CORRIGÉ

EXERCICE 1.

1. (a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est impaire car :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f(-x) = e^{-x} - e^{x} = -\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -f(x)$$
La courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O.

   (b) Etant donné que
$$\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0,$$
on peut affirme que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. En outre, on a
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} \times \frac{1}{x} = 0 \times 0 = 0$$
et d'après les croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$, on peut affirmer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

2. (a) $f'(x) = e^{x} - (-1)\, e^{-x} = e^{x} + e^{-x}$

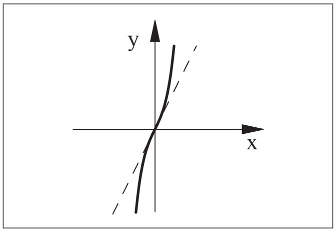
   (b) D'après le calcul précédent, $f'(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$ (comme somme de deux réels strictement positifs) donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (par imparité).

   (c) $f(0) = e^{0} - e^{-0} = 1 - 1 = 0$ donc, par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}$, on peut affirmer que
$$\begin{aligned} f(x) &> f(0) = 0 \text{ quand } x > 0 \\ f(x) &< f(0) = 0 \text{ quand } x < 0. \end{aligned}$$

   (d) D'après le cours, on a $y = f'(0)\,(x - 0) + f(0) = 2x$.

3. (a) Etant donné que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f''(x) = e^{x} - e^{-x} = f(x)$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$, on peut affirmer que f est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) En trait gras, $\mathcal{C}_f$ et en trait fin T (puisque f est concave sur $\mathbb{R}_-$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente T sur $\mathbb{R}_-$ et puisque f est convexe sur $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente T sur $\mathbb{R}_+$)



4. (a) La fonction f est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$, strictement sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f\right[=]-\infty, +\infty[$. Comme $n \in]-\infty, +\infty[$, on peut affirmer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution. En outre, comme $f(0) = 0$, on peut affirmer que 0 est la seule solution de $f(x) = 0$ c'est-à-dire que $u_0 = 0$.

(b) Un calcul direct montre que

$$f(\ln(n)) = e^{\ln(n)} - \frac{1}{e^{\ln(n)}} = n - \frac{1}{n} < n = f(u_n)$$

donc, par stricte croissance de f, on peut affirmer $\ln(n) < u_n$. Etant donné que $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, on obtient que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(c) Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = n^2 - 4(-1) = n^2 + 4 > 0$ donc l'équation admet deux solutions réels $\alpha_n = \dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2} > 0$ et $\beta_n = \dfrac{n-\sqrt{n^2+4}}{2} < \dfrac{n-\sqrt{n^2}}{2} = 0$

(d) A l'aide du changement de variable $t = e^x$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= n \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = n \Leftrightarrow t - \frac{1}{t} = n \underset{*t}{\Leftrightarrow} t^2 - 1 = nt \Leftrightarrow t^2 - nt - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} t = \alpha_n \\ \text{ou} \\ t = \beta_n \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x = \alpha_n > 0 \\ \quad\text{ou} \\ \underbrace{e^x}_{>0} = \beta_n < 0 \quad \text{impossible} \end{array} \right. \Leftrightarrow e^x = \alpha_n \Leftrightarrow x = \ln(\alpha_n) \end{aligned}$$

donc $u_n = \ln\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$.

EXERCICE 2.

PARTIE I.

1. Un calcul direct montre que $N^2 = 0$ donc $\forall k \geqslant 2, \quad N^k = N^2 N^{k-2} = 0N^{k-2} = 0$.

2. (a) Un calcul direct montre que

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + z = a \\ -x - 2z = b \\ y = c \end{array} \right. \underset{2(1)+(2)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} x = 2a + b \\ y = c \\ z = -a - b \end{array} \right.$$

donc la matrice P est bien inversible et l'on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Un calcul direct montre que

$$P^{-1}\Delta = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}\Delta P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

(c) En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} (de part et d'autre de l'égalité), on a : $\Delta = PDP^{-1}$.

(d) Comme $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = \Delta^0$, l'initialisation $n = 0$ est vérifiée. Pour l'hérédité, si la formule est vraie au rang n alors

$$\Delta^{n+1} = \Delta^n\Delta = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

ce qui démontre la propriété au rang $n+1$ et démontre la formule pour tous les rangs n.

(e) Comme D est une matrice diagonale, on a :

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et un calcul direct montre que

$$PD^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (a) Un calcul direct montre que

$$N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N = \Delta N$$

(b) Puisque $A = N+\Delta$ et que N, Δ commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton donc

$$\begin{aligned} A^n &= (N+\Delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{N^k}_{=0 \text{ si } k\geqslant 2} \Delta^{n-k} = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k\Delta^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0\Delta^n + \binom{n}{1} N^1\Delta^{n-1} = \Delta^n + nN\Delta^{n-1} \end{aligned}$$

(c) D'après la question précédente, on a

$$A^n = \Delta^n + nN\Delta^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n & 0 \\ 2-2^{n+1} & -2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & -n \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PARTIE II.

1. (a) La suite $(z_n)_n$ est constante donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = z_0 = 1$.

(b) $x_{n+1} = 3x_n + y_n - 1, \quad y_{n+1} = -2x_n + 2$.

2. (a) Pour tout entier n, on a

$$r_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = (3x_n + y_n - 1) + (-2x_n + 2) = x_n + y_n + 1 = r_n + 1$$

donc la suite $(r_n)_n$ est arithmétique de raison 1.

(b) On peut alors écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = r_0 + n.1 = (1+1) + n = n+2 \Leftrightarrow x_n + y_n = n+2.$$

3. (a) Pour tout entier n, on a

$$s_{n+1} = 2x_{n+1} + y_{n+1} = 2(3x_n + y_n - 1) + (-2x_n + 2) = 4x_n + 2y_n = 2s_n$$

donc la suite $(s_n)_n$ est géométique de raison 2.

(b) On peut alors écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = s_0 2^n = (2 * 1 + 1) 2^n = 3 * 2^n \Leftrightarrow 2x_n + y_n = 3 * 2^n.$$

4. En utilisant les questions 2 et 3, déterminer x_n et y_n en fonction de n. On dispose du système suivant

$$\begin{cases} x_n + y_n = n + 2 \\ 2x_n + y_n = 3 * 2^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n = 3 * 2^n - n - 2 & (2) - (1) \\ y_n = 2n + 4 - 3 * 2^n & 2(1) - (2) \end{cases}$$

EXERCICE 3.

Partie I.

1. (a) $P(E) = 0,2; \quad P(A) = 0,8; \quad P_E(T) = 0,5; P_A(T) = 0,375.$

(b) On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{E, A\}$:

$$P(T) = P_E(T)P(E) + P_A(T)P(A) = 0,4.$$

(c) On utilise la formule de Bayes :

$$P_T(E) = \frac{P(E \cap T)}{P(T)} = \frac{P(E) P_E(T)}{P(T)} = 0,25.$$

2. (a) X représente le nombre de succès (un appel concerne du petit électro ménager) dans une série de 10 épreuves identiques et indépendantes, donc X suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,2$ c'est-à-dire

$$X(\Omega) = \{0, 1, .., 10\} \text{ et } \forall k \in \{0, .., 10\}, \quad P(X = k) = \binom{10}{k} (0,2)^k (0,8)^{10-k}.$$

(b) D'après le cours on peut affirmer que

$$E(X) = np = 10 * 0,2 = 2, \quad V(X) = np(1-p) = 2 * 0,8 = 1,6.$$

3. (a) Comme précédemment, on peut écrire que Y suit la loi $\mathcal{B}(600; 0,4)$

(b) D'après le cours on sait que la loi normale a pour paramètre

$$m = np = 600 * 0,4 = 240, \quad \sigma^2 = np(1-p) = 240 * 0,6 = 144$$

(c) En posant $Z^* = \dfrac{Z - m}{\sigma} = \dfrac{Z - 240}{12}$ (variable centrée réduite associée à Z), on a :

$$P(Y \leqslant 252) \simeq P(Z \leqslant 252) = P\left(Z^* \leqslant \frac{252 - 240}{12}\right) = P(Z^* \leqslant 1) \simeq 0,8413$$

Partie II.

1. (a) On pose $u = x$, $v' = e^{-x}$ donc $u' = 1$, $v = -e^{-x}$ (par exemple) donc on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A xe^{-x}dx &= \left[x\left(-e^{-x}\right)\right]_0^A - \int_0^A 1\left(-e^{-x}\right)dx = -Ae^{-A} + \int_0^A e^{-x}dx \\ &= -Ae^{-A} + \left[-e^{-x}\right]_0^A = -Ae^{-A} - e^{-A} + 1.\end{aligned}$$

D'après les croissances comparées, on peut affirmer que $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A xe^{-x}dx = 1$.

(b) L'intégrale impropre : $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ est convergente et sa valeur vaut 1.

2. (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (car les fonctions $x \mapsto 0$ et $x \mapsto xe^{-x}$ sont continues respectivement sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$). En outre, on a

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{-x} = 0$$

donc on peut affirmer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ c'est-à-dire que f est continue en 0.

(b) La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1 (question **1.b**), l'intégrale $\int_{-\infty}^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx$ converge et vaut 0 donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = 0 + 1 = 1$$

donc f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire.

3. On suppose que lors d'un appel au standard, le temps de celui-ci en minutes est une variable aléatoire M à densité dont une densité est f.

(a) Par définition, on a pour tout réel t :

$$F(t) = P(M \leqslant t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$$

Premier cas : si $t < 0$ alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in]-\infty, t] \subset \mathbb{R}_-^*$ donc $F(t) = \int_{-\infty}^t 0dx = 0$.

Second cas : si $t \geqslant 0$ alors

$$\begin{aligned}F(t) &= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^t f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^t xe^{-x}dx \\ &= 0 + te^{-t} - e^{-t} + 1 = 1 - e^{-t}(t+1).\end{aligned}$$

(b) i) $P(M \leqslant 4) = F(4) = 1 - 5 * e^{-4}$. iii) $P(2 \leqslant M \leqslant 4) = F(4) - F(2) = 3 * e^{-2} - 5 * e^{-4}$.

iii) $P_{(M \geqslant 2)}(M \leqslant 4) = \dfrac{P((M \leqslant 4) \cap (M \geqslant 2))}{P(M \geqslant 2)} = \dfrac{P(2 \leqslant M \leqslant 4)}{1 - P(M < 2)}$

$= \dfrac{3 * e^{-2} - 5 * e^{-4}}{1 - (1 - 3 * e^{-2})} = \dfrac{3 * e^{-2} - 5 * e^{-4}}{3 * e^{-2}} = 1 - \dfrac{5}{3 * e^{2}}$

4. Soit $A \geqslant 0$, en utilisant l'intégration par parties suivante $u = x^2$, $v' = e^{-x}$, $u' = 2x$, $v = -e^{-x}$, on a :

$$\int_{-\infty}^{A} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{xf(x)}_{=0}dx + \int_{0}^{A} xf(x)dx = \int_{0}^{A} xf(x)dx = \int_{0}^{A} x^2 e^{-x}dx$$

$$= \left[x^2\left(-e^{-x}\right)\right]_0^A - \int_{0}^{A} 2x\left(-e^{-x}\right)dx = -A^2 e^{-A} + 2\int_{0}^{A} xe^{-x}dx \underset{A \to +\infty}{\to} -0 + 2 * 1 = 2$$

d'après les croissances comparées et la question **1.b** donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge et vaut 2. Par conséquent, M admet une espérance qui vaut 2.

5. Le coût moyen d'un appel pour un client vaut $E(Z) = 1 + 0,2E(M)$ (par linéarité de l'espérance) $= 1,4$ euros.