Coller ci-dessous l'étiquette code barre correspondant à l'épreuve

T9 - 00166
0297-00-728778
EDHECMATS

Copie n° 3b - DAC

Date : 18 Mai 2018 Epreuve / Sous épreuve : Maths EDHEC S

Code Epreuve : 297

Nombre de copies supplémentaires : 2

Note attribuée :	20

Exercice 1 :

1) f_n est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ car polynomiale et $\forall x \geq 0$:

$f_n'(x) = -(1 + nx^{n-1}) < 0$

donc f_n est C^0 et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers

$f(\mathbb{R}_+) =]-\infty, 1]$ car $\lim\limits_{+\infty} f_n = -\infty$ et $f_n(0) = 1$

$0 \in]-\infty, 1]$ donc $\exists!\ u_n \geq 0$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

2) a) $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = -1 < 0$

donc par strict-décroissance de f_n $u_n \in]0, 1[$.

b) $f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} \geq 1 - u_n - u_n^{n} = f_n(u_n) = 0$

car $0 < u_n < 1$
$\Rightarrow 0 < u_n^{n+1} < u_n^{n}$

donc $f_{n+1}(u_n) \geq 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.

donc par strict- décroissance de f_{n+1} on a

$u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante.

c) (u_n) est croissante et majorée par 1

donc elle converge. Comme $u_n \in]0, 1[$

sa limite aussi appartient à $[0, 1]$.

~~d) Notons~~ $\cancel{\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n}$ ~~:~~

~~On a~~ $\cancel{1 - u_n - u_n^{n} = 0}$

~~car~~ $\cancel{0 < u_n < 1}$ ~~donc~~ $\cancel{\lim_{n \to +\infty} u_n^{n} = 0}$ ~~donc~~

~~quand~~ $\cancel{n \to +\infty}$ ~~l'égalité précédente~~

⚠ 2) d) en fin d'exercice.

~~devient $1 - \ell = 0$ i.e $\ell = 1$~~.

3) a)

On a vu que $0 < U_n < 1$

donc $0 < 1 - U_n < 1$ i.e $0 < V_n < 1$.

On a $1 - U_n - U_n^n = 0$

donc $V_n = U_n^n \Rightarrow \ln(V_n) = \ln(U_n^n) = n\ln(U_n)$

or $U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc $\ln(U_n) \underset{+\infty}{\sim} U_n - 1 = -V_n$

d'où $\ln(V_n) \underset{+\infty}{\sim} -nV_n$.

b) On a $\dfrac{\ln(V_n)}{-nV_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

car $\ln(V_n) \underset{+\infty}{\sim} -nV_n$ et que $V_n > 0$

donc $\ln\left(\dfrac{-\ln V_n}{nV_n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $\ln$ est

C^0 en 1 et $\ln(1) = 0$.

puis $V_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

donc $\ln V_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$. Enfin par quotient

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln\left(-\frac{\ln V_n}{n V_n}\right)}{-\ln V_n} = 0 \quad (V_n \neq 1 \text{ donc } \ln(V_n) \neq 0)$$

On a $\dfrac{\ln\left(-\frac{\ln V_n}{n V_n}\right)}{-\ln V_n} = \dfrac{\ln(-\ln(V_n)) - \ln n - \ln V_n}{-\ln V_n}$

$$= -\frac{\ln(-\ln(V_n))}{-\ln V_n} + \frac{\ln n}{\ln V_n} + 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

or $\dfrac{\ln(u)}{u} \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0$ donc pour $u = -\ln V_n$

le terme de gauche tend vers 0 donc

$\lim_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{\ln V_n} = -1$ i.e $\ln V_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln n$.

---

c) On a $\ln V_n \underset{+\infty}{\sim} -nV_n$

et $\ln V_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln n$

donc $-nV_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln n$

i.e $V_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$

~~4) $\sqrt{n}\, V_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$~~

~~donc $V_n = o\left(\dfrac{1}{n^{1/2}}\right)$ or $1/2 > 1$~~

~~donc $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^{1/2}}$ converge pas par comparaison~~

~~de séries à termes positifs (CSTP) $\sum\limits_{n \geq 1} V_n$ converge~~

4) Essayons de trouver $\alpha > 1 \mid V_n = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

$\Leftrightarrow n^\alpha \dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln n}{n^{1-\alpha}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ or par croissances

comparées $1 - \alpha > 0$ i.e $\alpha < 1$ donc comme $\forall \alpha \leq 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge, par comparaison de séries à termes positifs (CSTP)

$\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge.

• $n\sqrt{n}\, v_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n\sqrt{n}\,(\ln n)^2}{n^2} = \dfrac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $v_n^2 = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ puis par CSTP

$\sum_{n\geq 1} v_n^2$ converge $(3/2 > 1)$.

---

2) d) Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$:

Supposons $\ell \neq 1$, comme $\ell \in [0,1]$ on a $0 \leq \ell < 1$ donc $\ell^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

De plus $f_n(u_n) = 1 - u_n - u_n^n = 0$

Comme (u_n) converge on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(\ell) = 0$

donc $1 - \ell - \ell^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $1 - l = 0$ car $l^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

i.e $l = 1$ ce qui contredit l'hypothèse

$l \neq 1$.

$\underline{l = 1}$.

* * *

Exercice 2 :

1)

$\forall x \in \mathbb{R}^3, \langle f(x), x\rangle = -\langle x, f(x)\rangle$

$\Rightarrow 2\langle f(x), x\rangle = 0$ car $\langle , \rangle$ est symétrique.

$\Rightarrow \underline{\langle f(x), x\rangle = 0}$.

2) Soit λ une valeur propre réelle de f et x un vecteur propre associé :

$\langle f(x), x\rangle = \lambda \|x\|^2 = 0$

or x est un vecteur propre donc $x \neq 0$ donc $\|x\| \neq 0$

donc $\underline{\lambda = 0}$.

0 est la seule valeur propre réelle de f.

3) Soit $(x, y) \in \ker f \times \operatorname{Im} f$:

$f(x) = 0$ et $\exists z \in \mathbb{R}^3 \mid y = f(z)$.

$\langle x, y \rangle = \langle x, f(z) \rangle = -\langle f(x), z \rangle$

$= -\langle 0, z \rangle = 0$ donc $\ker f \perp \operatorname{Im} f$

et en particulier $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$

puis la formule du rang donne $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 3$

$= \dim \mathbb{R}^3$ donc $\ker f \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} f$.

4) Si $\dim \ker f = 3$ on a $\ker f = \mathbb{R}^3$

donc $f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ donc il suffit de prendre

$\alpha = 0$ et n'importe quelle base.

5) a)

$\dim \ker f = 2$ donc $\dim \operatorname{Im} f = 1$.

Comme ces deux s.e.v. sont supplémentaires et orthogonaux on peut trouver une base orthonormale (BON) d'après le théorème de la BON incomplète $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ où $e_1 \in \operatorname{Im} f$

et (e_2, e_3) est une BON de $\ker f$.

b) $e_1 \in \operatorname{Im} f$ et (e_1, e_2, e_3) est une base

de $\mathbb{R}^3$ donc $\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid f(e_1) = ae_1 + be_2 + ce_3$.

$(e_2, e_3) \in (\ker f)^2$ donc $f(e_2) = f(e_3) = 0$.

Donc $\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$A = \mathcal{M}at_B(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Soit $x \in \mathrm{Im}\, f$, $\exists y \in \mathbb{R}^3 \mid x = f(y)$.

$\Rightarrow f(x) = f(f(y)) \in \mathrm{Im}\, f$ donc

$\mathrm{Im}\, f$ est stable par f.

$\forall x \in \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e_1)$, $f(x) \in \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e_1)$

donc $f(e_1) = \lambda e_1$ ou $\lambda \in \mathbb{R}$:

ainsi $b = c = 0$

---

d) Posons $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

D'après 1) $\langle f(e_1), e_1 \rangle = 0$

i.e $^t(A E_1) E_1 = {}^tE_1 \, {}^tA E_1 = 0$

$$\Rightarrow (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow a = 0$

si $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$ alors $f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

$\alpha = 0$ et n'importe quelle base de $\mathbb{R}^3$ est

solution du problème.

6) a)

$\mathrm{Dim}\ \mathrm{Ker}(f) = 1$ donc $\mathrm{Dim}\ \mathrm{Im}(f) = 2$ donc
pour les mêmes arguments que 5) a) il éxiste une
telle base de $\mathbb{R}^3$.

b) $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et f est

stable par $\mathrm{Im} f$ donc $\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

tel que $f(e_1) = ae_1 + ce_2$ et $f(e_2) = be_1 + de_2$.

car $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont dans $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$

• $e_3 \in \mathrm{Ker} f$ donc $f(e_3) = 0$.

La matrice de f dans la base B est de la
forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) On a $\langle f(e_1), e_1 \rangle = \langle f(e_2), e_2 \rangle = 0$

donc ${}^tE_1\, {}^tA\, E_1 = {}^tE_2\, {}^tA\, E_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ (0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \quad \text{car } {}^tA = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \underline{a = d = 0}$ donc $A = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• On a $\langle f(e_1), e_2 \rangle = -\langle e_1, f(e_2) \rangle$

$\Rightarrow {}^tE_1\, {}^tA\, E_2 = -\, {}^tE_1\, A\, E_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ -(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ -b = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{c = -b}$.

d)

$\exists$ une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ (f est antisymétrique)

$\cancel{\alpha}$ $\cancel{\alpha}$ $\cancel{\alpha}$

Exercice 3 :

1) $x = $ grand(1, 1, exp, 1/2)

$y = $ sqrt(x)

disp(y)

2) a)

$\forall x \geq 0, \ F_Y(x) = P(\sqrt{X} \leq x)$

$= P(X \leq x^2) = 1 - e^{-1/2 x^2}$

$\forall x < 0, \ F_Y(x) = 0$ car $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.

$$F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-1/2 x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

---

b) Il suffit de dériver :

$$f_Y(x) = \begin{cases} x e^{-1/2 x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

---

3) a) Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$E(Z^2) = V(Z) + E(Z)^2 = 1 + 0 = 1$.

$E(Z^2) = 1$.

b) $\varphi : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ est une densité de Z.

Comme Z admet un moment d'ordre 2

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-x^2/2} \, dx$ converge et vaut 1.

donc par parité $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

i.e Y admet une espérance qui vaut

$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x f_Y(x) \, dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

$E(Y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4) a) $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$

et $\forall x \geq 0, \quad 0 < e^{-x/2} \leq 1$

donc $0 \leq 1 - e^{-x/2} < 1$

donc $U(\Omega) = [0, 1[$.

b) $\forall x \in [0, 1[$:

$P(U \leq x) = P(1 - e^{-X/2} \leq x)$

$= P(e^{-X/2} \geq 1 - x)$

$= P\left(-\frac{X}{2} \geq \ln(1 - x)\right)$ car $\ln$ croît.

$= P(X \leq -2\ln(1 - x))$

$= 1 - e^{-1/2(-2\ln(1-x))}$

$= 1 - e^{\ln(1-x)}$

$= 1 - (1 - x) = x$

$F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \in [0, 1[\\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ car $U(\Omega) = [0, 1[$

On reconnait une fonction de répartition d'une loi uniforme $U([0,1])$.

$U \sim U([0,1])$.

c) $X = -2 \ln(1 - U)$.

```
x = -2 log(1 - rand())
y = sqrt(x)
disp(y).
```

Problème :

1) À l'instant 0 on est sûr d'avoir reçu 0 appels donc $P(N_0 = 0) = 1$.

Puis comme $(N_0 = n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un SCE on a $\forall n \geq 1$, $P(N_0 = n) = 0$.

$p_0(0) = 1$ et $\forall n \geq 1$, $p_n(0) = 0$.

N_0 est la variable aléatoire certaine égale à 1.

2) a)

$\forall t \geq 0$, $f_0(t) = e^{\lambda t} p_0(t)$

$f_0'(t) = \lambda e^{\lambda t} p_0(t) + e^{\lambda t} p_0'(t)$

$= e^{\lambda t}(\lambda p_0(t) + p_0'(t))$ or

$p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$ donc $f_0'(t) = 0$

donc f_0 est constante et vaut $f_0(0) = p_0(0) = 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$\forall t \geq 0, f_n'(t) = \lambda e^{\lambda t} P_n(t) + e^{\lambda t} P_n'(t)$

$= e^{\lambda t}\left(\lambda P_n(t) + P_n'(t)\right)$

or $P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$

donc $f_n'(t) = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) = \lambda f_{n-1}(t)$.

$\underline{\forall \in \mathbb{N}^*, f_n' = \lambda f_{n-1}}$.

c)

(i) Comme $\lambda \neq 0$ on a $\forall t \geq 0$:

$f_{n-1}(t) = \frac{1}{\lambda} f_n'(t)$

$\Rightarrow \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{\lambda} f_n'(t)$

$\Rightarrow \forall t \geq 0, \int_0^t \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^t f_n'(x)\, dx$

$\Rightarrow \forall t \geq 0, \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{x^n}{n}\right]_0^t = \frac{1}{\lambda}\left[f_n(x)\right]_0^t$

Coller ci-dessous l'étiquette code barre correspondant à l'épreuve

S'il s'agit d'une copie supplémentaire, reportez ici le code à 6 chiffres situé sous le code barre : 728778

Date :

Epreuve / Sous épreuve : Maths EDHEC

Code Epreuve : 297

Nombre de copies supplémentaires : 2 (numérotez les pages dans le cadre en bas à droite)

Note attribuée :

$$\Rightarrow \forall t \geq 0, \quad \frac{t^n \lambda^{n-1}}{n!} = \frac{1}{\lambda}\left(f_n(t) - f_n(0)\right)$$

$$\Rightarrow \forall t \geq 0, \quad f_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} + f_n(0)$$

En posant $K = f_n(0)$ on a $\forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} + K.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

(ii) $f_n(0) = p_n(0) = 0$

et $f_n(0) = \frac{0^n}{n!} + K = K$ car $n > 0$

ainsi $K = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ f_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

3) a) On a donc $e^{\lambda t} p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

et $p_0(t) = e^{-\lambda t} f_0(t) = e^{-\lambda t}$ d'après 2) a).

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, \quad \underline{P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \; P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

donc $\underline{N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)}$.

4) a)

$\forall t \geq 0, \; (S_1 > t) =$ "le premier appel survient après l'instant t."

$(N_t = 0) =$ "Aucun appel jusqu'à l'instant t"

Donc $\underline{(S_1 > t) = (N_t = 0)}$.

• $S_1(\Omega) = \mathbb{R}_+, \; \forall t \geq 0$:

$P(S_1 \leq t) = 1 - P(S_1 > t) = 1 - P(N_t = 0)$

$= 1 - e^{-\lambda t}$ donc $\underline{S_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)}$.

b) Comme la question précédente, $\forall t \geq 0$:

$(S_n > t) = (N_t \leq n-1)$.

• $S_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$, $(S_n \leq t) = \overline{(S_n > t)}$

$= \overline{(N_t \leq n-1)}$

$= (N_t \geq n)$

Or $(N_t \geq n) \in \mathcal{A}$ donc $(S_n \leq t) \in \mathcal{A}$
donc S_n est une variable aléatoire à densité.

$\forall t \geq 0$, $P(S_n \leq t) = 1 - P(N_t \leq n-1)$

or $P(N_t \leq n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} P(N_t = k)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$

donc $F_n(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda t} t^k \end{cases}$

En dérivant on obtient $\forall t \geq 0$:

$$f_n(t) = F_n'(t) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}\left(-\lambda e^{-\lambda t} t^k + k e^{-\lambda t} t^{k-1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda t}\left(\lambda t^k - k t^{k-1}\right)$$

$$= e^{-\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} t^k - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1}\right)$$

$$= e^{-\lambda t}\left(\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda - \lambda\right) = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}$$

On sort le terme $k=0$ dans la première somme puis par télescopage.

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Coller ci-dessous l'étiquette code barre correspondant à l'épreuve

S'il s'agit d'une copie supplémentaire, reportez ici le code à 6 chiffres situé sous le code barre : 728778

Date :

Epreuve / Sous épreuve : Maths EDHEC

Code Epreuve : 297

Nombre de copies supplémentaires : 2 (numérotez les pages dans le cadre en bas à droite)

Note attribuée :

5) a)

$u \neq t$ et les appels arrivent de manière indépendante donc N_u et N_t sont indépendantes puis d'après le lemme de coalition N_u et $N_t - N_u$ le sont aussi.

~~b) $P(N_t - N_u = 0) = P(N_t = N_u) = 0$~~

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ P(N_t = n) = P((N_t - N_u) + N_u = n)$

$= \sum_{i=0}^{n} P(N_u = i) P(N_t - N_u = n - i)$ car

$N_t(\Omega) = N_t - N_u(\Omega) = \mathbb{N}$ et par indépendance.

~~c) $P(N_t - N_u = 0) = P(N_u =$~~

c) On en déduit $P(N_t = 0) = P(N_u = 0) P(N_t - N_u = 0)$

donc $P(N_t - N_u = 0) = \dfrac{P(N_t = 0)}{P(N_u = 0)} = \dfrac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda u}} = e^{-\lambda(t-u)}$

• On a aussi $P(N_t=1)=P(N_u=0)P(N_t-N_u=1)$
$+P(N_u=1)P(N_t-N_u=0)$

$= e^{-\lambda u}P(N_t-N_u=1)+e^{-\lambda u}\times\lambda u\times e^{-\lambda(t-u)}$

donc $\lambda t e^{-\lambda t}=e^{-\lambda u}P(N_t-N_u=1)+\lambda u e^{-\lambda t}$

$\Rightarrow P(N_t-N_u=1)=\lambda(t-u)e^{-\lambda(t-u)}$

---

d) Le résultat est vrai au rg $n=0$ et $n=1$ d'après c). Soit $n\in\mathbb{N}^*$:

Supposons le vrai $\forall\ i\in[\![0,n]\!]$:

D'après b) $P(N_t=n+1)=\sum_{i=0}^{n+1}P(N_u=i)P(N_t-N_u=n+1-i)$

$=P(N_u=0)P(N_t-N_u=n+1)+\sum_{i=1}^{n+1}P(N_u=i)P(N_t-N_u=n+1-i)$

~~donc~~ $\cancel{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}P(N_t-N_u=n+1)+}$

$$\Rightarrow e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} = e^{-\lambda u} P(N_t - N_u = n+1) + \sum_{i=1}^{n+1} e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^i}{i!} \times \frac{(\lambda(t-u))^{n+1-i}}{(n+1-i)!} e^{-\lambda(t-u)}$$

$\Rightarrow$

$$e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} = e^{-\lambda u} P(N_t - N_u = n+1) + \frac{e^{-\lambda t}}{(n+1)!}\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} (\lambda u)^i (\lambda(t-u))^{n+1-i}$$

$\Rightarrow$

$$e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} = e^{-\lambda u} P(N_t - N_u = n+1) + \frac{e^{-\lambda t}}{(n+1)!}\left((\lambda u + \lambda(t-u))^{n+1} - (\lambda(t-u))^{n+1}\right)$$

après arrangement on a :

$$P(N_t - N_u = n+1) = \frac{(\lambda(t-u))^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\lambda(t-u)}$$

qui est le résultat au rg $n+1$.

- Par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}, P(N_t - N_u = n) = \frac{(\lambda(t-u))^n}{n!} e^{-\lambda t}$

6) a) rg du dernier appel