CORRIGÉ

Corrigé

EXERCICE 1.

1. (a) Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors on a les équivalences suivantes

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ -2x + y = b \\ -y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 2a + b \\ z = 2a + b + c \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} Y$$

donc la matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) On procède par récurrence.

Initialisation $n = 0$. On pose $u_0 = v_0 = 0$ alors $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_0 & 1 & 0 \\ v_0 & u_0 & 1 \end{pmatrix}$ donc l'initialisation est vérifiée.

Hérédité. Supposons la propriété vérifiée au rang n alors :

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 & 0 \\ v_n & u_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n - 2 & 1 & 0 \\ v_n - 2u_n & u_n - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose alors

$$\begin{cases} 2u_{n+1} = 2u_n - 2 \\ v_{n+1} = v_n - 2u_n \\ u_{n+1} = u_n - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} = u_n - 1 \\ v_{n+1} = v_n - 2u_n \end{cases}$$

ce qui démontre la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

(c) La suite $(u_n)_n$ est arithmétique de raison -1 donc pour tout entier n, $u_n = u_0 + n(-1) = -n$.

(d) On procède par récurrence.

Initialisation $n = 1$. Puisque $2\sum_{k=0}^{1-1} k = 2\sum_{k=0}^{0} k = 2 \times 0 = 0 = v_0$, l'initialisation est vérifiée.

Hérédité. Supposons la propriété vérifiée au rang n alors

$$v_{n+1} = v_n - 2u_n = \left(2\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + 2n = 2\sum_{k=0}^{n} k$$

ce qui démontre la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

(e) D'après la question précédente, on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_n = 2\frac{n(n-1)}{2} = n(n-1) \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2n & 1 & 0 \\ n(n-1) & -n & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Un calcul direct montre que

$$f'(x) = (2ax + b)\, e^{-x} - \left(ax^2 + bx + c\right) e^{-x} = e^{-x} \left(-ax^2 + x\,(2a - b) + b - c\right)$$

En posant

$$\begin{cases} a_1 = -a \\ b_1 = 2a - b \\ c_1 = b - c \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

(b) Puisque A est inversible, on a $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -A^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -2a_1 - b_1 \\ -2a_1 - b_1 - c_1 \end{pmatrix}$.

3. D'après la question précédente, si l'on pose $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ et $c_1 = 1$ alors $a = 0$, $b = -1$ et $c = -2$ alors la fonction

$$R(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) e^{-x} = (-x - 2)\, e^{-x}$$

vérifie $R'(x) = r(x)$ donc il s'agit bien d'une primitive de r.
De même, si l'on pose $a_1 = 1$, $b_1 = 1$ et $c_1 = 0$ alors $a = -1$, $b = -3$ et $c = -3$ alors la fonction

$$S(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) e^{-x} = \left(-x^2 - 3x - 3\right) e^{-x}$$

vérifie $S'(x) = s(x)$ donc il s'agit d'une primitive de s.

4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x < 0, \quad g(x) = 0, \quad \forall x \geqslant 0, \quad g(x) = \frac{1}{2}\,(x + 1)\, e^{-x}.$$

(a) En utilisant la question 3, on a

$$\begin{aligned} \int_0^X g(x)dx &= \int_0^X \frac{1}{2} r(x)dx = \left[\frac{R(x)}{2}\right]_0^X = \frac{R(X) - R(0)}{2} = \frac{(-X - 2)e^{-X} + 2}{2} \\ &= -\frac{X}{2} e^{-X} - e^{-X} + 1 \\ \int_0^X xg(x)dx &= \int_0^X \frac{1}{2} s(x)dx = \left[\frac{S(x)}{2}\right]_0^X = \frac{S(X) - S(0)}{2} = \frac{(-X^2 - 3X - 3)e^{-X} + 3}{2} \\ &= -\frac{X^2}{2} e^{-X} - \frac{3}{2} X e^{-X} - \frac{3}{2} e^{-X} + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(b) Puisque $\lim\limits_{X \to +\infty} X^2 e^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} X e^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = 0$, la question précédente montre que

$$\lim_{X \to +\infty} \int_0^X g(x)dx = 1, \quad \lim_{X \to +\infty} \int_0^X xg(x)dx = \frac{3}{2}$$

c'est-à-dire que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xg(x)dx$ convergent valent respectivement 1 et $\dfrac{3}{2}$.

(c) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ (car elle y est nulle), continue sur $\mathbb{R}_+$ (produit de deux fonctions continues sur cet intervalle) et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0$ donc elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. La fonction g est positive sur $\mathbb{R}$, pour tout réel $X \leqslant 0$, on a

$$\int_X^0 g(x)dx = \int_X^0 0dx = 0 \underset{X\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^0 g(x)dx$ converge et vaut 0. D'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)dx$ converge et vaut 1 donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ converge et vaut 1. Par conséquent, g est bien une densité de probabilité.

(d) La fonction $xg(x)$ est continue par moceaux sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale suivante converge

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx = \int_0^{+\infty} xg(x)dx = \frac{3}{2}$$

(même argumentaire que pour g) donc X admet une espérance valant $\frac{3}{2}$.

EXERCICE 2.

1. (a) On remarque que

$$\begin{aligned} x \geqslant 1 \Rightarrow 2x-1 \geqslant 2\times 1 - 1 = 1 \\ \Rightarrow f(x) - 1 = \frac{x^2-(2x-1)}{2x-1} = \frac{(x-1)^2}{2x-1} \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \geqslant 1, \\ \frac{x+1}{2} - f(x) = \frac{(x+1)(2x-1)-2x^2}{2(2x-1)} = \frac{x-1}{2(2x-1)} \geqslant 0 \end{aligned}$$

(b) Pour la première inégalité, on procède par récurrence.
Initialisation $n = 0$. Puisque $u_0 \in [1, +\infty[$ alors $u_0 \geqslant 1$ ce qui justifie l'initialisation.
Hérédité. Supposons la propriété vérifiée au rang n alors

$$u_n \geqslant 1 \underset{\text{q1}}{\Rightarrow} f(u_n) \geqslant 1 \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant 1$$

ce qui démontre la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
Pour la seconde s'obtient en remplaçant x par u_n dans la seconde inégalité de la question 1.

(c) **Initialisation** $n = 0$. Par hypothèse, on a $u_0 \geqslant 1$ et comme

$$1 + \frac{1}{2^0}(u_0 - 1) = 1 + (u_0 - 1) = u_0 \geqslant u_0,$$

l'initialisation est vérifiée.
Hérédité. Supposons la propriété vérifiée au rang n alors, étant donné que $u_n \geqslant 1$, l'inégalité de la question précédente montre que

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leqslant \frac{1}{2}(u_n+1) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^n}(u_0-1) + 1\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2^{n+1}}(u_0 - 1) \end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

(d) Etant donné que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}(u_0-1) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}(u_0-1)\right) = 1$ et l'inégalité de la question précédente permet d'appliquer le théorème d'encadrement ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2. (a) $f(x) = \frac{x^2}{2x}.\frac{1}{1-\frac{1}{2x}} = \underbrace{\frac{x}{2}}_{\to+\infty}.\overbrace{\boxed{\frac{1}{1-\underbrace{\boxed{\frac{1}{2x}}}_{\to 0}}}}^{\to\frac{1}{1-0}=1} \to +\infty.$

(b) $\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{2x-1} = \frac{x}{2x}.\frac{1}{1-\frac{1}{2x}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{1}{2x}} \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{1}{2} = a,$

$f(x)-\frac{x}{2} = \frac{x^2}{2x-1}-\frac{x}{2} = \frac{2x^2-x(2x-1)}{2(2x-1)} = \frac{x}{2(2x-1)} = \frac{x}{4x}.\frac{1}{1-\frac{1}{2x}} = \frac{1}{4}.\frac{1}{1-\frac{1}{2x}} \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{1}{4} = b$

(c) $f(x)-\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = \frac{x^2}{2x-1}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = \frac{x}{2(2x-1)}-\frac{1}{4} = \frac{2x-(2x-1)}{4(2x-1)} = \frac{1}{4(2x-1)} \Rightarrow c = \frac{1}{4}.$

(d) Etant donné que $f(x)-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, on en déduit que la droite $(\mathcal{D}) : y = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ et comme

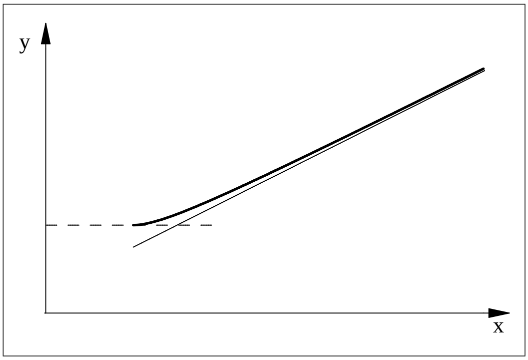
$$f(x)-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4(2x-1)} \geqslant 0,$$

on peut affirmer que $(\mathcal{D})$ est située sous la courbe $\mathcal{C}_f$.

3. (a) $f'(x) = \frac{(2x)(2x-1)-x^2(2)}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}.$

(b) Puisque $x \geqslant 1$, on peut affirmer que $f'(x) \geqslant 1$ pour tout $x \geqslant 1$ donc f est croissante sur $[1,+\infty[$.

(c) En trait gras, $\mathcal{C}_f$, en trait fin $(\mathcal{D})$ et en pointillé $(\mathcal{T}) : y = f'(1)(x-1)+f(1) = 1$.



4. Etude d'une réciproque.

   (a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur
   $$f\left([1,+\infty[\right) = \left[f(1), \lim_{+\infty} f\right[= [1,+\infty[\,.$$

   (b) Le réel t étant fixé $\geqslant 1$, l'équation considèrée est du second degré, son discriminant vaut
   $$\Delta = (-2t)^2 - 4t = 4t^2 - 4t = 4t\,(t-1) \geqslant 0$$
   donc l'équation admet deux solutions qui sont
   $$x_+ = \frac{2t + \sqrt{4t\,(t-1)}}{2} \text{ et } x_- = \frac{2t - \sqrt{4t\,(t-1)}}{2}$$

   (c) $f(x) = t \Leftrightarrow x^2 = t\,(2x-1) \Leftrightarrow x^2 - 2xt + t = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_+, x_-\}$. Etant donné que $x_+ \geqslant \frac{2t}{2} = t \geqslant 1$ et que l'équation considérée n'admet qu'une seule solution $x \geqslant 1$, on est assuré que $x = x_+$.

EXERCICE 3.

1. (a) On note A l'événement «piocher deux boules de même couleur» alors $P(A) = \dfrac{\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \dfrac{1}{3}$ (cas favorable : on choisit une des deux couleurs, 2 choix possibles, puis on pioche les deux boules de cette couleur. Cas possible : choisir 2 boules parmi 4 boules).

   (b) Les tirages étant indépendant, l'expérience étant identique à chaque tirage et N désignant le nombre de succès de l'événement A, on peut affirmer que N suit la loi binômiale $\mathcal{B}(n, P(A)) = \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$ donc
   $$\forall k \in \{0,..,n\}, \quad P(N=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

   (c) $E(N) = \dfrac{n}{3}, \quad V(N) = \dfrac{2n}{9}$

   (d) Il s'agit en fait de l'évènement $(N \geqslant 1)$ donc
   $$P(N \geqslant 1) = 1 - P\left(\overline{N \geqslant 1}\right) = 1 - P(N=0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

2. (a) Puisque l'urne U contient 4 boules, l'évènement $(X=1)$ est impossible donc $P(X=1) = 0$.
   L'événement $(X=2)$ se réalise si et seulement si on a pioché 2 boules de même couleur au premier tirage (au second tirage, les deux boules étant alors de même tirage, l'urne est vidée à l'issue du second tirage) donc
   $$P(X=2) = P(A) = \frac{1}{3}.$$
   L'événement $(X=3)$ se réalise si et seulement si on pioche au premier tirage deux boules de couleurs différentes et qu'au second tirage on pioche deux boules de même couleur (alors au troisième tirage, les deux boules restant dans l'urne sont de même couleur et l'urne U est vide

à l'issue de ce tirage).
On note alors pour tout entier $i \geqslant 1$, on note A_i : «au i-ième tirage, dans l'urne U, les deux boules sont de même couleur» alors

$$P(X=3) = P\left(\overline{A_1} \cap A_2\right) = P\left(\overline{A_1}\right) P_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

En effet, la probabilité conditionnelle $P_{\overline{A_1}}(A_2)$ correspond au fait que la première pioche est réalisée (donc l'urne U conserve sa composition initiale) et au second tirage on obtienne deux boules de même couleur.

(b) L'événement $(X=n)$ se réalise si et seulement si les deux boules de même couleur sont piochées au $(n-1)$-ième tirage et pas lors des tirages précédents (sinon l'urne serait vidée avant le n-ième tirage). Avec les notations de la question précédente, on a

$$\begin{aligned} P(X=n) &= P\left(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-2}} \cap A_{n-1}\right) \\ &= P\left(\overline{A_1}\right) P_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right) \cdots P_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-3}}}\left(\overline{A_{n-2}}\right) P_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-2}}}(A_{n-1}) \\ &= (1-a) \times (1-a) \times \cdots \times (1-a) \times a = (1-a)^{n-2} a \end{aligned}$$

(c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$P(Z=n) = P(X-1=n) = P(X=n+1) = (1-a)^{n-1} a$$

donc Z suit bien la loi géométrique de paramètre a.

(d) $E(Z) = \dfrac{1}{a}$, $V(Z) = \dfrac{1-a}{a^2}$, $E(X) = E(Z+1) = E(Z)+1 = \dfrac{1}{a}+1$, $V(X) = V(Z+1) = V(Z) = \dfrac{1-a}{a^2}$.

3. **Initialisation** $n=2.\dfrac{\lambda}{r-s}\left(r^{2-2}-s^{2-2}\right) = \dfrac{\lambda}{r-s}(1-1) = 0 = u_2$ donc l'initialisation est vérifée.
Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang n alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \lambda r^{n-2} + s\, u_n = \lambda r^{n-2} + s \frac{\lambda}{r-s}\left(r^{n-2} - s^{n-2}\right) \\ &= \frac{\lambda(r-s)r^{n-2} + s\lambda\left(r^{n-2}-s^{n-2}\right)}{r-s} = \frac{\lambda r^{n-1} - \lambda s r^{n-2} + s\lambda r^{n-2} - \lambda s^{n-1}}{r-s} \\ &= \frac{\lambda r^{n-1} - \lambda s^{n-1}}{r-s} = \frac{\lambda}{r-s}\left(r^{n-1} - s^{n-1}\right) \end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

4. (a) $b = \dfrac{\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \dfrac{1}{5}$ (cas favorables : choisir une couleur, 3 choix possibles, puis piocher les deux boules de cette couleur, 1 seul choix, cas possibles : choisir 2 boules parmi les 6 disponibles).

(b) L'évènement $(Y=2)$ est impossible (il faut au moins 3 tirages avant de vider l'urne) donc $P(Y=2)=0$.
L'évènement $(Y=3)$ se réalise si et seulement si on pioche à chaque tirage deux boules de même couleur.
On considère pour tout $i \geqslant 1$, l'évènement B_i : « au i-ième tirage dans l'urne V, les deux boules sont de même couleur »En conservant les notations de la question 2.a, on a

$$P(Y=3) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) P_{B_1}(B_2) = ba = \frac{1}{15}.$$

En effet, la probabilité $P_{B_1}(B_2)$ correspond au fait suivant : on vient de piocher deux boules de même couleur au premier tirage et on souhaite obtenir deux boules de même couleur au tirage suivant. L'urne V contenant maintenant 4 boules, on obtient la même configuration que piocher deux boules de même couleur dans l'urne U.

(c) En suivant l'indication de la question, on a

$$\begin{aligned}
P(Y=n+1) &= P(B\cap(Y=n+1)) + P\left(\overline{B}\cap(Y=n+1)\right) \\
&= P(B)\,P_B(Y=n+1) + P\left(\overline{B}\right) P_{\overline{B}}(Y=n+1) \\
&= bP(X=n) + (1-b)\,P(Y=n)\,.
\end{aligned}$$

En effet, la probabilité $P_B(Y=n+1)$ correspond au fait suivant : on vient de piocher deux boules de même couleur dans V et on souhaite vider l'urne à l'issue du $(n+1)$-ième tirage. Autrement dit, l'urne est désormais composée de 4 boules (assimilable à l'urne U pour le choix des couleurs restantes) et il faut vider cette nouvelle urne à l'issue de n tirages (compte-tenu qu'un tirage est déjà effectué). La réalisation de cet évènement est assimilable à la réalisation de l'événement $(X=n)$.
La probabilité $P_{\overline{B}}(Y=n+1)$ correspond au fait suivant : on vient de piocher deux boules de même couleur et on souhaite vider l'urne à l'issue du $(n+1)$-ième tirage. Autrement dit l'urne V conserve sa composition initiale et on veut vider l'urne en n tirages (compte-tenu qu'un tirage est déjà effectué). La réalisation de cet évènement est assimilable à la réalisation de l'événement $(Y=n)$.

(d) Etant donné que $P(X=n) = (1-a)^{n-2}\,a$, on a

$$P(Y=2)=0, \quad \forall n\geqslant 2, \quad P(Y=n+1) = ab\,(1-a)^{n-2} + (1-b)\,P(Y=n)\,,$$

en choisissant $\lambda = ab$, $r=1-a$ et $s=1-b$, la question 3 montre que

$$\begin{aligned}
P(Y=n) &= \frac{ab}{(1-a)-(1-b)}\left((1-a)^{n-2}-(1-b)^{n-2}\right) \\
&= \frac{ab}{b-a}\left((1-a)^{n-2}-(1-b)^{n-2}\right).
\end{aligned}$$

(e) Etant donné que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ converge pour $|q|<1$, que sa somme vaut $\dfrac{1}{1-q}$ et que $0 < 1-a < 1$, $\quad 0<1-b<1$, on peut affirmer que les séries

$$\sum_{n\geqslant 2}(1-a)^{n-2} \underset{k=n-2}{=} \sum_{k\geqslant 0}(1-a)^k \text{ et } \sum_{n\geqslant 2}(1-b)^{n-2} \underset{k=n-2}{=} \sum_{k\geqslant 0}(1-b)^k$$

convergent donc la série

$$\sum_{n\geqslant 2} P(Y=n) = \frac{ab}{b-a}\sum_{n\geqslant 2}\left((1-a)^{n-2}-(1-b)^{n-2}\right)$$

aussi et sa somme vaut (à l'aide du changement de variable $k=n-2$) :

$$\frac{ab}{b-a}\sum_{k=0}^{+\infty}\left((1-a)^k-(1-b)^k\right) = \frac{ab}{b-a}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(1-a)^k - \sum_{k=0}^{+\infty}(1-b)^k\right)$$
$$= \frac{ab}{b-a}\left(\frac{1}{1-(1-a)} - \frac{1}{1-(1-b)}\right) = \frac{ab}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1$$

(f) Etant donné que la série $\sum_{n\geqslant 0} nq^{n-1}$ converge pour $|q|<1$, que sa somme vaut $\frac{1}{(1-q)^2}$ et que $0<1-a<1,\quad 0<1-b<1$, on peut affirmer que les séries

$$\sum_{n\geqslant 2} n\,(1-a)^{n-2} = \frac{1}{1-a}\sum_{n\geqslant 2} n\,(1-a)^{n-1} \text{ et } \sum_{n\geqslant 2} n\,(1-b)^{n-2} = \frac{1}{1-b}\sum_{n\geqslant 2} n\,(1-b)^{n-1}$$

convergent donc la série

$$\sum_{n\geqslant 2} nP\,(Y=n) = \frac{ab}{b-a}\sum_{n\geqslant 2}\left(n\,(1-a)^{n-2} - n\,(1-b)^{n-2}\right)$$

aussi. Ainsi Y admet une espérance et on a

$$\begin{aligned}
E\,(Y) &= \frac{ab}{b-a}\sum_{n=2}^{+\infty} n\,(1-a)^{n-2} - \frac{ab}{b-a}\sum_{n=2}^{+\infty} n\,(1-b)^{n-2}\\
&= \frac{ab}{b-a}.\frac{1}{1-a}\sum_{n=2}^{+\infty} n\,(1-a)^{n-1} - \frac{ab}{b-a}.\frac{1}{1-b}\sum_{n=2}^{+\infty} n\,(1-b)^{n-1}\\
&= \frac{ab}{b-a}.\frac{1}{1-a}.\left(\frac{1}{(1-(1-a)^2} - 1\,(1-a)^{1-1}\right)\\
&\quad -\frac{ab}{b-a}.\frac{1}{1-b}.\left(\frac{1}{(1-(1-b)^2} - 1\,(1-b)^{1-1}\right)\\
&= \frac{ab}{b-a}.\frac{1}{1-a}.\left(\frac{1}{a^2}-1\right) - \frac{ab}{b-a}.\frac{1}{1-b}.\left(\frac{1}{b^2}-1\right)\\
&= \frac{ab}{b-a}.\frac{1}{1-a}.\left(\frac{1-a^2}{a^2}\right) - \frac{ab}{b-a}.\frac{1}{1-b}.\left(\frac{1-b^2}{b^2}\right)\\
&= \frac{ab}{b-a}.\frac{1}{1-a}.\frac{(1-a)(1+a)}{a^2} - \frac{ab}{b-a}.\frac{1}{1-b}.\frac{(1-b)(1+b)}{b^2}\\
&= \frac{b}{b-a}.\frac{1+a}{a} - \frac{a}{b-a}.\frac{1+b}{b} = \frac{b^2(1+a)-a^2(1+b)}{ab\,(b-a)}\\
&= \frac{b^2-a^2+b^2a-a^2b}{ab(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)+ab\,(b-a)}{ab(b-a)}\\
&= \frac{(b-a)}{ab(b-a)}\,(b+a+ab) = \frac{a+b+ab}{ab}
\end{aligned}$$