

2017

**CORRIGÉ**

MATHEMATIQUES

CONCOURS  
ECRICOME  
**PREPA**

VOIE ECONOMIQUE ET  
COMMERCIALE

OPTION TECHNOLOGIQUE

## ■ ESPRIT GÉNÉRAL

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

## ■ SUJET

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

## ■ ÉVALUATION

Exercices de valeur sensiblement égale.

## ■ ÉPREUVE

*Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,*

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

## CORRIGÉ

### EXERCICE 1

#### Partie I : calcul matriciel

1.

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_3 \implies P \times \left(\frac{1}{6}Q\right) = I_3$$

Ainsi,  $P$  est inversible et  $P^{-1} = \frac{1}{6}Q$ .

2. • En notant  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , on a :  $X_1 \neq 0$  et  $MX_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = 5X_1$ .

Ainsi,  $X_1$  est un vecteur propre de  $M$  pour la valeur propre 5.

• En notant  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , on a :  $X_2 \neq 0$  et  $MX_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = X_2$ .

Ainsi,  $X_2$  est un vecteur propre de  $M$  pour la valeur propre 1.

• En notant  $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ , on a :  $X_3 \neq 0$  et  $MX_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 2X_3$ .

Ainsi,  $X_3$  est un vecteur propre de  $M$  pour la valeur propre 2.

3. La matrice  $M$  étant de taille 3 avec 3 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. La matrice  $P$  comportant dans ses trois colonnes trois vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, en notant  $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  la matrice diagonale comportant les valeurs propres correspondantes dans le même ordre, on a donc :

$$M = PDP^{-1} = PD \left(\frac{1}{6}Q\right) = \frac{1}{6}PDQ$$

4. Notons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : «  $M^n = \frac{1}{6}PD^nQ$  ».

- Pour  $n = 0$ , on a  $M^0 = I_3$  et également  $\frac{1}{6}PD^0Q = PI_3P^{-1} = I_3$ , ainsi,  $\mathcal{P}(0)$  est bien vraie.
- Soit  $n \geq 0$  fixé. Supposons que pour cet entier  $n$ , on ait  $\mathcal{P}(n)$  vraie. Alors :

$$M^{n+1} = M^n \times M = \left(\frac{1}{6}PD^nQ\right) \left(\frac{1}{6}PDQ\right) = \frac{1}{6}PD^n \left(\frac{1}{6}QP\right) DQ = \frac{1}{6}PD^{n+1}Q$$

et ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- Par récurrence, pour tout entier  $n \geq 0$  la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

5. La matrice  $D$  étant diagonale, on sait que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $D^n = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ .

Calculer la première colonne de  $M^n$  revient à multiplier à droite par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . En écrivant donc le produit,

et en calculant successivement de droite à gauche les produits de matrices :

$$\begin{aligned} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n \\ 9 \\ -2^{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Partie II : étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon**

1. L'athlète démarrant son entraînement par la natation au jour 0, on a donc  $a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0$ .  
 Suivant les règles de l'entraînement, au jour 1, on a alors  $a_1 = 1/5, b_1 = 1/5, c_1 = 3/5$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé. La famille  $(A_n, B_n, C_n)$  forme un système complet d'événements, et avec la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n + 0 \times c_n \end{aligned}$$

De même, on calcule  $P(B_{n+1})$  et  $P(C_{n+1})$  :

$$b_{n+1} = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n$$

et

$$c_{n+1} = P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{3}{5}a_n + 0 \times b_n + \frac{4}{5}c_n$$

3. On a donc :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n + 0 \times c_n \\ \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n \\ \frac{3}{5}a_n + 0 \times b_n + \frac{4}{5}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

En notant  $A = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}M$ , on a donc bien :  $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ .

4. Notons pour tout  $n \in \mathbb{N}, Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

- Pour  $n = 0$ , on a bien  $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5^0}M^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- Soit  $n \geq 0$  fixé. Supposons que pour cet entier  $n$ , on ait montré que :  $Y_n = \frac{1}{5^n}M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  Alors :

$$Y_{n+1} = AY_n = \left(\frac{1}{5}M\right) \frac{1}{5^n}M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5^{n+1}}M^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Par récurrence, on a donc bien que :  $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

5. Comme  $M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  correspond à la première colonne de  $M^n$ , on a d'après I.5 :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{6 \cdot 5^n} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc que :

$$a_n = \frac{5^n - 2^{n+2} + 9}{6 \times 5^n} = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n + 9 \left(\frac{1}{5}\right)^n,$$

$$b_n = \frac{2(5^n - 2^n)}{6 \times 5^n} = \frac{1}{3} - 2 \left(\frac{2}{5}\right)^n,$$

$$c_n = \frac{3(5^n + 2^{n+1}) - 9}{6 \times 5^n} = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

6. Comme  $-1 < 1/5 < 1$  et  $-1 < 2/5 < 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ . On en déduit finalement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{6}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{1}{2}.$$

## EXERCICE 2

### Partie I : tirages dans une urne

1. (a) On reconnaît ici une épreuve succès/échec qui se répète dans des conditions identiques et indépendantes, la probabilité du succès étant à chaque épreuve de  $1/4$  (un succès étant de tirer la boule noire). La variable  $X$  comptant le nombre de succès sur les 400 épreuves suit donc une loi binomiale  $\mathcal{B}\left(400, \frac{1}{4}\right)$ .

On a donc  $X(\Omega) = [0, 400]$  et :  $\forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \binom{400}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{400-k}$ .

(b) L'espérance de  $X$  est alors  $400 \times \frac{1}{4} = 100$  et la variance est  $400 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 75$ .

2. (a) On est toujours dans le cadre d'une répétition d'épreuves succès/échec identiques et indépendantes, la probabilité du succès étant à chaque épreuve de  $1/4$  (un succès étant de tirer la boule noire). La variable  $Y$  déterminant le rang d'apparition du premier succès suit donc une loi géométrique  $\mathcal{G}\left(\frac{1}{4}\right)$ .

On a donc  $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y = k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)$ .

(b) L'espérance de  $Y$  est alors  $\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$  et la variance est  $\frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 12$ .

3. (a) Si on tire les boules sans remise,  $Z$  ne peut prendre que les valeurs 1, 2, 3, 4 :

$$Z(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

Notons  $B_k$  (respectivement  $N_k$ ) « le  $k$ -ième tirage donne une boule blanche (resp. noire) ».

- $P(Z = 1) = P(N_1) = \frac{1}{4}$ .
- $P(Z = 2) = P(B_1 \cap N_2) = P(B_1)P_{B_1}(N_2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$
- $P(Z = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- et nécessairement  $P(Z = 4) = 1 - P(Z = 1) - P(Z = 2) - P(Z = 3) = \frac{1}{4}$ .

Ainsi  $Z$  suit une loi uniforme sur l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

- (b) L'espérance de  $Z$  est donc  $\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$  et la variance est  $\frac{4^2-1}{12} = \frac{5}{4}$ .

### Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

1. Sur les deux tirages effectués on peut avoir tiré 0, 1 ou 2 fois la boule noire. Ainsi  $T(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ .
2. Notons  $F$  l'événement « la pièce donne Face » et  $\bar{F}$  l'événement « la pièce donne Pile ». Alors :

$$P(T = 0) = P(F)P_F(B_1 \cap B_2) + P(\bar{F})P_{\bar{F}}(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{13}{32}$$

$$P(T = 2) = P(F)P_F(N_1 \cap N_2) + P(\bar{F})P_{\bar{F}}(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{32}$$

On en déduit que :

$$P(T = 1) = 1 - P(T = 0) - P(T = 2) = 1 - \frac{13}{32} - \frac{5}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$$

$$3. E(T) = \sum_{k=0}^2 kP(T = k) = P(T = 1) + 2P(T = 2) = \frac{7}{16} + 2 \frac{5}{32} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Si  $T$  suivait une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ , on aurait alors nécessairement  $n = 2$  (vu  $T(\Omega)$ ),  $E(T) = 2p$ , donc  $p = \frac{3}{8}$ . Mais alors on devrait avoir  $P(T = 2) = p^2$ , ce qui n'est pas le cas ici. Donc  $T$  ne suit pas une loi binomiale.

4. Remarquons que si  $F$  se réalise, alors la loi de  $T$  est binomiale de paramètres  $(2, 1/2)$ . On a donc par exemple :

$$P_F(T = 1) = \binom{2}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

Donc :

$$P_{[T=1]}(F) = \frac{P(F)P_F(T = 1)}{P(T = 1)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{4}{7}$$

et donc on en déduit que  $P_{[T=1]}(\bar{F}) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$ .

Finalement, si  $[T = 1]$  est réalisé, il est plus probable d'avoir obtenu Face avec la pièce.

5.

```

T = 0
if grand(1,1,"uin",1,2) == 1 then
    for k = 1 : 2
        if grand(1,1,"uin",1,4) < 2 then
            T = T+1
        end
    end
else
    for k = 1 : 2
        if grand(1,1,"uin",1,4) < 3 then
            T = T+1
        end
    end
end
disp(T,"Une simulation de T donne :")
    
```

### EXERCICE 3

#### Partie I : étude d'une fonction

1. Pour tout réel  $x$ ,  $\ln(x)$  existe si et seulement si  $x > 0$ . De plus, sur  $]0, +\infty[$  le dénominateur ne s'annulant pas,  $f(x)$  a bien un sens pour tout  $x > 0$ .

$$D_f = ]0, +\infty[$$

2. Pour tout réel  $x > 0$ , on a  $x^3 \geq 0$  donc :

$$f(x) \geq 0 \iff \frac{4\ln(x)}{x^3} \geq 0 \iff \ln(x) \geq 0 \iff x \geq 1$$

3. On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0^+$ , donc par quotient  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ .

La courbe représentative de  $f$  admet donc une asymptote verticale d'équation  $x = 0$ .

Par ailleurs, par croissances comparées, on sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\ln(x)}{x^3} = 0$ .

La courbe représentative de  $f$  admet donc une asymptote horizontale en  $+\infty$  d'équation  $y = 0$ .

4. La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et on a :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, f'(x) = \frac{4\frac{1}{x}x^3 - 4\ln(x)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{4x^2(1 - 3\ln(x))}{x^6}$$

Le signe de  $f'$  dépend donc du signe de  $1 - 3\ln(x)$  :

$$1 - 3\ln(x) \geq 0 \iff 3\ln(x) \leq 1 \iff \ln(x) \leq \frac{1}{3} \iff x \leq e^{1/3}$$

La fonction  $f$  est donc croissante sur  $]0, e^{1/3}[$  puis décroissante sur  $]e^{1/3}, +\infty[$ .

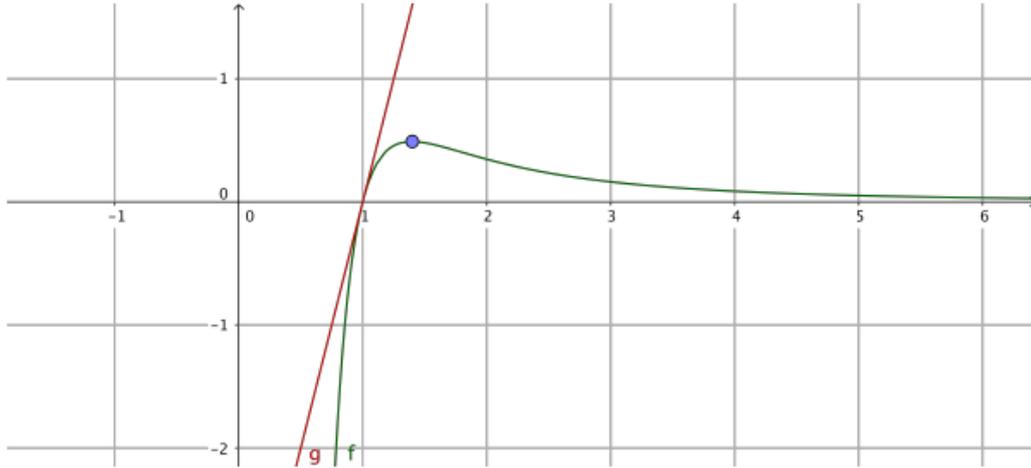
La fonction  $f$  admet donc un maximum (global) en  $e^{1/3}$ , qui vaut :  $f(e^{1/3}) = \frac{4}{3e}$ .

La fonction  $f$  admettant  $-\infty$  comme limite en  $0^+$ , elle n'est pas minorée et n'admet donc pas de minimum.

5. La tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1 admet comme équation :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1), \quad \text{i.e. } \boxed{y = 4x - 4}$$

6.



## Partie II : étude d'une variable aléatoire à densité

1. Soit  $A \geq 1$ . On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \frac{4}{x^3} \end{cases}, \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{-x^2}{2} \end{cases}$$

On a alors en utilisant l'intégration par parties :

$$\int_1^A \frac{4 \ln(x)}{x^3} dx = \left[ -\frac{2 \ln(x)}{x^2} \right]_1^A + \int_1^A \left( \frac{2}{x^3} \right) dx = \frac{-2 \ln(A)}{A^2} + \left[ \frac{-1}{x^2} \right]_{1^A} = 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2 \ln(A)}{A^2}$$

2. La fonction  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car  $f$  est continue sur  $[1, +\infty[$  et on a bien  $f(1) = 0$ .

La fonction  $h$  est positive sur  $\mathbb{R}$  puisque, pour  $x \geq 1$ ,  $f(x) \geq 0$ .

De plus, en utilisant les croissances comparées :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2 \ln(A)}{A^2} \right) = 1$$

Ainsi,  $h$  est bien une densité de probabilité.

3. (a) Pour  $x < 1$ ,  $F(x) = 0$ .

Pour  $x \geq 1$ , en reprenant le calcul de la question 1,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x h(t) dt = \int_1^x f(t) dt = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln(x)}{x^2}$$

```
(b)
1 function calcul=F(x)
2     if x < 1 then
3         calcul = 0
4     else
5         calcul = 1 - 1/(x^2) - 2*log(x)/(x^2)
6     end
7 endfunction
8
9 for i=1:300, a(i)=-2+7*i/300; b(i)=F(a(i));
10 end
11 plot(a,b)
```

(c) L'exécution des lignes 9 à 11 permet de tracer la fonction  $F$  sur l'intervalle  $[-2; 5]$ .

4. Soit  $A \geq 1$ . On a :

$$\int_1^A xh(x)dx = \int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^2} dx$$

En faisant une intégration par parties, comme dans la question 1, en posant :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \frac{4}{x^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{-4}{x} \end{cases}$$

on obtient :

$$\int_1^A xh(x)dx = \left[ \frac{-4\ln(x)}{x} \right]_1^A + \int_1^A \frac{4}{x^2} dx = \frac{-4\ln(A)}{A} + \left[ -\frac{4}{x} \right]_1^A = 4 - \frac{4}{A} - \frac{4\ln(A)}{A}$$

Par croissances comparées, on en déduit donc que :  $\int_1^A xh(x)dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 4$ .

Ainsi, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)dx = \int_1^{+\infty} xh(x)dx$  converge.

La variable  $X$  admet donc bien une espérance et on a :  $E(X) = 4$ .

5. La variable  $X$  admet une variance si et seulement si  $E(X^2)$  existe, c'est-à-dire si  $\int_1^{+\infty} x^2h(x)dx$  converge.

Or,

$$\int_1^A x^2h(x)dx = \int_1^A \frac{4\ln(x)}{x} dx = \left[ 2(\ln x)^2 \right]_1^A = 2(\ln(A))^2 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty$$

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} x^2h(x)dx$  est donc divergente,  $X^2$  n'admet pas d'espérance, et donc  $X$  n'a pas de variance.

6. Pour  $A > 1$ , on a :

$$P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{P([X > A] \cap [X > 2A])}{P(X > A)} = \frac{P(X > 2A)}{P(X > A)} = \frac{1 - F(2A)}{1 - F(A)} = \frac{\frac{1}{(2A)^2} + \frac{2\ln(2A)}{(2A)^2}}{\frac{1}{A^2} + \frac{2\ln(A)}{A^2}} = \frac{1 + 2\ln(2A)}{4 + 8\ln(A)}$$

Enfin, on a :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} P_{[X>A]}(X > 2A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2\ln(2) + 2\ln(A)}{4 + 8\ln(A)} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(A) \left( \frac{1}{2\ln(A)} + \frac{\ln(2)}{\ln(A)} + 1 \right)}{8\ln(A) \left( \frac{1}{2\ln(A)} + 1 \right)} = \frac{1}{4}$$