CORRIGÉ

EXERCICE 1 :

1) Limites

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$$

$$\forall x\in\,]0,+\infty[\; g(x)=x\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\times\frac{\ln x}{x}-1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{\ln x}{2x}-1\right)=-1\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$$

2) Dérivée

La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$

$\forall x\in\,]0,+\infty[\; g'(x)=-\dfrac{1}{2x}-1<0$, comme somme de termes strictement négatifs

3)

$$\left.\begin{array}{l}g \text{ continue puisque dérivable sur }]0,+\infty[\\ g \text{ strictement décroissante sur }]0,+\infty[\\ g(]0,+\infty[)=]-\infty,+\infty[\text{ qui contient } 0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{l'équation } g(x)=0 \text{ a une seule solution dans }]0,+\infty[$$

Cette solution est notée α

4)

$$\left.\begin{array}{l}g(1)=1>0\\ g(e)=\dfrac{3}{2}-e<0\end{array}\right\}\Rightarrow 1<\alpha<e$$

De plus $f(\alpha)=g(\alpha)+\alpha=\alpha$

5)

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ (somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$)

$\forall x\in\,]0,+\infty[\,,f'(x)=\dfrac{-1}{2x}<0$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

6) $P(n):"1\leq u_n\leq e"$

Initialisation : $u_0=1\in[1,2]$ donc $P(0)$ vraie

Hérédité : pour un $n\geq 0$, $P(n)$ vraie

On a alors $1\leq u_n\leq e\Rightarrow f(e)=\frac{3}{2}\leq f(u_n)\leq f(1)=2$ car f est décroissante sur $]0,+\infty[$

On obtient $1\leq u_{n+1}\leq e$ donc $P(n+1)$ vraie

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N},1\leq u_n\leq e$

7)

$\forall x\in]0,+\infty[,f'(x)=\frac{-1}{2x}<0$

Alors $\forall x\in]0,+\infty[,|f'(x)|=\frac{1}{2x}$

Si $1\leq x\leq e$ alors $\frac{1}{e}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{1}$ (puisque la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$)

On a donc $\forall x\in]0,+\infty[,|f'(x)|=\frac{1}{2x}\leq\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } [1,e]\\ \forall x\in[1,e],|f'(x)|\leq\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{pour tous réels } a \text{ et } b \text{ de } [1,e],|f(b)-f(a)|\leq\frac{1}{2}|b-a|$$

Prenons $a=\alpha\in[1,e]$ et $b=u_n\in[1,e]$ pour tout entier naturel n

Il vient que $\forall n\in\mathbb{N},|f(u_n)-f(\alpha)|=|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

8) $Q(n):"|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}(e-1)"$

Initialisation : $|u_0-\alpha|=|1-\alpha|=\alpha-1$ et $\frac{1}{2^0}(e-1)=e-1$

Comme $\alpha\leq e$, on a $\alpha-1\leq e-1$ donc $Q(0)$ vraie

Hérédité : on suppose que pour un $n\geq 0$, $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}(e-1)$

Alors $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}(e-1)$ soit $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2^{n+1}}(e-1)$ donc $Q(n+1)$ vraie

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}(e-1)$

9) $\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\to}0$ puisque $-1<\frac{1}{2}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$; la suite (u_n) converge vers α

EXERCICE2 :

I. Calcul de u_n

1) $PQ=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$ est bien une matrice diagonale

La matrice $D=QAP=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&2\\\frac{2}{3}&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-3\\2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}6&0\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0\\0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ est une matrice diagonale

2) $PQ=I_2$ donc P est inversible et $P^{-1}=Q$

3) $\forall n\in\mathbb{N}^*, X_{n+1}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{9}u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\\frac{2}{9}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\end{pmatrix}=AX_n$

En multipliant à gauche chaque membre de l'égalité $Y_n=QX_n$ par la matrice P on tire l'égalité $PY_n=PQX_n$ soit $PY_n=X_n$

On a alors $\boxed{Y_{n+1}=QX_{n+1}=QAX_n=QAPY_n=DY_n}$

4) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*, Y_n=D^{n-1}Y_1$

Initialisation : $D^{1-1}Y_1=D^0Y_1=I_2Y_1=Y_1$ donc la proposition est vraie pour $n=1$

Hérédité : pour un $n\geq 1$, on suppose que $Y_n=D^{n-1}Y_1$

Alors $Y_{n+1}=DY_n=DD^{n-1}Y_1=D^nY_1$, la propriété est bien héréditaire

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, Y_n=D^{n-1}Y_1}$

5) $X_1=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$, $\boxed{Y_1=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&3\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\frac{4}{9}\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{27}\\\frac{4}{27}\end{pmatrix}}$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, Y_n=D^{n-1}Y_1=\begin{pmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}&0\\0&\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{4}{27}\\\frac{4}{27}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{27}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\\frac{4}{27}\times\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\end{pmatrix}}$$

6) On a vu que $X_n=PY_n$ donc $X_n=\begin{pmatrix}3&-3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{4}{27}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\\frac{4}{27}\times\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{4}{9}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\\\frac{8}{27}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{4}{27}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{On a donc } u_n=\frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{4}{9}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}=\frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right]}$$

II Probabilités

1)

a) On effectue n épreuves identiques et indépendantes.

A chaque épreuve deux issues : $\begin{cases} \text{succès: on obtient pile avec la probabilité } \dfrac{2}{3} \\ \text{échec} \end{cases}$

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } X \text{ compte les succès donc } X \to B\left(n, \frac{2}{3}\right)}$$

$$\forall k \in X(\Omega) = \ 0,n\ , P(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

b) $E(X) = n\dfrac{2}{3}; V(X) = n\dfrac{2}{9}$

2)

a) On effectue des épreuves identiques et indépendantes

A chaque épreuve deux issues : $\begin{cases} \text{succès: on obtient pile avec la probabilité } \dfrac{2}{3} \\ \text{échec} \end{cases}$

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } Y \text{ est le temps d'attente du premier succès donc } Y \to G\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$\forall k \in Y(\Omega) = \mathbb{N}^*, P(Y=k) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

b) $E(Y) = \dfrac{3}{2}; V(X) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{9}{4} = \dfrac{3}{4}$

3)

$v_2 = p(D_2) = p\left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}\right) = p\left(\overline{F_1}\right) p\left(\overline{F_2}\right)$ car les deux évènements sont indépendants

Donc $\boxed{v_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}}$

$v_3 = p\left(F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}\right) = p(F_1)\, p\left(\overline{F_2}\right) p\left(\overline{F_3}\right)$ car les trois évènements sont indépendants

Donc $\boxed{v_3 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}}$

Alors $\dfrac{1}{3}v_2 + \dfrac{2}{9}v_1 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4}{9} + 0 = \dfrac{4}{27} = v_3$

4) Si au premier lancer on obtient pile, pour que l'évènement D_{n+2} se réalise (c'est à dire pour obtenir un double pile pour la première fois au rang $n+2 \geq 3$) il faut obtenir face au deuxième lancer, il restera n lancers pour obtenir un double pile pour la première fois.

$\forall n \geq 2, p_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = p_{\overline{F_1}}(F_2 \cap D_{n+2}) = p_{\overline{F_1}}(F_2)\, p_{\overline{F_1} \cap F_2}(D_{n+2})$

$p_{\overline{F_1}}(F_2) = p(F_2) = \dfrac{1}{3}$ et $p_{\overline{F_1} \cap F_2}(D_{n+2}) = p(D_n) = v_n$ et $\boxed{\forall n \geq 2, p_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = \dfrac{1}{3} v_n}$

5) Si au premier lancer on obtient face, pour que l'évènement D_{n+2} se réalise (c'est à dire pour obtenir un double pile pour la première fois au rang $n+2 \geq 3$) il restera $(1+n)$ lancers pour obtenir un double pile pour la première fois

Donc $\boxed{\forall n \geq 2, p_{F_1}(D_{n+2}) = p(D_{n+1}) = v_{n+1}}$

6) F_1 et $\overline{F_1}$ forment un système complet d'événements, la formule des probabilités donne :

$\forall n \geq 2, v_{n+2} = p(D_{n+2}) = p(F_1 \cap D_{n+2}) + p(\overline{F_1} \cap D_{n+2}) = p(F_1)\, p_{F_1}(D_{n+2}) + p(\overline{F_1})\, p_{\overline{F_1}}(D_{n+2})$

Ce qui donne : $\boxed{\forall n \geq 2, v_{n+2} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} v_{n+1} + \dfrac{1}{3} v_n = \dfrac{2}{9} v_{n+1} + \dfrac{1}{3} v_n}$

7)

La suite v vérifie $v_1 = 0, v_2 = \dfrac{4}{9}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+2} = \dfrac{2}{9} v_{n+1} + \dfrac{1}{3} v_n$

La partie I permet d'écrire : $v_n = P(D_n) = \dfrac{4}{9}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^{n-1}\right]$.

8) pour $n \geq 2$, $\boxed{\overline{E_n} = D_2 \cup \ldots \cup D_n}$ union d'événements deux à deux incompatibles

On en déduit que pour $n \geq 2$, $p(\overline{E_n}) = \sum_{k=2}^{n} p(D_k)$ donc $\boxed{p(E_n) = 1 - p(\overline{E_n}) = 1 - \sum_{k=2}^{n} v_k}$

9) $p(E_n) = 1 - \sum_{k=2}^{n} \dfrac{4}{9}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^{k-1}\right] = 1 - \dfrac{4}{9}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^{k-1}\right]$.

En posant $i = k-1$, $p(E_n) = 1 - \dfrac{4}{9}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{i} - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^{i}\right] = 1 - \dfrac{4}{9}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{i} - \sum_{i=0}^{n-1}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^{i}\right)$

Finalement $p(E_n) = 1 - \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\dfrac{2}{3}} - \dfrac{1-\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n}{1-\left(\dfrac{-1}{3}\right)}\right)$

Comme $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ et $-1 < \dfrac{-1}{3} < 1$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n = 0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p(E_n) = 1 - \frac{4}{9}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)}\right) = 1 - \frac{4}{9}\left(3 - \frac{3}{4}\right) = 1 - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) = 1 - 1 = 0}$$

EXERCICE 3 :

1) $\forall x \in [0,+\infty[, 1+e^x > 0$ (somme de termes strictement positifs), donc la fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ (inverse d'une fonction dérivable ne s'annulant pas sur $[0,+\infty[$)

On a $\forall x \in [0,+\infty[, f'(x) = \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} = h(x) \Rightarrow \forall x \in [0,+\infty[, h(x) = -f'(x)$

$\forall x \in [0,+\infty[, 1+e^{-x} > 0$, donc la fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme composée légitime de fonctions dérivables

On a $\forall x \in [0,+\infty[, g'(x) = \dfrac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})} = \dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} = \dfrac{2}{1+e^x} \Rightarrow \forall x \in [0,+\infty[, g'(x) = f(x)$

2) $\forall A \in [0,+\infty[, \int_0^A h(x)dx = [-f(x)]_0^A = -f(A)+f(0) = 1-f(A)$

$\forall A \in [0,+\infty[, \int_0^A f(x)dx = [g(x)]_0^A = g(A)-g(0)$

3) $\forall A \in [0,+\infty[$, posons $u(x) = x$ et $v'(x) = h(x) = -f'(x)$

On a $u'(x) = 1$ et $v(x) = -f(x)$ avec les fonctions u et v de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ puisque u est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ (fonction affine) et v est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ (f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ comme inverse d'une fonction de classe C^1 ne s'annulant pas sur $[0,+\infty[$)

L'intégration par parties est possible et donne :

$\int_0^A h(x)dx = [-xf(x)]_0^A - \int_0^A -f(x)dx = -Af(A) + \int_0^A f(x)dx = -Af(A)+g(A)-g(0)$

4) $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = 0 \\ h(0) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow h$ non continue en 0

5)

a) La fonction h est continue sur $]-\infty,0[$ car nulle et la fonction h est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$: **la fonction h est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 (question 4)**

b) $\forall x \in]-\infty,0[, h(x) = 0 \geq 0$ et $\forall x \in [0,+\infty[, h(x) > 0$ donc **la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$**

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx = \int_0^{+\infty} h(x)\,dx$ sous réserve de convergence

$\forall x \in [0,+\infty[, f(x) = \dfrac{1}{1+e^x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Donc $\int_0^A h(x)\,dx = 1 - f(A) \underset{A\to+\infty}{\to} 1$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx$ converge et vaut 1

Conclusion : la fonction h est une densité de probabilité

$$\boxed{\text{6) } \forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \text{si } x \geq 0 & \int_0^x h(t)\,dt = 1 - f(x) = 1 - \dfrac{2}{1+e^x} = \dfrac{e^x-1}{e^x+1} \end{cases}}$$

7) $\boxed{P(Z \geq \ln 2) = 1 - P(Z < \ln 2) = 1 - H(\ln 2) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}}$

$$\boxed{P(\ln 2 \leq Z \leq \ln 8) = H(\ln 8) - H(\ln 2) = \frac{7}{9} - \frac{1}{3} = \frac{4}{9}}$$

$$\boxed{P_{(Z\geq \ln 2)}(Z \leq \ln 8) = \frac{P(\ln 2 \leq Z \leq \ln 8)}{P(Z \geq \ln 2)} = \frac{4}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{2}{3}}$$

8) $\forall x \in]-\infty, 0[, H(x) = 0 \neq \dfrac{1}{2}$

$\forall x \in [0,+\infty[, H(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^x - 2 = e^x + 1$, puisque $\forall x \in [0,+\infty[, 1+e^x > 0$

Nous avons donc $H(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$

$$\boxed{\text{La médiane de la variable aléatoire } Z \text{ est donc } \ln 3}$$

9) Sous réserve de convergence $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,h(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x\,h(x)\,dx$

Or $\forall A \in [0,+\infty[, \int_0^A xh(x)\,dx = -A\,f(A) + g(A) - g(0)$

$\forall A \in [0,+\infty[,\ A\,f(A) = \dfrac{2A}{1+e^A} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{A} + \dfrac{e^A}{A}} \underset{A\to+\infty}{\to} 0$

En effet $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (limite usuelle)

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, nous avons $\lim\limits_{A\to+\infty} g(A) = -2\ln 1 = 0$

Conclusion $\int_0^A xh(x)\,dx \underset{A\to+\infty}{\to} -g(0) = 2\ln 2$

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } Z \text{ admet donc une espérance } E(Z) \text{ et } E(Z) = 2\ln 2}$$