

Correction bien détaillée Major-Prépa : Maths EML 2016

Exercice I : Algèbre linéaire, matrices, polynômes

Partie I) : Etude de la matrice A

1- Pour commencer, un simple calcul matriciel à savoir faire très rapidement :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2- Cette question est également très classique, c'est donc une question de cours, à savoir montrer la **liberté d'une famille**.

Montrons donc que :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R},$$

$$aI + bA + cA^2 = 0 \Rightarrow a=b=c=0 \quad (\text{Définition Classique})$$

Ce qui revient donc à résoudre très simplement le système suivant :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

On a donc bien montré que la famille (I, A^1, A^2) est une famille libre.

3- a. La question ici est **implicite**. Lorsque on demande sans calcul si la matrice est diagonale sans avoir d'information sur ses valeurs propres, ses espaces propres ou sur la manière dont on peut l'exprimer autrement, il faut que la réponse vienne tout de suite dans vos esprits.

La matrice est une matrice symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

b. Là encore, c'est une question **classique**. Si on vous demande de trouver une telle matrice, ça sous-entend qu'il s'agit d'un calcul de vecteurs propres. Pas la peine de se prendre la tête donc. Le problème, c'est qu'on n'a pas d'information sur les valeurs propres pour calculer nos espaces propres. Du coup, il y'a deux solutions

qui doivent vous venir à l'esprit. Soit on calcule à la main les valeurs propres, ce qui prendrait un peu de temps. Soit on est plus malin et on gagne du temps en se servant de la question d'après pour trouver **un polynôme annulateur**.

On peut donc remarquer en se servant de la question 4 que :

$$A^3 = 2A \Leftrightarrow A^3 - 2A = 0_{M_3\mathbb{R}} \Leftrightarrow A(A^2 - 2) = 0_{M_3\mathbb{R}}$$

D'où on peut trouver le polynôme annulateur P tel que
 $\forall X \in \mathbb{R}, P(X) = X(X^2 - 2)$

On a donc en résolvant $P(X)=0$ les solutions $\boxed{\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}}$

Cependant, ces solutions ne garantissent pas que ce soient des valeurs propres de A, on a juste l'information que le spectre est inclus dans cet ensemble de valeurs.

(Il y'en a au moins deux du coup vu qu'une matrice diagonalisable, à moins d'être l'identité, ne peut pas avoir qu'une seule valeur propre)

Il faut donc les tester en calculant les possibles espaces propres.

On résout donc les systèmes suivants :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow S = \text{Vect}((1, 0, -1))$$

Attention, on résout bien cette équation **dans un espace de matrice**. Donc on retraduit la solution dans l'espace des matrices colonnes réelles.

$$\text{On a donc } S = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

La solution n'étant pas **nulle**, 0 est bien valeur propre et on a donc $\boxed{E_0(A) =}$

$$\boxed{\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}$$

On répète donc la même procédure pour les deux autres **possibles** valeurs propres en résolvant les systèmes suivants :

$$(A - \sqrt{2} \times I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } (A + \sqrt{2} \times I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous amène à trouver parce qu'on est toujours très bon des solutions **non nulles**.

Et on trouve les deux autres espaces propres qui sont respectivement :

$$E_{\sqrt{2}}(A) = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_{-\sqrt{2}}(A) = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Enfin, après des calculs très répétitifs, vous pouvez donc trouver la matrice P en mettant bout à bout les matrices colonnes trouvées. Ce qui donne :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Attention dans ce cas-là, la matrice D aura donc les valeurs propres placées sur la diagonale dans cet ordre : $0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}$!!!

- 4- Vu qu'on a été malin, on a déjà montré cette question en 3. D'ailleurs, vous pouvez faire genre que vous calculez en posant le résultat sans vérifier ça vous fera gagner du temps.

Partie II : Etude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

- 5- Ici encore il faut être le plus malin possible. Si on voit directement que $\mathcal{E}$ peut s'exprimer sous la forme d'un vect, on a directement montré qu'il s'agit d'un sous espace vectoriel de l'ensemble considéré.

$$\text{On a donc } \mathcal{E} = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = Vect(I, A, A^2)$$

(comme par hasard !)

Donc $\mathcal{E}$ est donc bien un espace vectoriel.

On est malin et on réutilise le résultat de la partie I.

L'ensemble ε pouvant s'écrire comme un vect, cela assure que la famille (I, A, A^2) est génératrice.

La famille étant libre (voir question 2) et génératrice, elle forme une base de ε .

6- Considérons une matrice M appartenant à ε .

On a donc $M = aI + bA + cA^2$
(ε pouvant s'exprimer sous la forme d'un Vect)

$$\begin{aligned} \text{D'où, } AM &= A(aI + bA + cA^2) \\ &= aA + bA^2 + cA^3 \\ &= aA + bA^2 + c2A \text{ (on utilise après le résultat de la question 4)} \\ &= \boxed{A(a + 2c) + bA^2 + (0 \cdot Id) \in \varepsilon} \end{aligned}$$

On a donc le résultat demandé pour toute matrice M de ε

Nb : Si vous n'aviez pas vu cette astuce, considérez la matrice M avec a , b et c et multipliez la par M pour retrouver le même résultat.

7- C'est une question de cours ESSENTIELLE sur laquelle vous devez dérouler votre raisonnement en deux étapes (dans le cas des endomorphismes) par cœur !!!

Soit M et N appartenant à ε ,
Soit a, b appartenant à $\mathbb{R}$

- Montrons que $f(aM + bN) = af(M) + bf(N)$ (autrement dit que c'est une application linéaire)

$$\begin{aligned} f(aM + bN) &= A(aM + bN) \\ &= aAM + bAN \quad (\text{par calcul matriciel}). \\ &= \underline{af(M) + bf(N)} \end{aligned}$$

De plus,

- L'ensemble ε est bien stable par combinaison linéaire. (ne pas le dire si c'est juste une application linéaire vu que ce ne seront pas les mêmes ensembles).

Donc f est bien un endomorphisme de ε

8- Encore une méthode de cours à savoir refaire sur le bout des doigts. Il faut prendre l'image de chacun des vecteurs de la base et les ré exprimer en fonction de ces mêmes vecteurs. C'est vraiment un exo à savoir refaire et qui tombe dans tous vos sujets. En voici donc un exemple :

$$\begin{aligned} f(I) &= AI = A \\ f(A) &= AA = A^2 \\ f(A^2) &= A A^2 = A^3 = 2A \end{aligned}$$

On peut donc avoir la matrice de f qui est donnée par :

$$F = \begin{pmatrix} f(I) & f(A) & f(A^2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \\ A \\ A^2 \end{matrix}$$

Ps : Indiquez les $f(I)$, $f(A)$, $f(A^2)$ I , A , A^2 si vous n'êtes pas très sûrs de vous pour ne pas faire d'erreur et bien retrouver les résultats que vous aurez soigneusement calculés.

9-

a.

Dans cette question, il est utile, de repasser par l'expression matricielle de f pour obtenir directement le résultat.

On calcule donc $F^3 = 2F$ (par calcul matriciel)

Ce qui se traduit donc en termes d'application par $f \circ f \circ f = 2f$

b.

En fait, vu que vous avez suivi l'astuce de la question 3, vous avez un polynôme annulateur P qui vous donne directement la réponse (dites donc l'exercice est bien fait, on retrouve les mêmes résultats) ;) ! A refaire donc si vous avez eu du mal.

c. **ATTENTION Cette fois, vous ne travaillez pas avec la même matrice, donc il faut refaire TOUS les calculs car les espaces propres vont être différents.**

Par la même méthode qu'au début de l'exercice, vous calculez les sous espaces de la matrice de F qui vous donnent :

$$E_{\sqrt{2}}(F) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_{-\sqrt{2}}(F) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_0(F) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Mais **attention**, n'oublions pas que nous travaillons avec un endomorphisme de matrice de tailles trois. Il faut **donc exprimer les sous-espaces propres de f dans le bon espace** (les matrices de taille 3)

On a donc

$$E_0(f) = \text{Vect}(-2I + A^2) ; E_{\sqrt{2}}(f) = \text{Vect}(A\sqrt{2} + A^2) ; E_{-\sqrt{2}}(f) = \text{Vect}(-A\sqrt{2} + A^2)$$

10- Une question un peu moins facile, encore qu'il y'a plusieurs manières d'y répondre, en voici une en particulier.

Montrer que l'application est bijective revient à montrer que son ker est nul. Or si c'est un endomorphisme, cela signifie que la dimension de son image est égal à la dimension de $\mathcal{E} = 3$

D'après la définition de l'image d'une matrice d'application linéaire, on a

$$\text{Im}(F) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Or les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont **pas colinéaires** (ils ne peuvent pas s'écrire l'un et l'autre comme combinaison linéaire). Donc ils forment une famille libre de $\text{Im}(F)$ et donc a fortiori une base de $\text{Im}(F)$ (car le vect assure le caractère générateur).

Ps : Attention cet argument de colinéarité n'est valable que dans le cas de deux vecteurs, à partir de trois, il faut réutiliser la méthode classique pour démontrer qu'une famille libre dans un certain espace.

On a donc **$\dim \text{Im}(F) = 2 = \dim \text{Im}(f)$** .

$\Rightarrow \text{Ker}(f)$ n'est pas l'ensemble nul car $\dim \text{Ker}(f) = 3 - 2 = 1$ d'après le théorème du rang.

$\Rightarrow f$ n'est pas bijective.

///

Pour montrer que l'application est diagonalisable, on utilise les sous espaces propres de f ,

Or la somme des dimensions des sous espaces propres de $f = 3 = \dim \mathcal{E}$

En effet, **pour le montrer rigoureusement**, les sous espaces propres sont composés de vecteurs non nuls, donc ces vecteurs forment respectivement une famille libre de leur espace propre respectif. Le vecteur assurant le caractère générateur de ces familles, elles forment une base de leur espace propre respectif. Et on peut alors de suite trouver la dimension (1 à chaque fois).

Donc l'application f est bien diagonalisable.

Ps : Cet argument du vecteur non nul ne marche que quand la famille est composée d'un UNIQUE vecteur.

11- En fait, on a déjà bien travaillé lors de la question précédente, donc la réponse doit tomber presque toute suite.

D'après la question 10, Une base de $\text{Im}(f)$ est donc la famille (A, A^2)

On sait également que $\text{Ker}(f) = E_0(f)$ Donc on a directement une base de $\text{ker}(f)$ qui est donc la famille composée d'un unique vecteur $(-2I + A^2)$ (qui est bien une base d'après le même raisonnement qu'en question 10)

NB : Attention au piège, de ne pas donner des bases sous forme de familles de matrice colonne, on travaille sur f et pas sur sa matrice représentative !! C'est là que beaucoup d'élèves ont perdu des points !

12- a) On arrive bientôt à la fin, courage. :D

Soit on résout l'équation en passant par la matrice sous la forme a, b, c , et ça met un peu plus de temps. Sinon on est à nouveau malin et on raisonne par l'absurde en exprimant la matrice M en fonction de A comme dans la première partie de l'exercice.

$$\begin{aligned} f(M) &= I + A^2 \\ \Leftrightarrow AM &= I + A^2 \\ \Leftrightarrow Aa + A^2b + A^3c &= A(a + 2c) + A^2b = A^2 + I \\ \Leftrightarrow A(a + 2c) + A^2(b - 1) - I &= 0 \end{aligned}$$

On réutilise alors la définition de la famille libre (I, A, A^2) qui implique que $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad aI + bA + cA^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$

Or le coefficient devant la matrice identité est $a = -1$, ce qui est impossible d'après la définition de la liberté de la famille.

Contradiction.

L'équation n'admet donc aucune solution M .

b- On ne se complique pas la vie et on réutilise encore la matrice A pour exprimer N (c'est là que l'exercice nous emmène, donc il faut toujours y penser ;)).

$$f(N) = A + A^2$$

$$\Leftrightarrow AN = A + A^2$$

$$\Leftrightarrow Aa + A^2b + A^3c = A(a + 2c) + A^2b = A^2 + A$$

$$\Leftrightarrow A(a + 2c - 1) + A^2(b - 1) = 0$$

Cette équation implique du fait de la liberté de la famille (I, A, A^2) que :

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

On a donc bien comme solution l'ensemble des matrices N qui vérifient la solution $S = \{-2cI + A + cA^2, c \in \mathbb{R}\}$

Enjoy, on peut maintenant passer au deuxième exo ! :P

Exercice 2 : Analyse

Partie I) Etude de la fonction

- 1- Dans cette première question, il faut toujours garder en tête que la continuité se montre **sur tous les points**. Pour ce genre de questions, on procède toujours en deux étapes.

f est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues sur ce même intervalle.

Cette phrase ne doit pas être oubliée, car cette continuité n'est point triviale.

On regarde alors la limite de f en 0. Et on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} t^2 - t \ln(t) = 0 \quad \text{Par } \underline{\text{CROISSANCE COMPAREE}} \quad (\text{argument indispensable})$$

On a donc bien f continue sur $]0; +\infty[$

- 2- En tant que somme de fonctions $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$, f est bien $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Il ne reste alors plus qu'à calculer les dérivées première et seconde de cette fonction sur cet intervalle.

D'où $\forall t \in]0 ; +\infty[$,

$$f'(t) = 2t - (\ln(t) + 1) = \boxed{2t - 1 - \ln(t)}$$

$$\boxed{f''(t) = 2 - \frac{1}{t}}$$

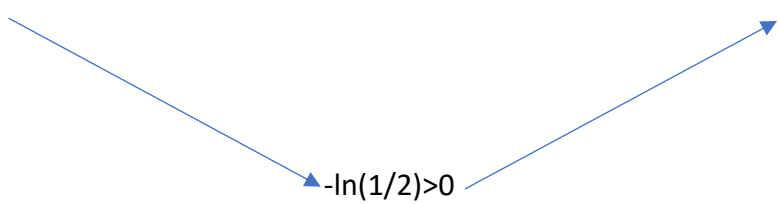
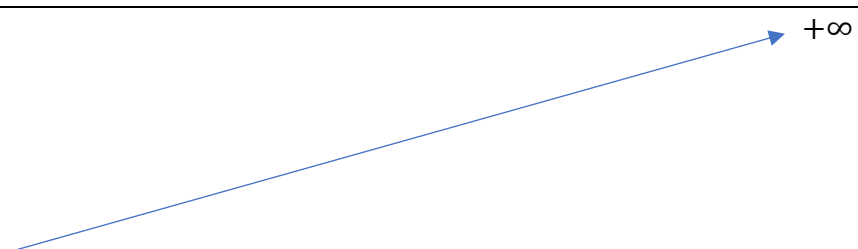
3- Etude classique...On peut voir que :

$$f''(t) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{t} > 0$$

$$\Leftrightarrow t < \frac{1}{2}$$

D'où le tableau de variation suivant :

Signe de x	0	1/2	
Signe de f''(x)		Positif	0 négatif
Variation de f'			
Variation de f			

On peut donc voir que f' atteint son minimum en $t=1/2$ et ce dernier vaut $-\ln(1/2) > 0$, ce qui signifie que f' est strictement positive sur $]0 ; \infty[$.

Conclusion : f est donc strictement croissante sur $]0 ; \infty[$.

Et on a facilement $\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty}$

(Facilement, car $t^2 \rightarrow \infty$)



- 4- (a) Cette question n'est pas très simple si on ne comprend pas la question et elle a piégé beaucoup d'étudiant qui passaient par la définition de la tangente. Or la formule à savoir par cœur de l'équation de la tangente en un point a :

$$y = f'(a)(t-a) + f(a) \text{ NE MARCHE QUE SI LA FONCTION EST DERIVABLE EN A.}$$

Du coup, on ne peut que chercher à montrer que la fonction est dérivable en 0 c'est-à-dire si :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = c \text{ (limite finie)}$$

$$\text{On a } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - t \ln(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t - \ln(t) = +\infty$$

On a donc f qui n'est pas dérivable en 0, mais OUF vu que la limite est plus l'infini, elle admet une tangente verticale en 0.

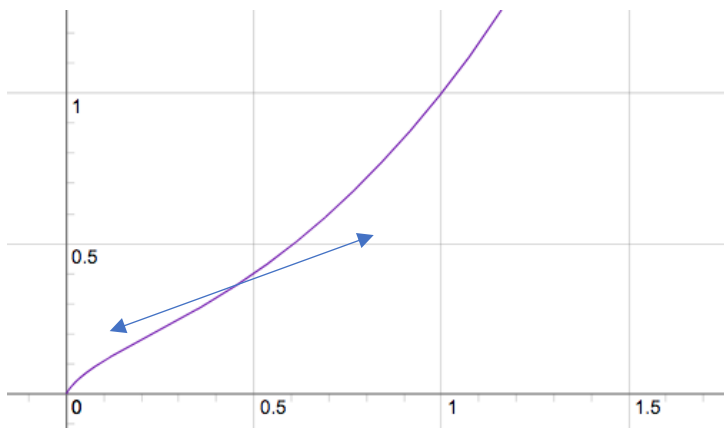
(Penser à une courbe qui monte jusqu'à plus l'infini, ou autrement dit qui a un coefficient directeur infini pour simplifier).

(b) Une courbe représentative d'une fonction admet un point d'inflexion si et SEULEMENT SI sa fonction dérivée seconde s'annule EN CHANGEANT DE SIGNE (et pas juste s'annule, on est d'accord ? Faites attention :p)

f admet donc un point d'inflexion en $t = \frac{1}{2}$ de coordonnées,

$$(1/2, f(1/2)) = (1/2 ; 1/4 + 1/2 * \ln(2))$$

(c) N'oubliez pas de bien montrer la croissance et SURTOUT la bonne forme de la courbe (concave/convexe) en montrant bien le point d'inflexion (en traçant une tangente avec une flèche là où se trouve le point d'inflexion). Ce dernier point c'est en particulier pour ceux qui n'ont pas confiance en leur talent de dessinateur ;)



5- Ici, c'est un théorème de la bijection, qu'il **est incontournable** de savoir maîtriser, en voici donc la rédaction type et les 3 étapes à savoir par cœur (il faut impérativement les 3 à chaque fois) :

- f est strictement croissante et continue sur l'ensemble considéré (ici $[0 ; \infty[$.)
- f réalise donc une bijection de l'ensemble $[0 ; \infty[$ sur l'ensemble $]f(0) ; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)[$
 $= [0 ; +\infty[$
- Or 1 appartient bien à l'ensemble de départ de la bijection $[0 ; +\infty[$.

Conclusion : La solution de l'équation $f(t) = 1$ est donc unique.

De plus, on remarque que $f(1) = 1$, donc 1 est l'unique solution

Partie II) Etude d'une fonction F de deux variables

6- **Ne jamais oublier pour cette question de montrer que les fonctions sont bien C^2 sur l'ensemble considéré avant de procéder aux calculs des dérivées partielles.**

En tant que somme d'une fonctions polynomiale C^2 sur $[0 ; +\infty]$ et d'une fonction usuelle (la fonction $\ln$) C^2 sur $]0 ; +\infty]$, on a donc bien F qui est de classe C^2 sur $]0 ; +\infty]^2$

On a ensuite par calcul des dérivées partielles (voir méthode si vous ne comprenez pas) :

$$\forall (x, y) \in]0 ; +\infty]^2$$

$$\partial_1 F(x, y) = \ln(y) - \frac{y}{x} \quad \text{et} \quad \partial_2 F(x, y) = \frac{x}{y} - \ln(x)$$

7- a- Soit $(x, y) \in]0 ; +\infty]^2$, **(Précisez bien que vous travaillez sur un ouvert, certains profs très à cheval sur la rédaction pourraient vous le reprocher)**

$$F \text{ admet un point critique si et seulement si } \begin{cases} \partial_1 F(x, y) = \ln(y) - \frac{y}{x} = 0 \\ \partial_2 F(x, y) = \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases}$$

Pour obtenir les résultats, il faut d'abord partir de ce que demande l'énoncé et non tenter de faire des manipulations au hasard. En gros, il faut se demander, comment je peux faire pour faire apparaître ce que j'ai envie d'apparaître.

En prenant la deuxième ligne de l'équation, on a :

$$\frac{x}{y} - \ln(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \ln(x)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{\ln(x)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{\ln(x)}$$

Enfin, en reprenant la première ligne et en exprimant y en fonction de x, on obtient :

$$\ln\left(\frac{x}{\ln(x)}\right) = \frac{x}{\ln(x)}$$

$$\Rightarrow \ln(x) - \ln(\ln(x)) = \frac{1}{\ln(x)} \quad \text{D'où en multipliant par } \ln(x),$$

$$\Rightarrow \boxed{f(\ln(x)) = 1}$$

Et j'ai bien ce que je voulais.

b- On reprend les résultats précédents :

$$f(\ln(x)) = 1$$

$$\Rightarrow f^{-1} \circ f(\ln(x)) = f^{-1}(1) \quad (\text{D'après la question 5 qui justifie l'existence d'une bijection, ce qui me permet de composer par cette dernière})$$

$$\Rightarrow \ln(x) = 1 \quad (\text{Pour justifier de l'unique solution égale à 1, on écrit encore d'après la question 5})$$

$$\Rightarrow \underline{x = e} \quad (\text{Propriété de la fonction exponentielle})$$

$$\text{Enfin, on a } \underline{y = e / \ln(e) = e}$$

En conclusion, F admet un unique point critique de coordonnées (e,e)

- 8-** On utilise une méthode classique à maîtriser par cœur, à savoir, recherche des dérivées partielles secondes (à savoir faire), suivi de l'établissement de la matrice hessienne de F au point critique correspondant.

On a bien F de classe C^2 sur $]0 ; +\infty]^2$.

D'où les dérivées partielles secondes suivantes par le calcul,

$\forall (x, y) \in \text{à l'ouvert }]0; +\infty]^2$ (Précisez aussi même si vous ne connaissez et/ou comprenez rien à la topologie, que vous raisonnez sur un ouvert lorsque que vous déterminez la hessienne).

$$\partial_{1,1}F(x, y) = \frac{y}{x^2}$$

$$\partial_{1,2}F(x, y) = \partial_{2,1}F(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$$

et $\partial_{2,2}F(x, y) = \frac{-x}{y^2}$

On peut donc alors établir la matrice Hessienne en (e,e),

$$\nabla^2 F(e, e) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}F(e, e) & \partial_{1,2}F(e, e) \\ \partial_{2,1}F(e, e) & \partial_{2,2}F(e, e) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e} \end{pmatrix}$$

Et c'est là que l'algèbre linéaire revient, et on déroule la méthode on recherche les valeurs propres de cette matrice, ou si on ne peut pas leur signe.

La matrice étant diagonale, ses valeurs propres se lisent sur la diagonale, or ces dernières sont de signes opposés, donc F n'admet pas d'extremum local (c'est un point selle).

Ps : Petit rappel sur la méthode si les valeurs propres sont toutes les deux positives, alors il y'a un min local et si elles sont toutes deux négatives, alors il y'a un max local.

Partie III) Etude d'une suite récurrente

- 9- « Quand on voit pour tout n, il faut toujours penser de suite à une récurrence, même s'il y'a parfois une technique plus rapide. »

Notons tout n appartenant à $\mathbb{N}$ la proposition P(n) : « $U_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ ».

Initialisation : P(0) s'écrit « $U_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$ » Or $U_0 = \frac{1}{2}$

Donc P(0) est vraie.

Hérédité : Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, supposons que P(n) est vraie et montrons qu'il en va de même pour P(n+1)

On a $U_{n+1} = f(U_n) = U_n^2 - U_n \times \ln(U_n)$ (car U_n est différent de 0 d'après l'hypothèse).

Comme f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+_{*}$ sur $[0;1]$, $f(U_n) \in [f(\frac{1}{2}), f(1) = 1]$

Or $f(1/2) = \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2} > \frac{1}{2}$ car $\ln(2) > 1/2$ (en effet on a bien $2 > \text{racine carré de } e$)

D'où, sachant que $U_n \in [\frac{1}{2}, 1]$, $f(U_n) \in [\frac{1}{2}, 1]$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : La proposition est donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

10- *Comme toute à l'heure on peut raisonner à nouveau par récurrence ou être un peu plus rapide...*

Montrons pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$ $U_n < U_{n+1}$.

On a $U_{n+1} = f(U_n) = U_n^2 - U_n \times \ln(U_n) \geq U_n^2 \geq U_n$

En effet, $\ln(U_n)$ est inférieur ou égal à 0 car $U_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.

La suite est donc bien croissante.

11- D'après le **théorème de la limite monotone**, toute suite croissante et majorée admet une limite finie réelle.

La fonction f est bien continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$. (**Argument à NE PAS OUBLIER**)

De plus, $U_n \in [\frac{1}{2}, 1]$. (PAREILLEMENT)

Par unicité de la limite, on a donc bien :

$$l = f(l) \Rightarrow l = l^2 - l \times \ln(l)$$

$$\Rightarrow l - \ln(l) = 1 \text{ (en divisant par } l \text{ différent de } 0)$$

En étudiant la fonction de l'énoncé, et de la même manière que la question 5, on **doit** facilement montrer que la solution $l=1$ est unique.

On a trouvé donc $l=1$ qui est la limite de la suite.

12- *Un peu de scilab pas très méchant pour finir cet exo d'analyse, c'est un schéma classique à maîtriser encore une fois par cœur !!!*

$u=1/2$ //on rentre la valeur de départ U zéro.

$n=0$ //on se trouve au départ à $n=0$, c'est normal c'est la valeur de U zéro.

while $1-u >= 1-10.^4$ // on indique qu'il faut faire tourner la boucle jusqu'à ce seuil tant que la condition est remplie.

$u=u.^2-u*\log(u)$ // on actualise la valeur de u en la remplaçant par $f(u)$

$n=n+1$ // pour chaque actualisation, on augmente la durée de la boucle de un, autrement dit on passe de $u(n)$ à $u(n+1)$

end // à ne jamais oublier pour arrêter la boucle.

Disp (n) // on demande à scilab combien de temps tout cela nous a pris.

Et voilàààà

Exercice 3 : Probabilités à densité

Partie I) Etude d'une variable aléatoire

- 1- Une fonction est paire si pour tout t appartenant à son ensemble de définition $f(t)=-f(t)$. Plusieurs méthodes sont possibles, en voici une parmi d'autres...

$$\text{Ici, } \forall t \in \mathbb{R}, f(-t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = \frac{e^t}{1+2e^t+e^{t^2}} = \frac{1}{e^{-t}+2+e^t} \text{ (en factorisant par } e^t)$$
$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \frac{e^{-t}}{1+2e^{-t}+e^{(-t)^2}} = \frac{1}{e^t+2+e^{-t}} = f(-t) \text{ (en factorisant par } e^{-t})$$

La fonction est donc bien paire.

- 2- Pour montrer qu'une variable est à densité, on n'oublie surtout pas de citer les trois points principaux, à savoir la stricte positivité, la continuité et l'intégrale de la fonction densité égale à 1 (entre $-\infty$ et $+\infty$).

- f est bien continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$
- f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions strictement positives sur $\mathbb{R}$ et **dont le dénominateur ne s'annule pas.**

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt$ (Il faut prouver la convergence de cette intégrale, donc il faut bien séparer cette intégrale en deux).

Soit $A > 0$, nous avons,

$$\int_0^A \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = [-(1+e^{-t})]_0^A = \frac{1}{2} - (1+e^{-A}) \xrightarrow{A \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2}$$

D'où $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

On peut aussi par un changement d'indice très rapide ($t = -u$), et en réutilisant la parité de f que :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = \frac{1}{2}$$

$$\text{On a donc } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = 1$$

PS : Cette méthode est à savoir redémontrer en revenant **TOUJOURS AUX INTEGRALES PARTIELLES** est un classique... Donc si vous connaissez déjà ce résultat ou qu'on vous a demandé dans une question précédente de démontrer la parité d'une fonction, vous **DEVEZ SAVOIR** que les intégrales « coupées en deux » valent la même chose.

Revoyez la méthode du changement d'indice si besoin.

Enfin, n'oubliez pas le dt ou le dx dans les intégrales :p

Conclusion : f est bien la densité d'une variable aléatoire réelle.

3-

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = \lim_{B \rightarrow -\infty} [-(1+e^{-t})]_B^x = \frac{1}{(1+e^{-x})^2}$$

- 4- a- Ici, la question nous demande de montrer une convergence. La méthode la plus simple est dans ce cas d'utiliser les méthodes de comparaisons de Riemann. Il faut donc reproduire une nouvelle fois ce schéma à la lettre. Par contre il ne faut pas tomber dans un autre piège facile, qu'est celui d'appliquer le théorème de Riemann sur des bornes allant de 0 à plus l'infini !!! (Quelle horreur pour un prof de maths...)

Tout d'abord, la fonction $t \rightarrow tf(t)$ est bien continue sur 0, ce qui permet d'assurer la convergence de l'intégrale $\int_0^1 tf(t)dt$.

Voici ensuite les trois points à montrer impérativement.

Ensuite on peut voir que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 e^{-t}}{(1+e^{-t})^1} = 0$ Par croissance comparée pour le numérateur (et constante du dénominateur).

- D'où $\frac{te^{-t}}{(1+e^{-t})^1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque t tend vers plus l'infini.
- Les fonctions qui associent à t , $tf(t)$ et $\frac{1}{t^2}$ sont **positives**.
- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, c'est une intégrale de Riemann classique avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

On a donc montré que $\int_0^1 tf(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} tf(t)dt$ convergent, donc $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ converge.

Cependant, c'est là qu'intervient comme à la question [2 l'imparité de la fonction](#).

Par un changement d'indice (en passant par des intégrales partielles) et l'imparité de la fonction, on peut à nouveau montrer que $\int_0^{+\infty} tf(t)dt = - \int_{-\infty}^0 tf(t)dt$. (**Résultat à connaître et à savoir refaire**).

Ce qui prouve que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge. La fonction intégrée étant positive, l'intégrale converge absolument, car montrer la convergence absolue revient à montrer la convergence simple. (On n'oublie pas que pour montrer l'existence d'une espérance, on doit toujours et d'abords passer par la convergence absolue.)

Donc X admet une espérance qui vaut $1-1=0$.

Partie II) Etude d'une autre variable aléatoire

5- Attention à bien rédiger pour cette question.

Ici, c'est presque comme la question 5 de l'exo d'analyse. On justifie donc la continuité par propriété de composition de fonctions composées. En justifiant bien que c'est parce que $1+e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (on peut composer avec le $\ln$ sans restriction). On justifie alors la stricte croissance en dérivant avec une étude de fonction classique. La fonction réalise donc bien une bijection de $\mathbb{R}$. (L'étude de la fonction est à développer sur votre copie)

Enfin, pour trouver l'ensemble de départ de la bijection, on regarde les limites en plus et moins l'infini de φ et on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \ln(1+X) = 0$$

Conclusion = φ réalise bien une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. (*Attention on exclut bien 0, car on cherchait une limite infinie*)

- 6- On cherche maintenant à exprimer la bijection, en gardant en tête que c'est la fonction qui permet de retrouver les antécédents des images d'une autre fonction.

$$\begin{aligned}\text{Soit } y \in]0 ; +\infty[, \ln(1 + e^x) &= y \\ \Leftrightarrow e^y &= 1 + e^x \\ \Leftrightarrow e^y - 1 &= e^x \\ \Leftrightarrow \ln(e^y - 1) &= x\end{aligned}$$

$$\text{D'où pour tout } y \in]0 ; +\infty[, \boxed{\varphi^{-1}(y) = \ln(e^y - 1)}$$

- 7- Question gratuite si on a du bon sens. Donc il faut impérativement y répondre.

On sait que **X est définie sur $\mathbb{R}$** , il en va de même pour φ qui a pour ensemble d'arrivée $]0 ; +\infty[$. (Ou on peut rappeler qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ **sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$**).

Ainsi $\varphi(X)$ ne peut jamais être négative ou nulle. Donc $P(Y \leq 0) = 0$.

- 8- Attention à bien distinguer les deux ensembles de la fonction de répartition.

$$\text{Si } x < 0, \text{ on a } P(Y \leq x) = P(Y \leq 0) = F_Y(x) = 0$$

$$\begin{aligned}\text{Si } x > 0, \text{ on a } F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(\varphi(X) \leq x) \\ &= P(X \leq \varphi^{-1}(x)) \text{ (On justifie par la croissance de la bijection réciproque d'une fonction croissante, qui ne change pas le sens des inégalités)}\end{aligned}$$

$$= F_X(\ln(e^x - 1)) = \frac{1}{1 + e^{-\ln(e^x - 1)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x - 1}} = \frac{1}{(e^x) / (e^x - 1)} = \boxed{1 - e^{-x}}$$

- 9- Question gratuite si vous avez réussi celle d'avant... Et donc un moyen de vérification. D'où la connaissance indispensable des lois du programme.

On reconnaît donc que la fonction de répartition de Y est celle d'une variable suivant une loi exponentielle de paramètre 1.

Y suit donc une loi exponentielle et on a $E[Y]=1$ et $V[Y]=1$

Partie III) Etude d'une convergence en loi

10- a- Ici encore (oui oui vous l'avez compris !) un calcul classique à savoir refaire en un clin d'œil.

- **Le support de T_n est $\mathbb{R}$.** (Penser bien à toujours déterminer le support pour bien calculer par la suite la fonction de répartition).

- $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(T_n \leq x) = P(\text{Max}(X_1, \dots, X_n) \leq x)$$

$$= P(\cap_{i=1}^n X_i \leq x)$$

$$= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) \text{ par indépendance des variables } X_i \text{ !!!!}$$

$$= P(X_1 \leq x)^n \text{ par la distribution identique des variables } X_i.$$

$$= F_X(x)^n$$

$$= \left(\frac{1}{1+e^{-x}} \right)^n = \boxed{(1+e^{-x})^{-n}}$$

b- On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

- $F_{U_n}(x) = P(U_n \leq x) = P(T_n - \ln(n) \leq x)$

$$= P(T_n \leq x + \ln(n)) \quad (\text{on compose facilement car le support est } \mathbb{R})$$

$$= (1 + e^{-x-\ln(n)})^{-n}$$

$$= (1 + e^{-x} \times e^{-\ln(n)})^{-n}$$

$$= \boxed{\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}}$$



11- La dernière question, plutôt longue, doit être rédigée de manière très propre. De plus le calcul de la limite doit être fait minutieusement. Et on ne doit pas tomber dans le piège classique qu'est celui de passer aux équivalents dans l'exponentielle !!!

Pour montrer que la variable converge en loi, et étant donné qu'on a sa fonction de répartition, il va falloir utiliser sa limite. Mais attention à la rédaction :

On considère une variable aléatoire Z .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)} \quad \text{Et on ne passe pas aux équivalents dans l'exponentielle !!!}$$

On remarque que $-n \ln \left(1 + \frac{e^{-x}}{n} \right) \sim -e^{-x}$ lorsque n tend vers plus l'infini. (Équivalent classique du $\ln$).

Donc la limite de ce terme est donc e^{-x} . D'où par COMPOSITION DE LIMITE,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n \ln \left(1 + \frac{e^{-x}}{n} \right)} = e^{-e^{-x}}$$

On note F_Z , la fonction de répartition de Z , telle que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $F_Z(x) = e^{-e^{-x}}$

Par composition de fonctions usuelles, cette fonction est bien continue sur $\mathbb{R}$.

L'argument de continuité est primordial, car il permet de prouver la convergence en loi de U_n .

On a donc en tout point où F_Z est continue (donc pour x appartenant à $\mathbb{R}$),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{U_n}(x) = e^{-e^{-x}} = F_Z(x)$$

Ce qui nous permet de conclure que U_n converge en loi vers Z .

Fini ? Nooon, il reste encore à montrer que la variable est à densité. Pour ce faire, on passe par la fonction de répartition de Z ...

Par composition de fonctions usuelles qui sont C^1 sur $\mathbb{R}$ (des exponentielles), F_Z est donc C^1 et donc par conséquent continues sur $\mathbb{R}$.

On peut également voir que la limite de F_Z en plus et moins l'infini fait respectivement 0 et 1. (à faire !)

Enfin, en dérivant, on peut montrer que F_Z est croissante sur $\mathbb{R}$. (à faire !)

Ce qui nous autorise à dériver la fonction de répartition de F_Z pour en donner une densité.

En conclusion, on a donc une densité de Z qui nous est donnée $\forall x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_Z(x) = \boxed{F'_Z(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}}}$$

Allez, bonne année ! ;)