Problème I

Partie I 1. A n'est pas inversible car sa première colonne est nulle

Rq : on pourrait aussi considérer A comme la matrice d'un endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (e_1, e_2, e_3) et dire que $f(e_1) = 0$ donc $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ donc f non injective, donc A non inversible ... mais c'est plus long

• $rg(A) = 2$, ses deux dernières colonnes forment trivialement une famille libre.

2. Rq : il paraît que dire " A est triangulaire supérieure, donc les valeurs propres se lisent sur la diagonale " est hors-programme ... mais je doute que la question soit comptée fausse si vous l'écrivez.

0, 2 et 6 sont valeurs propres car • A non inversible (cf question 1)

• $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est de rang 2, ses deux premières colonnes étant liées donc $A - 2I_3$ est non inversible donc 2 est valeur propre.

• $A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est aussi de rang 2 (si on nomme C_1, C_2, C_3 ses colonnes, on a $C_2 = C_3 + \frac{1}{6}C_1$)

donc $A - 6I_3$ non inversible donc 6 est valeur propre

• A possède 3 valeurs propres distinctes, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle est donc diagonalisable

3. A diagonalisable donc il existe P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$

Pour le choix, il faut chercher des vecteurs propres associés à chaque valeur propre

• On résoud donc les systèmes $AX = 0.X$, $AX = 2X$, $AX = 6X$ avec $X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

• $AX = 0 \iff \begin{cases} -y = 0 \\ 2y + 4z = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} \iff X \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• $AX = 2X \iff \begin{cases} -2x - y = 0 \\ -4z = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} \iff X \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

• $AX = 6X \iff \begin{cases} -6x - y = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \iff X \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

" on " nous impose dans l'énoncé d'avoir 1 comme première coordonnée.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

et $A = PDP^{-1}$

<u>Partie II</u>

4. Il convient de vérifier que T est à valeurs dans E puis qu'elle est linéaire.

(2)

. Soit $P \in E$. $\deg(P) \leq n$ donc $\deg(P') \leq n-1$ donc $\deg(X(X-1)P') \leq n+1$ donc $\deg T(P) \leq n$. T est bien à valeurs dans E.

. On montre que T est linéaire. Soit $(P,Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$T(\lambda P + Q) = (X(X-1)(\lambda P + Q)')' = (\lambda X(X-1)P' + X(X-1)Q')'$$

$$= \lambda(X(X-1)P')' + (X(X-1)Q')' \text{ par linéarité de la dérivation}$$

$$= \lambda T(P) + T(Q)$$

5. . Si $k = 0$ $\quad T(1) = 0$

. Si $k \geq 1$ $\quad T(X^k) = k(X(X-1)X^{k-1})' = k(X^{k+1} - X^k)' = k(k+1)X^k - k^2 X^{k-1}$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 2 & -4 & \ddots & & \\ \vdots & 0 & 6 & \ddots & (0) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & (0) & \ddots & -n^2 \\ 0 & 0 & 0 & & & n(n+1) \end{pmatrix}$$

6. La première colonne de M est nulle, M n'est donc pas inversible donc T n'est pas bijectif

ou alors : $T(X^0) = 0$ et $X^0 = 1 \neq 0$ donc $\ker T \neq \{0\}$ donc T non injective donc non bijective.

$rg(T) = n$ car les n dernières colonnes de M forment une famille libre (on peut le montrer avec des λ_i ... si vraiment on en a envie)

ou alors écrire que les images des vecteurs de B forment une famille de n vecteurs (ici des polynômes) échelonnée en degré donc libre et repréciser que $T(1) = 0$.

$\ker T = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, T(P) = 0\}$. Soit on lit directement dans la matrice et on écrit que $\ker T = \text{Vect}(1) = \{\text{polynômes constants}\}$

Soit on résoud le système $MX = 0$ avec X le vecteur colonne correspondant aux coordonnées d'un polynôme dans B.

7. Voir question 2 pour une "justification"

M est TSup, les valeurs propres se lisent sur la diagonale.

$$Sp(T) = \{0, 2, 6, \ldots, k(k+1), \ldots, n(n+1)\}$$

$\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, T a $(n+1)$ valeurs propres distinctes donc T diagonalisable.

Partie III

après le linéaire, le bilinéaire, EN as usual.

8. . φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.

. φ est symétrique. Soient $(P,Q) \in E^2$ $\int_0^1 P(x)Q(x)\,dx = \int_0^1 Q(x)P(x)\,dx$

d'où $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$

. φ est bilinéaire. Comme elle est symétrique, il suffit de vérifier la linéarité à gauche. Soient $(P,P') \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda P + P', Q) = \int_0^1 (\lambda P + P')(x)\,Q(x)\,dx = \int_0^1 (\lambda P(x)Q(x) + P'(x)Q(x))\,dx$$
$$= \lambda \int_0^1 P(x)\,Q(x)\,dx + \int_0^1 P'(x)\,Q(x)\,dx$$
$$= \lambda\,\varphi(P,Q) + \varphi(P',Q)$$

. φ est positive. Soit $P \in E$, la fonction $x \longmapsto P^2(x)$ est continue et positive sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 P^2(x)\,dx \geq 0$ car les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant donc $\varphi(P) \geq 0$

. φ est définie. Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P) = 0$ alors $\int_0^1 P^2(x)\,dx = 0$

Mais P^2 est une fonction continue et positive sur $[0,1]$ donc quelque soit x dans $[0,1]$ $P^2(x) = 0$ donc $P(x) = 0$

P est donc un polynôme ayant une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

9. $$\varphi(T(P), Q) = \int_0^1 (X(X-1)P')'(x)\,Q(x)\,dx$$

On procède à l'intégration par parties suivante

$$\begin{cases} u(x) = Q(x) & u'(x) = Q'(x) \\ v'(x) = (X(X-1)P')'(x) & v(x) = x(x-1)P'(x) \end{cases}$$

Cette IPP est licite car toutes les fonctions sont polynomiales donc C^1

$$\varphi(T(P),Q) = \left[x(x-1)P'(x)Q(x)\right]_0^1 - \int_0^1 x(x-1)P'(x)\,Q'(x)\,dx$$
$$= -\int_0^1 x(x-1)\,P'(x)\,Q'(x)\,dx$$

10. $\varphi(P, T(Q)) = \varphi(T(Q), P)$ par symétrie du produit scalaire.
On peut appliquer les résultats de la question 9.

$$\varphi(T(Q),P) = -\int_0^1 x(x-1)\,Q'(x)\,P'(x) = -\int_0^1 x(x-1)\,P'(x)\,Q'(x)\,dx = \varphi(T(P),Q)$$