel, ainsi que de la linéarité de la dérivation. De plus $f_n(P)$ est un polynôme en tant que produit et somme de polynômes.
En termes de degré, si P est de degré inférieur ou égal à n, il en est de même de XP' et de $(X^2 - 1)P''$ donc $f_n(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. L'égalité $f_n(P) = P$ équivaut à $\dfrac{X^2-1}{2} P''(X) = XP'(X)$. Par conséquent, les polynômes P cherchés sont tels que leur dérivée est solution de l'équation étudiée à la première question. On a donc

$$P = k\big(\frac{X^3 - 3X}{3}\big) + k' = K_1(X^3 - 3X) + K_2$$

On vérifie aisément que ces polynômes sont effectivement solutions de l'équation.

Ainsi 1 est valeur propre de f_n et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}(X^3 - 3X, 1)$ qui est de dimension 2.

4. a) Soit $k > 0$ et $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i X^i$ avec $a_k \neq 0$ puisque les polynômes constants ne sont pas dans $\mathrm{Ker}\, f_n$ d'après la question précédente.
Dès lors, en regardant les termes dominants, il vient :

$$a_k\big(\frac{k(k-1)}{2} - k + 1\big) = \frac{(k-1)(k-2)}{2} a_k$$

Ainsi $f_n(P) = 0$ si et seulement si $k \in \{1, 2\}$.

b) On cherche alors les éléments de $\mathrm{Ker}\, f_n$ sous la forme $a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et il vient $\mathrm{Ker}\, f_n = \mathrm{Vect}(X, 1 + X^2)$ qui est de dimension 2.

5. a) D'après ce qui précède, la somme des dimensions des sous-espaces propres, $\mathrm{Ker}(f_n - I)$ et $\mathrm{Ker}\, f_n$, associés aux valeurs propres 0 et 1, est égale

à 4, qui est la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$ donc f_n n'a pas d'autre valeur propre que 0 et 1.

b) On sait que $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Ker}(f_3) \oplus \mathrm{Ker}(f_3 - I)$.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X], P = P_0 + P_1$ et $f_3(P) = f_3(P_1) = P_1$.
Cela démontre que $f_3^2 = f_3$.

Exercice 2.18.

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
Soit u un endomorphisme de E tel que $\forall\, x \in E, \langle u(x), x\rangle = 0$.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = (\mathrm{Ker}(u))^{\perp}$.

3. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u.

4. Montrer que si u n'est pas l'endomorphisme nul, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

avec A une matrice de $GL_k(\mathbb{R})$ et $1 \leqslant k \leqslant n$.

5. Montrer que si u n'est pas l'endomorphisme nul, la matrice A construite à la question précédente est antisymétrique (c'est-à-dire est telle que ${}^tA = -A$).

<u>Solution</u>

1. Soient x et y deux vecteurs de E.
Appliquons l'hypothèse $\langle u(x), x\rangle = 0$ au vecteur $x + y$.

On obtient par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle u(x+y), x+y\rangle = 0 \implies \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle = 0$$

En réutilisant la même hypothèse, le premier et le dernier terme disparaissent et l'on a bien $\langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle = 0$, d'où le résultat demandé, grâce à la symétrie du produit scalaire.

2. Soient x dans $\mathrm{Ker}(u)$ et y dans $\mathrm{Im}(u)$: Il existe un z de E tel que $y = u(z)$. Or, $\langle u(z), x\rangle = -\langle z, u(x)\rangle$ d'après la question précédente. Mais $u(x) = 0$, donc le produit scalaire $\langle z, u(x)\rangle$ est nul et finalement $\langle y, x\rangle = 0$.

On a donc montré que tout vecteur de $\mathrm{Ker}(u)$ est dans l'orthogonal de $\mathrm{Im}(u)$, soit $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Im}(u)^{\perp}$.
Comme on est en dimension finie, le théorème du rang donne :

$$\dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = n$$

mais aussi $\dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(u)^{\perp}) = n$ par supplémentarité.

Ainsi $\text{Ker}(u)$ et $(\text{Im}(u)^{\perp}$ étant deux sous-espaces de E de même dimension finie inclus l'un dans l'autre, ils sont égaux.

3. Soit $y \in \text{Im}(u)$. On veut montrer que $u(y) \in \text{Im}(u)$, ce qui est immédiat, car $u(y)$ par construction est l'image par u de y, donc elle est bien dans $\text{Im}(u)$.

4. Comme u n'est pas nul, son image n'est pas réduite à $\{0_E\}$.
Si $\text{Ker}(u)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$, soit $b = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de $\text{Ker}(u)$ [qui n'est pas égal à E car $u \neq 0_{\mathcal{L}(E))}$], et $b' = (e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\text{Ker}(u)^{\perp} = \text{Im}(u) \neq \{0_E\}$.
Comme $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont ici supplémentaires orthogonaux (voir question 1.), on a bien la possibilité de construire une telle base $(e_1, \dots e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ qui est de fait une base orthonormée de E.

Dans cette base, la matrice de u a ses p premières colonnes nulles, puisque $(e_1, \dots, e_p)$ sont dans $\text{Ker}(u)$.
Ensuite, $\text{Im}(u)$ étant stable par u cela fournit les zéros des $n - p$ premières lignes de la partie supérieure des $n - p = k$ dernières colonnes. Enfin, si l'on note $\hat{u}$ l'induit par u dans $\text{Im}(u)$, et A la matrice de $\hat{u}$ dans la base b, on a bien :

$$B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Il reste à vérifier que A est inversible :
$\text{Ker}(\hat{u}) = \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$ d'après une propriété du cours des restrictions d'endomorphismes à un sous-espace vectoriel. Mais ici $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont supplémentaires, l'intersection est donc réduite à $\{0_E\}$. Donc $\text{Ker}(\hat{u}) = \{0_E\}$ et A est bien inversible.

b) Il reste le cas où $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$. Dans ce cas, la base canonique fait l'affaire, A occupe toute la place, il n'y a pas de colonne de zéros, et A est inversible car u est bijective, c'est un isomorphisme de E et $k = n$.

5. Avec les notations précédentes,
$$k = \text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)) \text{ et } p = \dim(\text{Ker}(u)) = n - k.$$
Renumérotons les vecteurs de la base orthonormée précédente de $\text{Im}(u)$: $v_1 = e_{p+1}$, …, $v_k = e_{p+k}$.
On a déjà vu plus haut que $\text{Im}(u)$ est stable par u.
Mais de plus, pour tous i et j de 1 à k, $(u(v_i), v_j) = -(v_i, u(v_j))$, et la base b' étant orthonormée, $(u(v_i), v_j)$ représente l'élément situé à l'intersection de la ligne i, et de la colonne j de la matrice A, car c'est la i-ième coordonnée du vecteur $u(v_j)$ dans la base orthonormée $b' = (v_1, \dots, v_k)$. Et finalement, pour tous i et j de 1 à k, $a_{i,j} = -a_{j,i}$

Conclusion : si u n'est pas nul, A est effectivement antisymétrique, ainsi que B.
Remarque : dans le cas particulier où $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, *la fin du raisonnement précédent s'applique directement à la base canonique [ou à toute autre base orthonormée], et A est de même antisymétrique, ainsi que la matrice de u dans n'importe quelle base orthonormée.*

Exercice 2.19.

Dans tout l'exercice, l'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique euclidienne, sa base canonique est notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, f est un endomorphisme bijectif de E de matrice F dans la base canonique, g est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice transposée $G = {}^tF$.

1. a) Montrer que $\forall\,(x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle g(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.

b) Soit un endomorphisme φ symétrique de E. Montrer l'équivalence :
(toute valeur propre de φ est strictement positive) $\Longleftrightarrow$ (tout vecteur non nul de E vérifie : $\langle x, \varphi(x)\rangle > 0$).
On dit alors que φ est défini positif.

c) Montrer que $g \circ f$ est symétrique et défini positif.

2. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq 3}$ une famille de 3 vecteurs de E.

a) Montrer que si $(u_i)_{1\leq i\leq 3}$ est une base orthogonale de E constituée de vecteurs propres de $g \circ f$, alors $(f(u_i))_{1\leq i\leq 3}$ est aussi une base orthogonale de E.

b) Montrer que si $(u_i)_{1\leq i\leq 3}$ et $(f(u_i))_{1\leq i\leq 3}$ sont deux bases orthogonales de E, alors $(u_i)_{1\leq i\leq 3}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de $g \circ f$.

3. Soit $\mathcal{C} = (u_i)_{1\leq i\leq 3}$ une base orthogonale de E constituée de vecteurs propres de $g \circ f$, avec u_i vecteur propre associé à la valeur propre μ_i.

a) Montrer que : ${}^tFF = \sum\limits_{i=1}^{3} \mu_i U_i^t U_i$, avec U_i matrice colonne associée au vecteur u_i dans la base canonique.

b) On pose $S = \sum\limits_{i=1}^{3} \sqrt{\mu_i} U_i^t U_i$. Calculer S^2 et montrer que l'endomorphisme s canoniquement associé à S est symétrique défini positif.

c) Montrer que l'on peut écrire F sous la forme $F = OS$, où O est une matrice orthogonale.

Solution

1. a) On a :
$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^3)^2, \langle g(x)y\rangle = {}^t(GX)Y = {}^tXFY = {}^tX(FY) = \langle x, f(y)\rangle$.

b) L'endomorphisme φ étant symétrique, il possède une base orthonormale de vecteurs propres (v_1,v_2,v_3) associée aux valeurs propres réelles $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ et strictement positives.

Soit $x\neq 0, x=\sum\limits_{i=1}^{3} x_iv_i$. Alors $\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^{3}\lambda_ix_iv_i$ et $\langle x,\varphi(x)\rangle=\sum\limits_{i=1}^{3}\lambda_ix_i^2>0$; donc φ est défini positif.

Réciproquement : $\varphi(v_i)=\lambda_i.v_i$ entraîne que $\langle v_i,\varphi(v_i)\rangle=\lambda_i>0$.

c) La matrice de $g\circ f$ est $GF={}^tFF$ qui est symétrique.
Soit $x\in\mathbb{R}^3, \langle x,(g\circ f)(x)\rangle=\langle xg[f(x)]\rangle=\langle f(x),f(x)\rangle$.
Comme $x\neq 0$ et par hypothèse f bijective, on a $f(x)\neq 0$ d'où :

$$\langle x,(g\circ f)(x)\rangle=\|f(x)\|^2>0$$

Ainsi $g\circ f$ est-il un endomorphisme symétrique défini positif.

2. a) On a $\forall\, i, f(u_i)\neq 0$ car f est bijective.
De plus $\forall\, i\neq j, \langle f(u_i),f(u_j)\rangle=\langle u_i,(g\circ f)(u_j)\rangle=\langle u_i,(\lambda_ju_j)\rangle=0$ et trois vecteurs orthogonaux non nuls de $\mathbb{R}^3$ forment une base orthogonale.

b) On a $\forall\, i\neq j, 1\leqslant i,j\leqslant 3, \langle u_i,(g\circ f(u_j))\rangle=\langle f(u_i),f(u_j)\rangle=0$, car $(f(u_i))_{1\leq i\leq 3}$ est une base orthogonale.

Également $(g\circ f)(u_j)$ est orthogonal aux u_i pour $i\neq j$ donc colinéaire à u_j.
Donc u_j est un vecteur propre de $g\circ f$ et $(u_i)_{1\leq i\leq 3}$ est une base orthogonale de vecteurs propres de $g\circ f$.

3. a) On note U_i matrice colonne associée au vecteur u_i dans la base canonique.
L'endomorphisme $(g\circ f)$ est symétrique donc diagonalisable dans la base orthonormée de vecteurs propres $\mathcal{C}$. Soit P la matrice de passage orthogonale entre les deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$: $E_i=PU_i$
Ainsi P transforme une base orthonormée en une base orthonormée, c'est une matrice orthogonale et $P^{-1}={}^tP$.

Soit $D=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\mu_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_iE_i^tE_i=\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_iPU_i^t(PU_i)=\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_iPU_i^tU_i^tP$.

On a : ${}^tFF=GF={}^tPDP=\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i^tPPU_i^tU_i^tPP=\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_iU_i^tU_i$.

b) On effectue le même changement de base : $U_i={}^tPE_i$. Il vient :

$$S=\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\mu_i}U_i^tU_i=\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\mu_i}^tPE_i^tE_iP={}^tP\Big(\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\mu_i}E_i^tE_i\Big)P$$

$=^t P\,\text{diag}(\sqrt{\mu_i})P.$

Ainsi $S^2 = {}^tP\,\text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)P = {}^tFF$.

On a $\mu_i > 0$ et $P^{-1} =^t P$ entraînent que S est symétrique (définie positive).

Soit x vecteur non nul de E.

$$x = \sum_{i=1}^{3} x_i u_i \implies s(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i s(u_i) = \sum_{i=1}^{3} x_i \sqrt{\mu_i} u_i$$

car (u_i) est une base orthonormée de vecteurs propres de s. Donc

$$SU_j = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{\mu_i} U_i^t U_i U_j = \sqrt{\mu_j} U_j$$

Et $\langle x, s(x)\rangle = \sum\limits_{i=1}^{3} \sqrt{\mu_i} x_i^2 > 0$ car les μ_i sont tous strictement positifs : s est un endomorphisme symétrique défini positif.

4. Soit $O = FS^{-1}$, on a : ${}^tOO = S^{-1\,t}FFS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_3$ et O est orthogonale.

Exercice 2.20.

On note F l'ensemble des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et pour tout entier naturel n, F_n l'ensemble des éléments de F de degré inférieur ou égal à n.

On munit F du produit scalaire : $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2} dx.$

[On ne demande pas de montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit bien un produit scalaire sur F.]

On confond polynôme et application polynomiale associée.

On considère les trois endomorphismes f, g, h de F définis par :

pour tout $P \in F$, $f(P) = -P'' + 2XP' + P, \quad g(P) = 2XP - P', \quad h(P) = P'$

1. Calculer $g \circ h$ et $h \circ g$ en fonction de f et Id_F.

2. En déduire que $f \circ g - g \circ f = 2g$.

3. Montrer que si P est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, et si $g(P)$ est non nul, alors il est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda + 2$.

4. Montrer que, pour tout couple (P, Q) de polynômes de F,

$$\langle P', Q'\rangle = \langle f(P), Q\rangle - \langle P, Q\rangle$$

5. a) Montrer que F_n est stable par f.

b) On note f_n l'endomorphisme de F_n induit par f. Montrer que f_n est un endomorphisme symétrique de F_n.

Solution

1. On a :
$\forall P \in F, \quad (g \circ h)(P) = g(h(P)) = 2XP' - P'' = f(P) - P = f(P) - Id_F(P)$,
et
$$(h \circ g)(P) = (g(P))' = (2XP - P')' = 2XP' - P'' + 2P = f(P) + P$$
$$= f(P) + Id_F(P).$$
$$g \circ h = f - Id_F, h \circ g = f + Id_F$$

2. En composant à droite par g la première relation établie précédemment, et à gauche par g la deuxième, on obtient :
$$f \circ g - g = g \circ h \circ g = g \circ f + g, \text{ d'où } f \circ g - g \circ f = 2g$$

3. Ici, on suppose donc que $P \neq 0$ et que $f(P) = \lambda P$.
D'après la question précédente,
$$f(g(P)) = g(f(P)) + 2g(P) = g(\lambda P) + 2g(P) = (\lambda + 2)g(P)$$
par linéarité de g.

Or $g(P) \neq 0$, donc il est effectivement vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda + 2$.

4. Réalisons une intégration par parties sur une intégrale entre X et Y, deux réels provisoirement fixés, qui ensuite tendront respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$.
$u(x) = P'(x)\mathrm{e}^{-x^2} \Rightarrow u'(x) = (P''(x) - 2xP'(x))\mathrm{e}^{-x^2} = (-f(P) + P)(x)\mathrm{e}^{-x^2}$,
$v(x) = Q(x) \Rightarrow v'(x) = Q'(x)$,

Toutes les fonctions en jeu étant de classe C^∞, l'intégration par parties est légitime.
$$\int_X^Y P'(x)Q'(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx = \left[P'(x)\mathrm{e}^{-x^2}Q(x)\right]_X^Y + \int_X^Y (f(P) - P)(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx$$
Ensuite, la partie entre crochets tend vers 0 lorsque X et Y tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$ grâce aux théorèmes de comparaisons, et par linéarité de l'intégrale de X à Y puis convergence de toutes les intégrales généralisées en jeu (propriété incluse dans le fait que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur F), on obtient :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)Q'(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(P)(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$$
Il n'y a plus qu'à tout diviser par $\sqrt{\pi}$ pour obtenir le résultat demandé.

5. a) Le texte nous donne que f est un endomorphisme de F. Il reste à vérifier les degrés.
Or, pour $n \geqslant 2$, si P est de degré inférieur ou égal à n, P' est de degré inférieur ou égal à $n-1$ et XP' est de degré égal à $1+\deg(P')$ qui est inférieur ou égal à $n-1+1=n$. De même, P'' est de degré inférieur ou égal à $n-2$ et par somme, $f(P)$ est bien de degré inférieur ou égal à $\max(n, n-2) = n$
Les cas $n=0$ et $n=1$ sont immédiats.

On a donc bien : F_n est stable par f. La restriction de f à F_n des deux côtés (départ, arrivée) est légitime, on peut donc bien définir l'endomorphisme induit.

b) La restriction d'un endomorphisme à un sous-espace vectoriel F_n de l'espace de départ [stable par f] est un endomorphisme de F_n. Vérifions que f_n est symétrique.
Or, d'après ce qui précède, et la symétrie du produit scalaire, on a : $\forall (P,Q) \in F^2$:

$$\langle P', Q'\rangle = \langle Q', P'\rangle = \langle f(P), Q\rangle - \langle P, Q\rangle = \langle f(Q), P\rangle - \langle P, Q\rangle$$

Finalement :

$$\forall (P,Q) \in F^2, \langle f(P), Q\rangle = \langle Q, f(P)\rangle = \langle f(Q), P\rangle$$

Ainsi, l'endomorphisme f est un endomorphisme symétrique de F et f_n un endomorphisme symétrique de F_n par restriction.

Exercice 2.21.

Dans cet exercice E désigne l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, que l'on identifie à $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que l'application définie sur E^2 par $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est un produit scalaire sur E.
On note alors $\varphi(P,Q) = \langle P, Q\rangle$.

2. Pour $P \in E$, on note $\psi(P) : t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-t}P'(t)$ et $U(P)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $U(P)(t) = \mathrm{e}^t[\psi(P)]'(t)$ (où « $'$ » désigne l'opérateur de dérivation).

a) Montrer que $U(P)$ est élément de E et que $U : P \mapsto U(P)$ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que pour tout $(P,Q) \in E^2$, on a : $\langle U(P), Q\rangle = \langle P, U(Q)\rangle$.

3. a) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que la restriction de U à $\mathbb{R}_n[X]$ induit un endomorphisme U_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer les valeurs propres de U_n. L'endomorphisme U_n est-il diagonalisable ?

c) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit $f_k : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^k$ et $P_k : t \mapsto \mathrm{e}^t f_k^{(k)}(t)$, où $f_k^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de la fonction f_k.

Expliciter $P_k(t)$. Montrer que P_k est propre pour U_n et déterminer la valeur propre associée.

Solution

1. Cette question classique se démontre de manière... classique. Ne pas oublier de montrer la convergence de l'intégrale.

2. a) L'application U est linéaire par distributivité de la multiplication sur l'addition et linéarité de la dérivation.
Il reste à montrer que $U(P)$ est un polynôme. Or :

$$U(P)(t) = \mathrm{e}^t[\mathrm{e}^{-t}(1-t)P'(t) + t\mathrm{e}^{-t}P''(t)] = (1-t)P'(t) + tP''(t)$$

b) Avec une intégration par parties, il vient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^t \frac{d}{dt}(t\mathrm{e}^{-t}P'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(t\mathrm{e}^{-t}P'(t))Q(t)dt$$
$$= \int_0^{+\infty} (te^{-t}P'(t))Q'(t)dt = \int_0^{+\infty} (t\mathrm{e}^{-t}Q'(t))P'(t)\,dt$$

qui est symétrique en P et Q. Ainsi U est-il un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}[X]$.

c) La question 1 montre que si P est de degré p, alors $U(P)$ est de degré inférieur ou égal à p.

3. Comme $\deg(U(P)) \leqslant \deg(P)$, si P est un polynôme propre associé à la valeur propre λ, alors si $\lambda \neq 0$, il suffit de regarder les coefficients dominants de P et $U(P)$.
Si $P(t) = a_p t^p + \cdots$ alors $U(P)(t) = (1-t)P'(t) + tP''(t) = -pa_p t^p + \cdots$.
Ceci montre que la matrice associée à U_n est triangulaire supérieure avec sur la diagonale : $0, -1, \ldots, -n$. L'endomorphisme U_n admet $n+1$ valeurs propres : il est donc diagonalisable et son spectre est $\{0, -1, \ldots, -n\}$.

4. En utilisant la formule de Leibniz, il vient :

$$P_k(t) = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{k!}{p!}(-1)^p t^p = \sum_{p=0}^{k} a_p t^p$$

On écrit $P_k = \sum\limits_{p=0}^{\infty} a_p t^p$ avec $a_p = \begin{cases} \binom{k}{p}\dfrac{k!}{p!}(-1)^p & \text{si } p \in [\![0, k]\!] \\ 0 & \text{si } p \geqslant k+1 \end{cases}$.

Alors $(1-t)P_k'(t) + tP_k''(t) = a_1 + \sum\limits_{p=1}^{+\infty}((p+1)^2 a_{p+1} - pa_p)t^p$.

Or, pour $p < k$:

$$\begin{aligned}(p+1)^2 a_{p+1} - p a_p &= \binom{k}{p+1}\frac{k!}{p!}(-1)^{p+1}(p+1) - \binom{k}{p}\frac{k!}{p!}(-1)^p p \\ &= (-1)^{p+1}\frac{(k!)^2}{(p!)^2}((k-p)+p) = k(-1)^{p+1}\frac{k!}{p!}p\binom{p}{k} \\ &= -k a_p\end{aligned}$$

On vérifie que cette relation est valable pour $k = p$ et $U(P_k) = -kP_k$ et P_k est vecteur propre de U associé à la valeur propre $-k$.