MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2017

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0;+\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - e.\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < e < 2,8; \quad 7,3 < e^2 < 7,4; \quad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. a) La fonction f est bien deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de deux fonctions de référence deux fois dérivables sur cet intervalle, avec :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \quad \text{et} \quad f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}$$

b) Il est clair que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f''(x) = e^x + \dfrac{e}{x^2} > 0$, donc f' est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - \dfrac{e}{x} = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x - \dfrac{e}{x} = -\infty = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.

Enfin, $f'(1) = e^1 - \dfrac{e}{1} = e - e = 0$. On en déduit le tableau complet de f' sur $]0;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
f'	$\|\|\ -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. Le tableau de variations de f' et sa valeur en 1 permettent d'en déduire son signe : $f'(x) > 0$ pour tout $x > 1$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]0;1[$, $f'(1) = 0$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$\|\|\ +\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

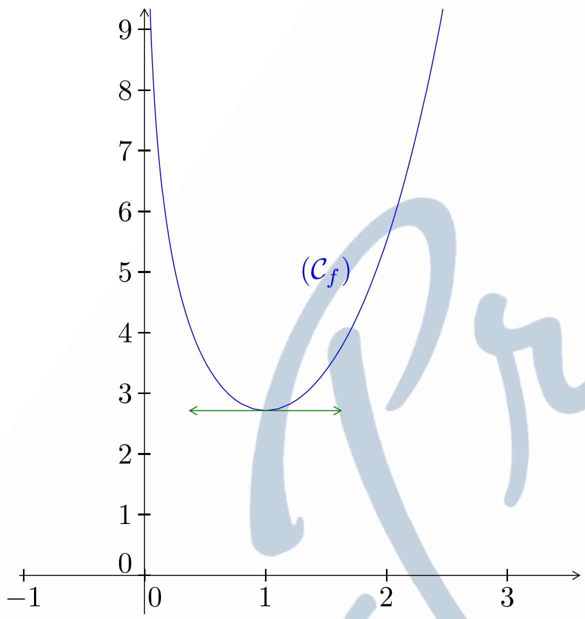
Justification des limites :

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x - e.\ln(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Au voisinage de $+\infty$: $f(x) = e^x\left(1 - e.\dfrac{\ln(x)}{e^x}\right)$, où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x} = 0$ par croissances comparées,

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e.\dfrac{\ln(x)}{e^x} = 1 - 0 = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1 - e.\dfrac{\ln(x)}{e^x}\right) = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. On trace l'allure de $\mathcal{C}_f$ en respectant ses propriétés fondamentales : sens de variation, l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$, et la tangente à la courbe en $x = 1$ est horizontale. Au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim e^x$, la courbe de f suit cette allure exponentielle :



4. a) La fonction $u :\ x \mapsto f'(x) - x$ est bien dérivable sur $]0, +\infty[$, et :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad u'(x) = f''(x) - 1 = e^x + \frac{e}{x^2} - 1$$

Pour tout $x > 0$: $e^x > 1 \iff e^x - 1 > 0$ et $\dfrac{e}{x^2} > 0$, donc par somme : $\forall x \in]0, +\infty[,\ u'(x) > 0$, et la fonction u est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) - x = -\infty$.

Au voisinage de $+\infty$: $f'(x) - x = e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right) - \dfrac{e}{x}$, où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ par croissances comparées, donc :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{x}{e^x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right) - \dfrac{e}{x} = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) - x$.

De la sorte, sur $]0, +\infty[$, la fonction u est :

- continue comme somme de fonctions continues sur cet intervalle
- strictement croissante
- à valeurs dans $]-\infty, +\infty[$ qui contient 0.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $u(x) = 0 \iff f'(x) = x$, admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$.

De plus : $u(1) = f'(1) - 1 = -1 < 0$ et $u(2) = f'(2) - 2 = e^2 - \dfrac{e}{2} - 2$, où $e^2 > 7.3$ et $\dfrac{e}{2} + 2 < \dfrac{2.8}{2} + 2 = 3.4$: la différence de ces deux nombres est donc strictement positive.

Ainsi : $u(1) < 0 = u(\alpha) < u(2)$, donc $1 < \alpha < 2$ par stricte croissance de u sur $]0, +\infty[$.

PARTIE II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

5. Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "u_n existe et $u_n \geqslant 2$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence sur n.

$\boxed{\text{I.}}$ Le réel $u_0 = 2$ est défini par l'énoncé de sorte que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et sous cette hypothèse, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est encore :

On sait (H.R.) que $u_n \geqslant 2$, donc $u_n \in \mathcal{D}_f$, et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini.

De plus, la stricte croissance de f sur $[1;+\infty[$ implique : $f(u_n) \geqslant f(2) \iff u_{n+1} \geqslant e^2 - e.\ln(2)$, où : $e^2 > 7.3$, et $e.\ln(2) < 2.8 \times 0.7 = 1.96$.

Il est donc clair que $e^2 - e.\ln(2) > 2$, donc par transitivité de l'inégalité, $u_{n+1} > 2$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

6. a) Soit la fonction $g :\ x \mapsto f(x) - x$, bien définie et dérivable sur $[2,+\infty[$, avec :

$$\forall x \in [2,+\infty[, \quad g'(x) = f'(x) - 1 = e^x - \frac{e}{x} - 1$$

Pour tout $x \geqslant 2$: $\quad e^x \geqslant e^2 > 7.3$ et $\dfrac{e}{x} + 1 \leqslant \dfrac{e}{2} + 1 < 2.4$, donc la différence est strictement positive : $\quad \forall x \in [2,+\infty[,\ g'(x) > 0$, et la fonction g est strictement croissante sur $[2,+\infty[$.

Comme $g(2) = e^2 - e.\ln(2) - 2$ avec $e^2 > 7.3$ et $e.\ln(2) + 2 < 4$ d'après les calculs précédents : $g(2) > 0$ et par conséquent, pour tout $x \in [2,+\infty[,\ g(x) > 0 \iff f(x) > x$.

b) Le résultat de la question **5.** permet d'écrire l'inégalité précédente avec $x = u_n \geqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) > u_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n$$

ce qui permet de conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante.

7. D'après le théorème de limite monotone : la suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit majorée et alors convergente, soit divergente de limite $+\infty$.

On raisonne par l'absurde en supposant que (u_n) est convergente, et on note alors ℓ sa limite qui vérifie : $\ell \geqslant 2$.

La relation de récurrence : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, la continuité de f sur $[2,+\infty[$ et le principe d'unicité de la limite conduisent à conclure que ℓ est alors solution de l'équation :

$$f(\ell) = \ell \iff g(\ell) = 0.$$

Or on a vu que la fonction g a un minimum $g(2)$ strictement positif sur cet intervalle : il n'existe donc aucun réel ℓ solution de l'équation $g(\ell) = 0$. On doit donc conclure que (u_n) n'est pas convergente, mais divergente, avec :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

8. Le programme habituel dans les épreuves de l'EML :

```
A = input('Donner un réel A : ')
u = 2
n = 0
```

```
while u < A
    u = exp(u) - %e*log(u)
    n = n+1
end
disp(n)
```

9. a) On démontre les deux inégalités demandées par l'étude des fonctions différences

$$h:\ x \mapsto x - 2\ln(x) \quad \text{et} \quad k:\ x \mapsto \frac{e^x}{3} - x,$$

toutes deux définies et dérivables sur $[2;+\infty[$, avec :
$\forall x \in [2;+\infty[,\ h'(x) = 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x-2}{x} \geqslant 0$ car $x \geqslant 2$. La fonction h est donc croissante sur $[2;+\infty[$, donc : $\forall x \in [2;+\infty[,\ h(x) \geqslant h(2) = 2 - 2\ln(2) = 2(1-\ln(2)) > 0$ puisque $\ln(2) < 1$.

Pour tout $x \in [2;+\infty[,\ k'(x) = \dfrac{e^x}{3} - 1 = \dfrac{e^x - 3}{3} > 0$ car $e^x \geqslant e^2 > 3$. La fonction k est donc croissante sur $[2;+\infty[$, et : $\forall x \in [2;+\infty[,\ k(x) \geqslant k(2) = \dfrac{e^2}{3} - 2 = \dfrac{e^2-6}{3} > 0$ car $e^2 > 6$.

Les fonctions h et k sont donc positives sur $[2;+\infty[$, ce qui prouve bien les inégalités :

$$\forall x \in [2;+\infty[, \quad x - 2\ln(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \frac{e^x}{3} - x \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \frac{e^x}{3}$$

b) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2$, donc les inégalités précédentes s'appliquent avec $x = u_n$, qui donnent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{u_n} \geqslant 3u_n \quad \text{et} \quad \ln(u_n) \leqslant \frac{u_n}{2} \iff -e\ln(u_n) \geqslant -\frac{e}{2}u_n$$

Par sommation membre à membre des deux inégalités de même sens, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{u_n} - e.\ln(u_n) \geqslant 3u_n - \frac{e}{2}u_n \iff u_{n+1} \geqslant \frac{6-e}{2}u_n$$

c) L'inégalité précédente donne, par une récurrence simple :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \left(\dfrac{6-e}{2}\right)^n.u_0 \iff \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{2}{6-e}\Big)^n$ par stricte décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Or : $6 - e > 3$ donc $0 < \dfrac{2}{6-e} < 1$: la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{6-e}\Big)^n$ est donc convergente, comme série géométrique de raison appartenant à $]0;1[$.

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{u_n}$ est elle-même convergente.

PARTIE III : Étude d'intégrales généralisées

10. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ est impropre en 0. On pose donc $a \in]0;1[$, et on calcule :

$$\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_a^1 e^x\mathrm{d}x - e.\int_a^1 \ln(x)\mathrm{d}x = \Big[e^x\Big]_a^1 - e.\Big[x\ln(x) - x\Big]_a^1 = e - e^a - e.\Big(0 - 1 - a\ln(a) + a\Big)$$

$\displaystyle\lim_{a\to 0^+} e^a = e^0 = 1$ par continuité de exp en 0, et $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} a\ln(a) = 0$ par croissances comparées, donc :

$\lim\limits_{a\to 0^+} \displaystyle\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x = e - 1 - e.(-1-0+0)$, ce qui prouve que l'intégrale impropre converge, et vaut :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 2e - 1$$

11. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, le critère nécessaire de convergence de l'intégrale n'est pas vérifié : l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est donc grossièrement divergente.

12. Utilisons à bon escient les inégalités de la question 9.a) : pour tout $x \geqslant 2$, $\ln(x) \leqslant \dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{e^x}{6}$, donc :

$$\forall x \geqslant 2,\ f(x) = e^x - e\ln(x) \geqslant e^x - \frac{e}{6}.e^x \iff f(x) \geqslant \frac{6-e}{6}.e^x \iff 0 < \frac{1}{f(x)} \leqslant \frac{6}{6-e}.e^{-x}.$$

Or : $\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x$ converge (elle vaut : $\lim\limits_{A\to+\infty} \Big[-e^{-x}\Big]_2^A = \lim\limits_{A\to+\infty} -e^{-A} + e^{-2} = e^{-2}$).

Par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives sur $[2;+\infty[$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ est convergente.

PARTIE IV : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère la fonction $F :]1;+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]1;+\infty[^2$, définie, pour tout (x,y) de $]1;+\infty[^2$, par :

$$F(x,y) = f(x) + f(y) - xy$$

13. Les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction F sont définies sur $]1;+\infty[^2$ par :

$$\forall (x,y) \in]1;+\infty[^2,\quad \partial_1(F)(x,y) = f'(x) - y \quad \text{et} \quad \partial_2(F)(x,y) = f'(y) - x$$

Les points critiques de F sont les solutions sur $]1;+\infty[^2$ du système :

$$\begin{cases} \partial_1(F)(x,y) & = 0 \\ \partial_2(F)(x,y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f'(x) - y & = 0 \\ f'(y) - x & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f'(x) - y = 0 \\ f'(x) - y = f'(y) - x \end{cases} \iff \begin{cases} f'(x) = y \\ f'(x) + x = f'(y) + y \end{cases}$$

Or sur $]1;+\infty[$, la fonction f' est strictement croissante, donc la fonction $x \mapsto f'(x) + x$ aussi ; une telle fonction est alors injective, ce qui signifie que l'équation $f'(x) + x = f'(y) + y$ est équivalente à : $x = y$.

Le système précédent est donc équivalent à :

$$\begin{cases} f'(x) = y \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} f'(x) = x \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = x = \alpha \end{cases}$$

puisque α est l'unique solution de l'équation $f'(x) = x$ sur $]1;+\infty[$.
La fonction F admet donc un unique point critique sur $]1;+\infty[^2$, à savoir (α,α).

14. a) Calcul des dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1;+\infty[^2$:

$$\forall (x,y) \in]1;+\infty[^2,\ \partial^2_{1,1}(F)(x,y) = f''(x),\ \partial^2_{2,2}(F)(x,y) = f''(y),\ \partial^2_{1,2}(F)(x,y) = -1 = \partial^2_{2,1}(F)(x,y)$$

La Hessienne de F au point critique (α,α) est donc :

$$H = \begin{pmatrix} e^\alpha + \dfrac{e}{\alpha^2} & -1 \\ -1 & e^\alpha + \dfrac{e}{\alpha^2} \end{pmatrix}$$

b) On cherche ici les valeurs propres de la Hessienne, les réels λ tels que :

$$H - \lambda.I_2 \text{ est non-inversible} \iff \det\begin{pmatrix} e^\alpha + \dfrac{e}{\alpha^2} - \lambda & -1 \\ -1 & e^\alpha + \dfrac{e}{\alpha^2} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \left(e^\alpha + \frac{e}{\alpha^2} - \lambda\right)^2 - 1 = 0 \iff \left(e^\alpha + \frac{e}{\alpha^2} - \lambda - 1\right)\left(e^\alpha + \frac{e}{\alpha^2} - \lambda + 1\right) = 0$$

$$\iff \lambda = e^\alpha - 1 + \frac{e}{\alpha^2} \quad \text{ou} \quad \lambda = e^\alpha + \frac{e}{\alpha^2} + 1$$

Puisque $\alpha > 0$, alors $e^\alpha > 1$ donc $e^\alpha - 1 + \dfrac{e}{\alpha^2} > 0$ et $e^\alpha + \dfrac{e}{\alpha^2} + 1 > 0$.

Les deux valeurs propres de la Hessienne de F en (α, α) sont donc strictement positives : la fonction F admet par conséquent en extrémum local en (α, α), et c'est un minimum local.

Exercice 2

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E.

On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \qquad b(P) = P - P', \qquad c(P) = 2XP - (X^2 - 1)P'$$

Enfin, on note : $f = b \circ a - a \circ b$.

PARTIE I : Étude de a

1. La linéarité de la dérivation entraîne celle de l'application a : pour tous polynômes (P, Q) de E et tout réel λ :

$$\begin{aligned} a(\lambda.P + Q) &= (\lambda.P + Q) - X(\lambda.P + Q)' = \lambda.P + Q - \lambda.XP' - XQ' \\ &= \lambda.(P - XP') + (Q - XQ') = \lambda.a(P) + a(Q) \end{aligned}$$

De plus : pour tout $P \in E = \mathbb{R}_2[X]$, $P' \in \mathbb{R}_1[X]$ et $XP' \in \mathbb{R}_2[X]$ d'après les régles de calcul avec les degrés. Ainsi, $P - XP' = a(P)$ appartient à $\mathbb{R}_2[X] = E$, et a est bien un endomorphisme de E.

2. a) On calcule les images par a des trois éléments de $\mathscr{B}$:

$$a(1) = 1 - X \times 0 = 1, \quad a(X) = X - X \times 1 = 0, \quad a(X^2) = X^2 - X \times 2X = -X^2$$

donc la matrice A de a dans la base $\mathscr{B}$ est bien :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} a(1) & a(X) & a(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

b) La matrice A est diagonale, donc son rang est égal au nombre de ses éléments diagonaux non nuls, c'est-à-dire :

$$\text{rg}(A) = 2$$

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.

On note B et C les matrices, dans la base $\mathscr{B}$ de E, de b et c respectivement.

PARTIE II : Étude de b

4. La façon la plus rapide et la plus simple de prouver que l'endomorphisme b est bijectif, est de le composer avec l'application qui à tout élément Q de E, associe $Q+Q'+Q''$, notons-la d :

$$\forall Q \in E, \quad b \circ d(Q) = b(Q+Q'+Q'') = (Q+Q'+Q'')-(Q+Q'+Q'')' = Q+Q'+Q''-Q'-Q''-Q''' = Q$$

car tout polynôme Q de E étant de degré inférieur ou égal à 2, vérifie : $Q'''=0$. Ce calcul suffit effectivement à prouver que b est un automorphisme, de bijection réciproque $b^{-1}: \; Q \mapsto Q+Q'+Q''$.

5. a) On écrit ici la matrice B via les calculs :

$$b(1) = 1-0 = 1, \qquad b(X) = X-1, \qquad b(X^2) = X^2-2X$$

donc : $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice B est ainsi triangulaire : ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, donc 1 est la seule valeur propre de B, et aussi de b.

b) Le raisonnement est classique, et toujours le même : *si* b était diagonalisable, il existerait une base de vecteurs propres pour b, tous associés à la seule valeur propre 1 de celui-ci ; la matrice B serait alors semblable à la matrice diagonale d'ordre 3 dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1 : c'est la matrice identité d'ordre 3 !

La formule de changement de base donnerait alors :

$$B = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$$

Mais B n'est évidemment pas égale à la matrice I_3 ! Par conséquent, et par l'absurde, B n'est pas diagonalisable, et b non plus.

PARTIE III : Étude de c

6. La matrice C est à nouveau obtenue à partir des calculs :

$$c(1) = 2X-(X^2-1)\times 0 = 2X, \quad c(X) = 2X^2-(X^2-1)\times 1 = X^2+1, \quad c(X^2) = 2X^3-(X^2-1)\times 2X = 2X$$

Donc : $\quad C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c(1) & c(X) & c(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$.

7. La matrice C est évidemment non-inversible, car deux de ses colonnes sont identiques ; par conséquent, l'endomorphisme c n'est pas bijectif.

8. a) Pour répondre à cette question, on cherche les valeurs propres de la matrice C ; remarquons qu'il est déjà certain qu'elle est diagonalisable, étant donné qu'elle est symétrique réelle. On échelonne alors, pour λ réel, la matrice $C - \lambda.I_3$:

$$C-\lambda.I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2+\lambda L_1} \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3-(2-\lambda^2)L_2} \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda+\lambda(2-\lambda^2) \end{pmatrix}$$

La matrice est désormais échelonnée, est elle non-inversible (et $C-\lambda.I_3$ aussi) si et seulement si $2\lambda+\lambda(2-\lambda^2)=0 \iff \lambda(4-\lambda^2)=0 \iff \lambda=0$ ou $\lambda^2=4$, et ainsi :

$$\mathrm{Sp}(C)=\mathrm{Sp}(c)=\{-2,0,2\}$$

La matrice C, carrée d'ordre 3, possède 3 valeurs propres distinctes, ce qui confirme à nouveau que C est diagonalisable, et de plus on sait désormais que ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1. Il suffit donc de trouver un vecteur propre pour chaque valeur propre.

Pour cela, on résout le système $(C-\lambda.I_3)X=0_{3,1}$, d'inconnue $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, pour chacune des valeurs $\lambda\in\{-2,0,2\}$: on peut d'ailleurs remplacer dans le système, $C-\lambda.I_3$ par sa réduite de Gauss précédemment calculée :

- Pour $\lambda=0$:

$$CX=0_{3,1} \iff \begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2x+2z=0\\y=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=-z\\y=0\end{cases}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est ainsi vecteur propre de C pour la valeur propre 0.

- Pour $\lambda=-2$:

$$(C+2I_3)X=0_{3,1} \iff \begin{pmatrix}2&2&2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2x+2y+2z=0\\y+2z=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=-y-z=z\\y=-2z\end{cases}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est ainsi vecteur propre de C pour la valeur propre -2.

- Pour $\lambda=2$:

$$(C-2I_3)X=0_{3,1} \iff \begin{pmatrix}2&-2&2\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2x-2y+2z=0\\y-2z=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=y-z=z\\y=2z\end{cases}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ est ainsi vecteur propre de C pour la valeur propre 2.

La matrice $R=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$ est ainsi la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à une base de vecteurs propres pour C qui satisfait les conditions de l'énoncé, où on a choisi l'ordre des colonnes de P de sorte que :

$C=RDR^{-1}$ où $D=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ est bien diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant.

b) L'endomorphisme c, représenté par la matrice C, est bien diagonalisable. La matrice de passage contient les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, des éléments d'une base (P_1,P_2,P_3) de vecteurs propres pour c :

$$P_1=1-2X+X^2,\qquad P_2=1-X^2,\qquad P_3=1+2X+X^2$$

PARTIE IV : Étude de f

9. Pour tout polynôme P de E :

$$\begin{aligned}
f(P) &= (b\circ a - a\circ b)(P) = b\big(a(P)\big) - a\big(b(P)\big)\\
&= b(P - XP') - a(P-P') = \Big((P-XP') - (P-XP')'\Big) - \Big(P - P' - X(P-P')'\Big)\\
&= P - XP' - P' + (P' + XP'') - P + P' + X(P' - P'')\\
&= P - XP' - P' + P' + XP'' - P + P' + XP' - XP''\\
f(P) &= P'
\end{aligned}$$

On pouvait aussi répondre à cette question en calculant la matrice représentative de f dans la base canonique, à savoir :

$$BA - AB = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Or il est facile de vérifier que cette matrice est celle de l'application $P \mapsto P'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Par unicité de la représentation matricielle dans cette base, l'application f est bien égale à l'application de dérivation des polynômes de E : $\forall P \in E,\ f(P) = P'$.

10. La matrice $AB - BA$ est, d'après les règles de la représentation matricielle, la matrice de l'endomorphisme $b\circ a - a\circ b = f$ dans la base $\mathscr{B}$. La matrice $(BA - AB)^3$ est donc la matrice représentative de $f^3 = f\circ f\circ f$; or pour tout P de $E = \mathbb{R}_2[X]$, la dérivée troisième de P est nulle !

$$\forall P \in E, \quad f^3(P) = P''' = 0$$

ce qui implique que la matrice représentative de f^3 est elle-même nulle : $(BA - AB)^3 = 0$.

Exercice 3

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement : « on obtient une boule bleue au k-ième tirage »
R_k l'événement : « on obtient une boule rouge au k-ième tirage. »

PARTIE I : Simulation informatique

1. Rappelons ici que la fonction `rand()` simule la loi uniforme sur $]0;1[$, et pour tout réel $p \in]0;1[$, la probabilité que `rand()`$< p$ est justement égale à p.

On peut ainsi simuler la réalisation de n'importe quel événement connaissant sa probabilité ; ici, à tout moment, la probabilité d'obtenir une boule rouge est $\dfrac{r}{r+b}$ avec des variables r et b actualisées à tout moment :

```
function s = EML(n)
    b = 1  // b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r = 2  // r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s = 0  // s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k = 1:n
        x = rand()
        if x < r/(r+b)  then
            r = r + 1
            s = s + 1
        else
            b = b + 1
        end
    end
endfunction
```

2. On exécute le programme suivant :

```
n = 10
m = 0
for i = 1:1000
    m = m + EML(n)
end
disp(m/1000)
```

On obtient : `6.657`. Cette valeur représente le nombre moyen (arrondi au millième) de boules rouges obtenues en 1000 expériences indépendantes de 10 tirages selon le protocole décrit dans cet exercice.

PARTIE II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'appartition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

3. a) La variable aléatoire Y a pour univers-image : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Le cas particulier : $[Y = 1] = B_1$ donne $\mathbb{P}([Y = 1]) = \dfrac{1}{3}$ et pour tout entier $n \geqslant 2$: $[Y = n] = R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n$, donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y = n]) &= \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-2}}(R_{n-1}) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1}}(B_n) \\ &= \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \times \ldots \times \frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}} \times \frac{\cancel{n}}{n+1} \times \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \qquad \text{après simplifications}\end{aligned}$$

On remarque ainsi que $\dfrac{2}{(1+1)(1+2)}$ étant égal à $\dfrac{1}{3} = \mathbb{P}([Y = 1])$, cette formule générale est bien valable pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

b) La variable aléatoire discrète Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n\mathbb{P}([Y = n])$ est absolument convergente. Il s'agit d'une série à termes positifs, où :

$$n\mathbb{P}([Y = n]) = \frac{2n}{(n+1)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2n}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{n}$ est, au facteur constant 2 près, la série harmonique qui diverge : par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} n\mathbb{P}([Y=n])$ est de même nature, donc divergente, et Y n'admet pas d'espérance.

Comme Y n'admet pas d'espérance, elle n'admet donc pas non plus de variance.

4. Sur le même modèle : $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$; $[Z=1]=R_1$ et $\mathbb{P}([Z=1])=\frac{2}{3}$,

et pour tout entier $n\geqslant 2$: $[Z=n]=B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_{n-1}\cap R_n$, où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z=n]) &= \mathbb{P}(B_1)\times\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\times\ldots\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-2}}(B_{n-1})\times\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots B_{n-1}}(R_n)\\ &= \frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{2}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\times\ldots\times\frac{\cancel{n-2}}{n}\times\frac{\cancel{n-1}}{n+1}\times\frac{2}{n+2}\\ &= \frac{4}{n(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

Lorsque $n=1$, la formule précédente donne bien $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=\mathbb{P}([Z=1])$, donc la formule est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

La série $\sum_{n\geqslant 1} n.\mathbb{P}([Z=n])$ est à termes positifs, avec : $n\mathbb{P}([Z=n]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}$.

La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{4}{n^2}$ est, à un facteur constant près, une série de Riemann d'exposant $\alpha=2>1$, donc convergente : par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} n\mathbb{P}([Z=n])$ est elle-même (absolument) convergente, donc Z admet une espérance.

Par contre : $n^2\mathbb{P}([Z=n]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n^2}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{n}$; on en déduit comme précédemment que cette fois, la série $\sum_{n\geqslant 1} n^2\mathbb{P}([Z=n])$ est divergente :

par conséquent, Z n'admet pas de moment d'ordre 2, donc pas de variance non plus.

PARTIE III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si l'on obtient une boule rouge au k-ième tirage, et égale à 0 sinon.

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

5. Il est clair que chaque variable aléatoire X_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ qui prend la valeur 1, compte pour 1 boule rouge obtenue au k^{e} tirage, donc :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$$

6. La loi de la variable aléatoire X_1 est définie par :

$$\mathbb{P}([X_1=1])=\mathbb{P}(R_1)=\frac{2}{3}\quad\text{et}\quad\mathbb{P}([X_1=0])=\mathbb{P}(B_1)=\frac{1}{3}$$

X_1 suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $p=\frac{2}{3}$, donc d'après le cours sur cette loi usuelle :

$$\mathbb{E}(X_1)=\frac{2}{3}\quad\text{et}\quad\mathbb{V}(X_1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

7. a) L'univers-image du couple (X_1, X_2) est $\{0,1\}^2$, et la loi conjointe est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = \mathbb{P}(B_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(R_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \mathbb{P}(R_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(B_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

b) $X_2(\Omega) = \{0,1\}$, et le calcul de la loi marginale de X_2 donne :

$$\mathbb{P}([X_2 = 0]) = \mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) + \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) + \mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

On remarque donc que X_2 suit la même loi de Bernoulli que X_1.

c) On constate immédiatement que : $\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{9} = \mathbb{P}([X_1 = 0]) \times \mathbb{P}([X_2 = 0])$, donc les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0; n]\!]$.

a) Toujours d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) \\
&= \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots R_{k-1}}(R_k) \times P_{R_1 \cap \ldots \cap R_k}(B_{k+1}) \times \ldots P_{R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_{n-1}}(B_n) \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \ldots \times \frac{k}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} \times \frac{1}{k+3} \times \frac{2}{k+4} \times \ldots \times \frac{n-(k+1)+1}{n+2} \\
&= \frac{2(k+1)! \times (n-k)!}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

b) L'événement $[S_n = k]$ est réalisé si et seulement si on obtient k boules rouges en n tirages. Il est intéressant de constater, comme dans le calcul précédent, que ce faisant on a systématiquement rajouté n boules au total dans l'urne à la fin des n tirages, dont k rouges et $n-k$ bleues. Au niveau des probabilités, le numérateur vaudra toujours $k! \times (n-k)!$, les facteurs n'étant pas forcément écrits dans le même ordre, et le dénominateur vaut toujours $\frac{(n+2)!}{2}$.

Il y a $\binom{n}{k}$ façons différentes (incompatibles !) d'intercaler les k tirages d'une boule rouge avec les $(n-k)$ tirages d'une boule bleue parmi les n tirages. D'après ce qu'on vient d'expliquer, $[S_n = k]$ est donc l'union disjointe de tous ces événements, tous de même probabilité que $R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n$, ce qui prouve bien que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_n = k]) &= \binom{n}{k} \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} \\
&= \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} \qquad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

9. La variable aléatoire S_n est finie, d'univers-image $S_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$, donc elle admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([S_n = k]) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} k(k+1) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k^2 \right) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
&= \frac{n}{n+2} \times \left(1 + \frac{2n+1}{3} \right) = \frac{n}{n+2} \times \frac{2n+4}{3} \\
\mathbb{E}(S_n) &= \frac{2n}{3}
\end{aligned}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $k \in [\![0; n]\!]$: si $[S_n = k]$ est réalisé, alors avant le $(n+1)^{\text{e}}$ tirage, l'urne contient $n+3$ boules, dont $k+2$ rouges et $n-k+1$ bleues. La probabilité de tirer une nouvelle boule rouge est bien :

$$\mathbb{P}_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \frac{k+2}{n+3}$$

b) On obtient $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1])$ grâce à la question précédente et la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $\big([S_n = k]\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([S_n = k]) \times \mathbb{P}_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) \\
&= \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n} \Big(k\mathbb{P}([S_n = k]) + 2\mathbb{P}([S_n = k]) \Big) \\
&= \frac{1}{n+2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([S_n = k])}_{=\mathbb{E}(S_n)} + \frac{2}{n+2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([S_n = k])}_{=1} \\
&= \frac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+2}
\end{aligned}$$

c) La variable aléatoire X_{n+1} est une variable de Bernoulli, d'univers-image $\{0; 1\}$, dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+2} = \frac{\frac{2n}{3} + 2}{n+2} = \frac{2n+6}{3(n+2)} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) = 1 - \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3}$$

On remarque donc que X_{n+1} suit donc la même loi de Bernoulli que X_1 et X_2 : c'est donc la loi commune à toutes les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

PARTIE IV : Étude d'une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

11. Comme on l'a vu, la variable aléatoire S_n prend les valeurs entières comprises entre 0 et n, donc $\dfrac{S_n}{n}$ est une variable aléatoire dont les valeurs sont toutes comprises entre 0 et 1 (très concrètement : ce sont les valeurs $0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}, \ \dfrac{n}{n} = 1$).

Par conséquent :

- Pour tout réel $x < 0$, $[T_n \leqslant x]$ est l'événement impossible car on aurait alors $[T_n \leqslant x < 0]$, donc $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0$.

- Pour tout réel $x > 1$: $\quad [T_n \leqslant x]$ est l'événement certain puisque $[T_n \leqslant 1 \leqslant x]$, donc $\mathbb{P}([T_n \geqslant x]) = 1$ dans ce cas.

12. Soit $x \in [0,1]$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) &= \mathbb{P}\big(\big[\frac{S_n}{n} \leqslant x\big]\big) = \mathbb{P}([S_n \leqslant nx]) \quad (n > 0) \\
&= \mathbb{P}([S_n \leqslant \lfloor nx \rfloor]) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \mathbb{P}([S_n = k]) \quad \text{car } S_n \text{ est à valeurs entières} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (k+1) \overset{[j=k+1]}{=} \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{j=1}^{\lfloor nx \rfloor + 1} j \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \times \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{2} \\
\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) &= \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

13. L'étude de la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, passe par l'étude de la limite de la suite réelle $\big(F_{T_n}(x)\big)_{n \in \mathbb{N}}$, pour chaque réel x. Comme dans les questions précédentes, on distingue trois cas :

- Pour tout $x < 0$: $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} F_{T_n}(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$.
- Pour tout $x > 1$: $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} F_{T_n}(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$.
- Pour tout $x \in [0,1]$: la gestion de la partie entière passe par le rappel de la double inégalité fondamentale qui lui est associée :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1 \quad \text{donc} \quad y - 1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$$

Et ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx \iff x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} x - \dfrac{1}{n} = x$, le théorème d'encadrement donne : $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$

et ainsi : $\quad \lfloor nx \rfloor \underset{n \to +\infty}{\sim} nx$. $\quad$ De la sorte : $\quad \dfrac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{(nx)^2}{n^2} = x^2$,

c'est-à-dire que : $\quad \forall x \in [0,1], \quad \lim\limits_{n \to +\infty} F_{T_n}(x) = x^2$.

Bilan : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{n \to +\infty} F_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$

Notons alors F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par les trois expressions limites obtenues précédemment : il est évident que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$ comme fonctions constantes, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ comme fonction de référence.
De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0 = F(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} F(x)$,
et de même $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 = F(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$.
Ainsi, F est continue en 0 et en 1, donc sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, notons-la T : puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{T_n}(x) = F(x)$ pour tout réel x, on en conclut que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers T, dont une densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a, pour cela, dérivé F sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ où elle est de classe $\mathcal{C}^1$, et en 0 et 1, on a choisi des valeurs arbitraires positives, en l'occurrence $f(0) = f(1) = 0$.