BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2009

Conception : E.S.C.P – E.A.P.

285

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES

CCIP_MATT

Mardi 5 mai 2009, de 8 h. à 12 h.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.
Dans les exercices 1 et 3, la notation ln *désigne le logarithme népérien.*

Exercice 1

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de $[0,+\infty[$, par la relation : $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

1. (a) On note f' la dérivée de f. Calculer, pour tout réel x positif, $f'(x)$.
   (b) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
   (c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   (d) Dresser le tableau de variation de f.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de u_n.
   (b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'encadrement suivant :

$$2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \frac{1}{n}$$

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

5. (a) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, comparer $\frac{1}{k}$ et $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$.

   (b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$$

6. Utiliser les questions précédentes pour montrer que : $\lim_{n \to +\infty} n u_n = \frac{1}{2}$

Exercice 2

La probabilité d'un événement A est notée $P(A)$, et pour tout événement B tel que $P(B) \neq 0$, on note $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.

On dispose de trois urnes numérotées 1,2 et 3, qui contiennent chacune deux boules.
• L'urne numéro 1 contient deux boules blanches.
• L'urne numéro 2 contient une boule blanche et une boule rouge.
• L'urne numéro 3 contient deux boules rouges.
L'expérience consiste à choisir une fois pour toutes une urne « au hasard », puis à y effectuer une succession de tirages d'une boule *avec remise*, jusqu'à l'éventuelle apparition d'une boule blanche.
Pour tout entier k compris entre 1 et 3, on note U_k l'événement : « On choisit l'urne numéro k ».
Par suite, on a : $P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$.
On considère la variable aléatoire X égale au rang du tirage où apparaît pour la première fois une boule blanche.
On attribue à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais de boule blanche.

1. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

   (b) Justifier les résultats suivants : $P_{U_1}([X=1]) = 1$, $P_{U_2}([X=1]) = \frac{1}{2}$ et $P_{U_3}([X=1]) = 0$.

   (c) En utilisant le théorème des probabilités totales, établir la relation : $P([X=1]) = \frac{1}{2}$.

2. (a) Justifier que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, on a : $P_{U_1}([X=j]) = 0$ et $P_{U_3}([X=j]) = 0$.

   (b) Calculer, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P_{U_2}([X=j])$.

   (c) Montrer, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, la relation : $P([X=j]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j$.

3. Utiliser les résultats précédents pour calculer $P([X=0])$. Proposer une interprétation de ce dernier résultat.

4. *On rappelle que, pour tout réel x de $]0,1[$, on a :* $\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

   (a) Justifier l'existence de l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

   (b) Calculer $E(X)$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   (c) Dresser le tableau de variation de f.
   (d) Écrire une équation de la droite (T) tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
   (e) Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion. Déterminer les coordonnées de ce point.
2. Pour tout réel y supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose : $F_n(y) = \displaystyle\int_1^y \frac{\ln(x)}{x^n} dx$.
   (a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $F_n(y)$ en fonction de y et n.
   (b) Montrer que $F_n(y)$ a une limite quand y tend vers $+\infty$; on la note L_n.
   Établir la formule : $L_n = \dfrac{1}{(n-1)^2}$.
3. Soit α un réel et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \alpha f(x) \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$$
   Déterminer la valeur du réel α pour que g soit une densité de probabilité.
4. Le réel α ayant la valeur trouvée précédemment, on considère une variable aléatoire X admettant g pour densité.
   Pour tout réel y supérieur ou égal à 1, on pose : $G(y) = \displaystyle\int_1^y x g(x) dx$.
   (a) Établir la formule : $G(y) = \dfrac{1}{2}(\ln(y))^2$.
   (b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance mathématique ?

Exercice 4

On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit a, b, x, y, quatre réels qui vérifient : $aA + bI = xA + yI$. Montrer que $a = x$ et $b = y$.
2. (a) Calculer A^2 en fonction de A et I.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un unique couple de réels (u_n, v_n) tel que $A^n = u_n A + v_n I$. (On rappelle que, pour toute matrice carrée P, on a $P^0 = I$).
   On vérifiera, pour tout entier naturel n, les relations : $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n$.
3. (a) Si l'on suppose que pour un certain entier naturel n, u_n et v_n sont positifs, montrer que u_{n+1} et v_{n+1} sont également positifs.
   (b) En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont positifs.
4. (a) Établir, pour tout entier naturel n, la relation : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
5. Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation : $A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$.

6. Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, les relations :

$$\begin{cases} u_{2n-1} = u_{n-1}^2 + u_n^2 \\ u_{2n} = u_n u_{n-1} + u_n u_{n+1} \end{cases}$$

7. Pour toute matrice carrée M d'ordre 2 de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels quelconques, on pose : $d(M) = ad - bc$.
   (a) Soit a, b, c, d, x, y, z, t, huit réels quelconques. On considère les deux matrices : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Calculer le produit MN ainsi que $d(MN)$.
   (b) Montrer que $d(MN) = d(M) \times d(N)$.
   (c) Établir par récurrence, pour toute matrice M carrée d'ordre 2 et pour tout entier naturel n, la formule : $d(M^n) = [d(M)]^n$.
8. En utilisant le résultat précédent, montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation : $u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^n$.