CONCOURS ECRICOME PREPA
APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

CORRIGÉ

Exercice 1

Partie I

1. On remarque que $Q \times Q = I_3$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Ainsi la matrice Q est inversible et son inverse est : $Q^{-1} = Q$.
2. On calcule le produit de matrices :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

La matrice D est donc bien diagonale.
On a alors :
$$D = QMQ \iff Q^{-1}DQ^{-1} = M \iff QDQ = M \iff M = QDQ$$

3. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$: « $M^n = QD^nQ$ »
   - Pour $n = 0$, on a $M^0 = I_3$ et $QD^0Q = Q^2 = I_3$. Ainsi, $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\mathcal{H}(n)$ soit vérifiée. On a alors :
   $$M^{n+1} = M^nM \overset{(\mathcal{H}(n))}{=} (QD^nQ)(QDQ) = QD^nDQ = QD^{n+1}Q$$
   donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, la propriété $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.
4. On a alors :

$$M^n = QD^nQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(\frac{1}{2})^n & -2(\frac{1}{2})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1-(\frac{1}{2})^n & 1-2(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{4})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 2(\frac{1}{2})^n - 2(\frac{1}{4})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}$$

Partie II

1. On lance une fois les deux pièces. Notons P_1 (reps. P_2) l'événement « On fait Pile avec la pièce numéro 1 (resp. numéro 2) ». On a alors :
$$a_1 = P(A_1) = P(F_1 \cap F_2) = P(F_1)P(F_2) = \frac{1}{4}$$

CONCOURS ECRICOME PREPA
APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

$$b_1 = P(B_1) = P(P_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap P_2) = P(P_1)P(F_2) + P(F_1)P(P_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$c_1 = P(C_1) = P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)P(P_2) = \frac{1}{4}$$

2. Si A_n est réalisé, on a obtenu 0 Pile à l'étape n, donc on ne va lancer aucune pièce à l'étape $n+1$. Ainsi, on est certain que A_{n+1} sera réalisé.
$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$$
Si B_n est réalisé, on a obtenu 1 Pile à l'étape n, donc on va lancer une pièce à l'étape $n+1$. On obtient A_{n+1} si et seulement si cette pièce donne Pile, on a donc :
$$P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$$
Si C_n est réalisé, on a obtenu 2 Pile à l'étape n, donc on va lancer deux pièces à l'étape $n+1$. On est dans la même configuration que l'étape 1, donc :
$$P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$$
Soit $n \geqslant 1$. On sait que (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'événements, donc d'après la formules des probabilités totales, on a :
$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times 1 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$
De même, on obtient :
$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} c_{n+1} = P(C_{n+1}) &= P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times 0 + c_n \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3. On a donc bien pour tout $n \geqslant 1$,
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{4}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$
Pour $n = 1$, on a bien $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^{1-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

Soit $n \geqslant 1$. Supposons qu'on ait $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$. Alors :
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \times M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$
Donc par récurrence, la formule est bien vérifiée pour tout $n \geqslant 1$.

4. (a) En utilisant le résultat de la question I.4, on obtient :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-\dfrac{1}{2^{n-1}} & 1-\dfrac{2}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{4^{n-1}} \\ 0 & \dfrac{1}{2^{n-1}} & \dfrac{2}{2^{n-1}}-\dfrac{2}{4^{n-1}} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{4^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{2}{2^n}+\frac{1}{4^n} \\ \frac{2}{2^n}-\frac{2}{4^n} \\ \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$$

(b) On a bien :

$$\left(1-\frac{2}{2^n}+\frac{1}{4^n}\right)+\left(\frac{2}{2^n}-\frac{2}{4^n}\right)+\frac{1}{4^n}=1$$

et on obtient directement que :

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n)=1, \qquad \lim_{n\to+\infty} P(B_n)=\lim_{n\to+\infty} P(C_n)=0$$

Exercice 2

1. Par quotient, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$.
Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Par quotient, on a $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ (car $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x)=0^-$) Par quotient, on a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ (car $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x)=0^+$)

2. Pour $x\in D$, on a $f'(x)=\dfrac{1\ln(x)-x\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{\ln(x)-1}{(\ln x)^2}$.
De plus, on sait que $(\ln x)^2$ est toujours positif (c'est un carré), donc $f'(x)\geqslant 0 \iff \ln(x)-1\geqslant 0$.

3. (a)

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

(b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[e,+\infty[$, donc f réalise une bijection de $[e,+\infty[$ sur $f([e,+\infty[)=[f(e),\lim\limits_{+\infty} f(x)[=[e,+\infty[$.

4. (a) Pour $x\in D$, on a :

$$f(x)=x \iff \frac{x}{\ln(x)}=x \iff x=x\ln(x) \iff x(1-\ln(x))=0 \overset{(x\neq 0)}{\iff} \ln(x)=1 \iff x=e$$

Ainsi : $\mathcal{S}=\{e\}$.

(b) Pour $x\in D$, on a :

$$f(x)-x=\frac{x}{\ln(x)}-x=\frac{x(1-\ln(x))}{\ln(x)}$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$1-\ln(x)$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-x$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Ainsi, $f(x)-x \leqslant 0$ pour $x \in]1,e]$ et $f(x)-x \geqslant 0$ pour $x \in]0,1[\cup[e,+\infty[$.

5. (a)
   - $u_0 = 3$, donc on a bien $u_0 \geqslant e$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \geqslant e$, alors, d'après la question précédente, $f(u_n) - u_n \geqslant 0$, donc $f(u_n) \geqslant u_n \geqslant e$, i.e. $u_{n+1} \geqslant e$.
   - Par récurrence, on a donc bien que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant e$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant e$, donc toujours d'après la question (b), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) - u_n \geqslant 0, \text{ i.e. } u_{n+1} \geqslant u_n$$

   La suite (u_n) est donc décroissante.

   (c) La suite (u_n) est décroissante, et minorée (par e), donc converge vers un réel ℓ qui vérifie $\ell \geqslant e$. De plus, puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue en ℓ, par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient que $\ell = f(\ell)$, donc d'après la question 4(a), on a nécessairement $\ell = e$.

6. (a) On a pour tout $x \geqslant e$,

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{4}{\ln(x)} + \frac{4}{(\ln x)^2}\right) = \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{(\ln x)^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln x)^2} = f'(x)$$

   (b) Pour tout $x \geqslant e$, puisque $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 \geqslant 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$$

   De plus, f est croissante sur $[e,+\infty[$, donc on a $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant e$, donc :

$$\forall x \geqslant e,\ 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4}, \qquad \text{donc } |f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$$

7. (a) La fonction f est continue et dérivable sur $[e,+\infty[$, et $\forall x \in [e,+\infty[$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall a, b \in [e,+\infty[,\ |f(a) - f(b)| \leqslant \frac{1}{4}|a-b|$$

   En particulier pour $a = u_n$ (pour $n \in \mathbb{N}$) et $b = e$ (qui vérifie $f(e) = e$), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - e| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - e|$$

   (b)
   - $u_0 = 3$, donc on a bien $|u_0 - e| \leqslant 1 = \frac{1}{4^0}$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|u_n - e| \leqslant \frac{1}{4^n}$, alors, d'après la question précédente, $|u_{n+1} - e| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - e| \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}$.
   - Par récurrence, on a donc bien que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - e| \leqslant \frac{1}{4^n}$.

   (c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$, on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - e) = 0$, i.e. (u_n) converge vers e.

CONCOURS ECRICOME PREPA
APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

Exercice 3

Partie I

1. (a) On répète ici 100 fois une même épreuve succès/échec (un succès = recevoir un appel concernant le produit A, de probabilité 0.05, et un échec = recevoir un appel concernant le produit B, de probabilité 0.95) de manière identique et indépendante, et X compte le nombre de succès lors de ces 100 appels. X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0.05)$. On a donc :

$$X(\Omega) = [\![0, 100]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in X(\Omega),\ P(X = k) = \binom{100}{k}(0.05)^k(0.95)^{100-k}$$

(b) On a $E(X) = 100 \times 0.05 = 5$ et $V(X) = 100 \times 0.05 \times 0.95 = 4.75$

Il y a un nombre X d'appels pour le produit A, ce qui génère donc $95X$ euros.
Il y a également un nombre $100 - X$ d'appels pour le produit B, ce qui génère alors $5(100 - X)$ euros.
On a donc :

$$Y = 95X + 5(100 - X) = 90X + 500$$

On a alors $E(Y) = 90E(X) + 500 = 950$ et $V(Y) = 90^2V(X) = 38475$.
Si on approche la loi de X par Z qui suit une loi de Poisson de paramètre λ, telle que $E(Z) = E(X)$, on a alors nécessairement $\lambda = 5$. On en déduit que :

$$P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9) = 1 - 0,968 = 0,032$$

Partie II

1. (a) On a ici une répétition (infinie) d'épreuves succès/échec (un succès = recevoir un appel concernant le produit A, de probabilité 0.2, et un échec = recevoir un appel concernant le produit B, de probabilité 0.8) de manière identique et indépendante, et X_A désigne le rang d'apparition du premier succès. Ainsi, X_A suit une loi géométrique de paramètre 0.2. On a donc :

$$X_A(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall k \in X(\Omega),\ P(X_A = k) = (0.8)^{k-1} \times 0.2$$

On a alors $E(X_A) = \dfrac{1}{0.2} = 5$ et $V(X_A) = \dfrac{0.8}{0.2^2} = 20$.
On a enfin $E(X_A^2) = V(X_A) + (E(X_A))^2 = 20 + 5^2 = 45$.

(b) De même, X_B suit une loi géométrique de paramètre 0.8 :

$$X_B(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall k \in X(\Omega),\ P(X_B = k) = (0.2)^{k-1} \times 0.8$$

on a $E(X_B) = \dfrac{1}{0.8} = 1.25$ et $V(X_B) = \dfrac{0.2}{0.8^2} = 0,3125$.
On a enfin $E(X_B^2) = V(X_B) + (E(X_B))^2 = 0,3125 + 1.25^2 = 1.875$.

2. (a) $(L = n) \cap (X_B = n + 1)$ correspond à l'événement $AA \ldots AAB$ où il y a eu n « A » puis 1 « B ».
De même, $(L = n) \cap (X_A = n + 1)$ correspond à l'événement $BB \ldots BBA$ où il y a eu n « B » puis 1 « A ».

(b) On a donc :

$$\begin{aligned}
P(L = n) &= P([L = n] \cap [X_A = n + 1]) + P([L = n] \cap [X_B = n + 1]) \quad \text{(événements incompatibles)}\\
&= P(X_A = n + 1) \times P_{[X_A=n+1]}(L = n) + P(X_B = n + 1) \times P_{[X_B=n+1]}(L = n)\\
&= P(X_A = n + 1) \times 1 + P(X_B = n + 1) \times 1\\
&= 0.8^n \times 0.2 + 0.2^n \times 0.8\\
&= 0.8 \times (0.8^{n-1} \times 0.2) + 0.2 \times (0.2^{n-1} \times 0.8)\\
&= 0.8 \times P(X_A = n) + 0.2 \times P(X_B = n)
\end{aligned}$$

CONCOURS ECRICOME PREPA
APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

3. On a donc pour $N \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} nP(L=n) &= 0.8\sum_{n=1}^{N} nP(X_A=n) + 0.2\sum_{n=1}^{N} nP(X_B=n)\\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.8E(X_A)+0.2E(X_B)\end{aligned}$$

donc L admet une espérance qui vérifie

$$E(L) = 0.8\times E(X_A) + 0.2\times E(X_B) = 4.25$$

De même, pour $N \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n^2P(L=n) &= 0.8\sum_{n=1}^{N} n^2P(X_A=n) + 0.2\sum_{n=1}^{N} n^2P(X_B=n)\\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.8E(X_A^2)+0.2E(X_B^2)\end{aligned}$$

donc L^2 admet une espérance qui vérifie

$$E(L^2) = 0.8\times E(X_A^2) + 0.2\times E(X_B^2) = 36,375$$

On a donc finalement $V(L) = 36.375 - 4.25^2 = 18.3125$.

Partie III

1. On sait que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0\\ e^{-x} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases} \quad \text{et} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-x} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$$

2. Soit $b \geqslant 0$. On note pour tout $t\in[0,b]$:

$$\left|\begin{array}{l} u(t)=t\\ v'(t)=e^{-t}-e^{-2t}\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} u'(t)=1\\ v(t)=-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\end{array}\right.$$

Les fonctions u et v étant dérivables sur $[0,b]$ de dérivée continue, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^b t(e^{-t}-e^{-2t})dt &= \Big[-te^{-t}+\frac{1}{2}te^{-2t}\Big]_0^b + \int_0^b \Big(e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\Big)\\ &= -be^{-b}+\frac{1}{2}be^{-2b}+\Big[-e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-2t}\Big]_0^b\\ &= -be^{-b}+\frac{1}{2}be^{-2b}-e^{-b}+\frac{1}{4}e^{-2b}+1-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

3. Par croissances comparées, on en déduit que :

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b t(e^{-t}-e^{-2t})dt = 0+0-0+0+1-\frac{1}{4}$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)dt$ converge et vaut $\frac{3}{4}$.

4. Pour $x \geqslant 0$, on a $(M \leqslant x) = (D_1 \leqslant x) \cap (D_2 \leqslant x)$.
5. Par indépendance de D_1 et D_2, on a donc pour $x \geqslant 0$,

$$P(M \leqslant x) = P((D_1 \leqslant x) \cap (D_2 \leqslant x)) = P(D_1 \leqslant x)P(D_2 \leqslant x) = F(x)^2$$

   De plus, puisque $P(M \leqslant x) = 0$ pour $x < 0$, on a bien $P(M \leqslant x) = F(x)^2$ également pour $x < 0$.
6. Pour obtenir une densité de M, il suffit de dériver $P(M \leqslant x)$ (là où cela est possible). Or, on a ici :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(M \leqslant x) = \begin{cases} (1-e^{-x})^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   donc une densité g de M est :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 2e^{-x}(1-e^{-x}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

7. On regarde si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt$ converge absolument, i.e. si $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2t(e^{-t} - e^{-2t})$ converge. D'après la question 3, c'est bien le cas, et on a donc :

$$E(M) = 2\int_0^{+\infty} t(e^{-t} - e^{-2t})dt = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$