Une correction toute personnelle d'ESSEC MI

Jean-François COSSUTTA. Marcelin Berthelot Saint Maur 94. jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

ESSEC MATHÉMATIQUES I

Dans la correction j'évite les identifications et je rectifie les quelques erreurs...

Dans la suite, si H est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous noterons f_H l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^n$ est H ; nous dirons que f_H est l'endomorphisme canoniquement associé à H.

Pour moi $<.,.>$ est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|.\|$ est la norme associée. Dans la suite je note $<.,.>_{\mathbb{R}^n}$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Partie I : Etude d'une suite de vecteurs.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) C appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et ${}^tC$ est un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. Ainsi $C\,{}^tC$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient i et j deux éléments de $[\![1,n]\!]$. La $i^{\text{ème}}$ ligne de C est (c_i) (!) et la $j^{\text{ème}}$ colonne de ${}^tC$ est (c_j).

Ainsi l'élément de $C\,{}^tC$ situé à l'intersection de sa $i^{\text{ème}}$ ligne et de sa $j^{\text{ème}}$ colonne est $c_i\,c_j$.

$$\boxed{C\,{}^tC \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } C\,{}^tC = (c_i\,c_j).}$$

${}^t\big(C\,{}^tC\big) = {}^t\big({}^tC\big)\,{}^tC = C\,{}^tC$. Ainsi $C\,{}^tC$ est une matrice symétrique et réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\boxed{C\,{}^tC \text{ est diagonalisable.}}$$

b) Notons que ${}^tCC = \|C\|^2$. Alors $\big(C\,{}^tC\big)^2 = (C\,{}^tC)(C\,{}^tC) = C({}^tCC)\,{}^tC = C\big(\|C\|^2\big)\,{}^tC = \|C\|^2\,C\,{}^tC$.

$$\boxed{\big(C\,{}^tC\big)^2 = \|C\|^2\,C\,{}^tC.}$$

c) Considérons le polynôme $P = X^2 - \|C\|^2\,X$. $P(C\,{}^tC) = (C\,{}^tC)^2 - \|C\|^2\,C\,{}^tC = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

P est un polynôme annulateur de $C\,{}^tC$ et les racines de P sont 0 et $\|C\|^2$. Ainsi :

$$\boxed{\text{toute valeur propre de } C\,{}^tC \text{ est égale à 0 ou à } \|C\|^2.}$$

d) $\boxed{\bigstar}$ Ici nous supposerons n supérieur ou égal à 2 $\boxed{\bigstar}$.

Montrons que 0 est valeur propre de $C\,{}^tC$ et déterminons le sous-espace propre associé.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons que ${}^tCX = <C,X>$.

$(C\,{}^tC)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff C({}^tCX) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff C(<C,X>) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff <C,X>\ C = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Rappelons que C n'est pas nulle. Ainsi : $(C\,{}^tC)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff <C,X>= 0 \iff X \in (\mathrm{Vect}(C))^{\perp}$.

Comme $\mathrm{Vect}(C)$ est une droite vectorielle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et que $n \geqslant 2$, $(\mathrm{Vect}(C))^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension $n-1$ non nulle. Ainsi :

$$\boxed{\text{0 est valeur propre de } C\,{}^tC \text{ et le sous-espace propre associé est l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par } C.}$$

$\boxed{\text{Remarque}}$ *Si n est égal à 1, 0 n'est pas valeur propre de ${}^tCC$.*

En fait il n'y a aucun calcul à faire. C^tC est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, 0 en est une valeur propre et le sous-espace propre de C^tC associé à 0 est de dimension $n-1$. Nécessairement C^tC possède une seconde valeur propre (mais pas plus) dont le sous-espace propre associé a pour dimension 1.

Nous avons vu que les seules valeurs propres possibles de C^tC sont 0 et $\|C\|^2$. Par conséquent $\|C\|^2$ est la seconde valeur propre de C^tC.

Le sous-espace propre associé SEP $\left(C^tC, \|C\|^2\right)$ est un supplémentaire de SEP $(C^tC, 0)$.

Mieux, comme C^tC est symétrique, SEP $\left(C^tC, \|C\|^2\right)$ et SEP $(C^tC, 0)$ sont orthogonaux.

Ils sont donc supplémentaires et orthogonaux. On peut alors dire que SEP $\left(C^tC, \|C\|^2\right)$ est le supplémentaire orthogonal de SEP $(C^tC, 0) = (\mathrm{Vect}(C))^\perp$; c'est donc $\mathrm{Vect}(C)$.

En particulier : $C^tCC = \|C\|^2\, C$! !

$\boxed{C^tCC = \|C\|^2\, C,\ \|C\|^2 \text{ est une valeur propre de } C^tC \text{ et le sous espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par } C.}$

$\boxed{\text{Remarque}}$ *Si n vaut 1, $\|C\|^2$ est la seule valeur propre de C^tC et le sous-espace propre associé est toujours* $\mathrm{Vect}(C)$ *!*

e) Rappelons que l'on note f_{C^tC} l'endomorphisme canoniquement associé à C^tC, c'est à dire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est C^tC.

C^tC est symétrique et $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ donc :

$\boxed{\text{l'endomorphisme canoniquement associé à } C^tC \text{ est un endomorphisme symétrique.}}$

Supposons C unitaire et notons c l'élément de $\mathbb{R}^n$ de matrice C dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. c est unitaire.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ C^tC\,X = C({}^tC\,X) = C\ < C, X > = < C, X >\ C.$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f_{C^tC}(x) = < c, x >_{\mathbb{R}^n}\ c$. Comme c est unitaire, f_{C^tC} est la projection orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par c.

$\boxed{\text{Si } C \text{ est unitaire, l'endomorphisme canoniquement associé à } C^tC \text{ est une projection orthogonale.}}$

$\boxed{\textbf{Q2}}$ **a)** Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

${}^tXY = < X, Y > = < Y, X > = {}^tYX$. Rappelons que A est symétrique ; alors :

${}^tXAY = < X, AY > = < AY, X > = {}^t(AY)X = {}^tY{}^tAX = {}^tYAX = < Y, AX > = < AX, Y >.$

${}^tXY = {}^tYX$ donc : $\left({}^tXY\right)^2 = ({}^tXY)({}^tXY) = ({}^tXY)({}^tYX) = {}^tX(Y{}^tY)X.$

De même $\left({}^tXY\right)^2 = ({}^tXY)({}^tXY) = ({}^tYX)({}^tXY) = {}^tY(X{}^tX)Y.$

$$\boxed{\boxed{{}^tXY = {}^tYX} \quad \boxed{{}^tXAY = < X, AY > = < AX, Y >} \quad \boxed{\left({}^tXY\right)^2 = {}^tX(Y{}^tY)X = {}^tY(X{}^tX)Y}}$$

b) A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc il existe une base orthonormale $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Alors pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, il existe un réel λ_i tel que $AU_i = \lambda_i\, U_i$.

Concluons dans les termes de la question (! !).

$\boxed{\text{Il existe une base orthonormale de vecteurs } U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ pour lesquels existent des réels } \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n \text{ tels que } AU_1 = \lambda_1 U_1,\ AU_2 = \lambda_2 U_2,\ \ldots,\ AU_n = \lambda_n U_n.}$

c) Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ les coordonnées de X dans la base orthonormale $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

$X = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k U_k$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $< U_i, X > = < U_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k U_k > = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k < U_i, U_k > = \alpha_i$.

Ainsi $X = \sum_{i=1}^{n} < U_i, X > U_i$. De même $AX = \sum_{i=1}^{n} < U_i, AX > U_i$.

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X = \sum_{i=1}^{n} < U_i, X > U_i \text{ et } AX = \sum_{i=1}^{n} < U_i, AX > U_i.}$$

$(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les deux égalités précédentes donnent alors :

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} < U_i, X >^2} \text{ et } \|AX\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} < U_i, AX >^2}.}$$

Observons que $AX = \sum_{i=1}^{n} < U_i, AX > U_i = \sum_{i=1}^{n} < AU_i, X > U_i = \sum_{i=1}^{n} < \lambda_i U_i, X > U_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < U_i, X > U_i$.

On a alors :

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < U_i, X > U_i \text{ et } \|AX\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big(\lambda_i < U_i, X >\Big)^2}.}$$

$X = \sum_{i=1}^{n} < U_i, X > U_i$, $AX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < U_i, X > U_i$ et $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est une base orthonormale.

Alors $< X, AX > = \sum_{i=1}^{n} \Big(\big(< U_i, X > \big) \times \big(\lambda_i < U_i, X >\big)\Big)$. Finalement :

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ < X, AX > = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < U_i, X >^2.}$$

d) Posons, pour simplifier les écritures, $R = \sum_{i=1}^{n} U_i {}^tU_i$ et $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i {}^tU_i$.

Rappelons que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X = \sum_{i=1}^{n} < U_i, X > U_i$ et $AX = \sum_{i=1}^{n} < U_i, AX > U_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < U_i, X > U_i$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ RX = \sum_{i=1}^{n} U_i {}^tU_i X = \sum_{i=1}^{n} U_i < U_i, X > = \sum_{i=1}^{n} < U_i, X > U_i = X = IX$.

Ainsi : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ RX = IX$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f_R(x) = f_I(x)$.

Par conséquent les endomorphismes f_R et $f_I = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ sont égaux.

Leurs matrices dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^n$ sont également égales. Donc $R = I$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ SX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i {}^tU_i X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i < U_i, X > = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < U_i, X > U_i = AX$.

Ainsi : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ SX = AX$.

Un raisonnement anologue à celui fait plus haut donne alors $A = S$.

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{n} U_i {}^tU_i \text{ et } A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i {}^tU_i.}$$

Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$. Notons, pour simplifier, p_i l'endomorphisme canoniquement associé à $U_i {}^tU_i$. Notons u_i l'élément de $\mathbb{R}^n$ de matrice U_i dans $\mathcal{B}_0$. u_i est unitaire car $\|U_i\| = 1$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ U_i{}^tU_i\, X = U_i\ < U_i, X >=< U_i, X >\ U_i$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ p_i(x) =< u_i, x >_{\mathbb{R}^n}\ u_i$.

p_i est alors la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur la droite vectorielle engendrée par u_i.

Pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, l'endomorphisme canoniquement associé à $U_i{}^tU_i$ est la projection orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de matrice U_i dans la base canonique.

e) Posons $m = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Min}}\,(\lambda_i)$ et $M = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}}\,(\lambda_i)$.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\forall i \in [\![1, n]\!],\ m \leqslant \lambda_i \leqslant M$ et $\big(< U_i, X > \big)^2 \geqslant 0$.

Ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!],\ m\, \big(< U_i, X > \big)^2 \leqslant \lambda_i\, \big(< U_i, X > \big)^2 \leqslant M\, \big(< U_i, X > \big)^2$.

En sommant il vient : $m \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(< U_i, X > \big)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \big(< U_i, X > \big)^2 \leqslant M \sum_{i=1}^{n} \big(< U_i, X > \big)^2$.

Alors $m\, \|X\|^2 \leqslant < X, AX > \leqslant M\, \|X\|^2$. Finalement :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Min}}\,(\lambda_i)\, \|X\|^2 \leqslant < X, AX > \leqslant \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}}\,(\lambda_i) \|X\|^2.$$

Remarque *Notons que si X est un vecteur propre de A associé à la plus grande (resp. petite) des valeurs propres de A alors $< X, AX >= \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}}\,(\lambda_i)\, \|X\|^2$ (resp. $< X, AX >= \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Min}}\,(\lambda_i)\, \|X\|^2$).*

Ainsi $\displaystyle\underset{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}}{\mathrm{Max}} \frac{< X, AX >}{\|X\|^2} = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}}\ \lambda_i$ *et* $\displaystyle\underset{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}}{\mathrm{Min}} \frac{< X, AX >}{\|X\|^2} = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Min}}\ \lambda_i$.

Ou $\displaystyle\underset{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}}{\mathrm{Max}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}}\ \lambda_i$ *et* $\displaystyle\underset{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}}{\mathrm{Min}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Min}}\ \lambda_i$.

f) Notons que $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$${}^tXAX = (x_1\, x_2\, \ldots\, x_{n-1}\, x_n) \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1\, x_2\, \ldots\, x_{n-1}\, x_n) \begin{pmatrix} 4\,x_1 - x_2 \\ -x_1 + 4\,x_2 - x_3 \\ \vdots \\ -x_{n-2} + 4\,x_{n-1} - x_n \\ -x_{n-1} + 4\,x_n \end{pmatrix}.$$

$${}^tXAX = 4\,x_1^2 - x_1\,x_2 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i(-x_{i-1} + 4\,x_i - x_{i+1}) - x_n\,x_{n-1} + 4\,x_n^2 = 4\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=2}^{n} x_i\,x_{i-1} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\,x_{i+1}.$$

Un petite translation d'indice dans la deuxième somme donne alors $\boxed{{}^tXAX = 4\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i\,x_{i+1}}$.

$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ x_i^2 + 2\,x_i\,x_{i+1} + x_{i+1}^2 = (x_i + x_{i+1})^2 \geqslant 0$ et $x_i^2 - 2\,x_i\,x_{i+1} + x_{i+1}^2 = (x_i - x_{i+1})^2 \geqslant 0$.

Alors $\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ -x_i^2 - x_{i+1}^2 \leqslant -2\,x_i\,x_{i+1} \leqslant x_i^2 + x_{i+1}^2$.

En sommant on obtient : $-\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}^2 \leqslant -2\sum_{i=1}^{n-1} x_i\,x_{i+1} \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}^2$.

Ce qui donne encore : $-\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leqslant -2\sum_{i=1}^{n-1} x_i\,x_{i+1} \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \sum_{i=2}^{n} x_i^2$.

Mais alors : $-2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant -\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leqslant -2\sum_{i=1}^{n-1} x_i\,x_{i+1} \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Finalement : $-2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant -2\sum_{i=1}^{n-1} x_i\,x_{i+1} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. En ajoutant $4\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ il vient :

$$2\|X\|^2 = 4\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant {}^tXAX = 4\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i\,x_{i+1} \leqslant 4\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 6\,\|X\|^2.$$

Donc $2\,\|X\|^2 \leqslant {}^tXAX =< X, AX > \leqslant 6\,\|X\|^2$.

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ 2\,\|X\|^2 \leqslant {}^tXAX =< X, AX > \leqslant 6\,\|X\|^2.}$$

Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur associé.

$< X, AX > = < X, \lambda\, X > = \lambda\ < X, X > = \lambda\,\|X\|^2$. Donc $2\,\|X\|^2 \leqslant < X, AX > = \lambda\,\|X\|^2 \leqslant 6\,\|X\|^2$.

En divisant par $\|X\|^2$ qui est un réel strictement positif on obtient : $2 \leqslant \lambda \leqslant 6$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ sont dans l'intervalle } [2, 6].}$$

Q3 **a)** Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Nous avons vu plus haut que $AX = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ < X, U_i >\ U_i$.

Comme $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\ < X, U_i >^2.}$$

$\|X\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} < X, U_i >^2$, $\forall i \in [\![1, n]\!],\ 0 \leqslant |\lambda_i| \leqslant \rho(A)$ et $\forall i \in [\![1, n]\!],\ < X, U_i >^2 \geqslant 0$.

Alors $\|AX\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2\ < X, U_i >^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(A)^2\ < X, U_i >^2 = \rho(A)^2 \sum\limits_{i=1}^{n} < X, U_i >^2 = \big(\rho(A)\,\|X\|\big)^2$.

Ainsi $\|AX\| \leqslant \rho(A)\,\|X\|$ car $\|AX\|$ et $\rho(A)\,\|X\|$ sont des réels positifs ou nuls.

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX\| \leqslant \rho(A)\,\|X\|.}$$

Il existe un élément i_0 de $[\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda_{i_0}| = \displaystyle\operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i| = \rho(A)$.

$\|AU_{i_0}\| = \|\lambda_{i_0}\,U_{i_0}\| = |\lambda_{i_0}|\,\|U_{i_0}\| = \rho(A)\,\|U_{i_0}\|$.

Si i_0 est un élément de $[\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda_{i_0}| = \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i| = \rho(A)$, alors tout vecteur propre U_{i_0} de A, associé à la valeur propre λ_{i_0}, est un élément **non nul** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui vérifie : $\|AU_{i_0}\| = \rho(A)\,\|U_{i_0}\|$.

b) ▶ Supposons i. c'est à dire que pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la suite $(A^p X)$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

Il existe un élément i_0 de $[\![1,n]\!]$ tel que $|\lambda_{i_0}| = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}}\,|\lambda_i| = \rho(A)$.

Posons $X = U_{i_0}$ et $\lambda = \lambda_{i_0}$. $AX = \lambda\, X$. Une récurrence simple donne alors $\forall p \in \mathbb{N},\ A^p X = \lambda^p\, X$.

Par hypothèse la suite $(A^p X)$ tend vers zéro. Il en est alors de même la suite $(\lambda^p\, X)$.

Ainsi on a : $0 = \lim\limits_{p\to+\infty} \|\lambda^p\, X\| = \lim\limits_{p\to+\infty} \big(|\lambda^p|\, \|X\|\big) = \lim\limits_{p\to+\infty} \big(|\lambda|^p\, \|X\|\big)$.

Or $\|X\|$ n'est pas nul(le) donc $\lim\limits_{p\to+\infty} |\lambda|^p = 0$ ce qui exige $|\lambda| < 1$. Or $|\lambda| = |\lambda_{i_0}| = \rho(A)$. Par conséquent $\rho(A) < 1$.

▶ Supposons ii. c'est à dire que $\rho(A) < 1$. Montrons ii.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrons que la suite $(A^p X)$ tend vers 0.

Montrons par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \|A^p X\| \leqslant \big[\rho(A)\big]^p\, \|X\|$.

C'est vrai pour $p = 1$ d'après a). Supposons l'inégalité vraie pour un élément p de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $p+1$.

$\|A^{p+1} X\| = \|A(A^p X)\| \leqslant \rho(A)\, \|A^p X\|$. L'hypothèse de récurrence donne : $\|A^p X\| \leqslant \big[\rho(A)\big]^p\, \|X\|$.

Ainsi $\|A^{p+1} X\| \leqslant \rho(A)\, \|A^p X\| \leqslant \rho(A)\, \big[\rho(A)\big]^p\, \|X\| = \big[\rho(A)\big]^{p+1}\, \|X\|$.

$\|A^{p+1} X\| \leqslant \big[\rho(A)\big]^{p+1}\, \|X\|$ et la récurrence s'achève.

$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \|A^p X\| \leqslant \big[\rho(A)\big]^p\, \|X\|$. Or $0 \leqslant \rho(A) < 1$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \big[\rho(A)\big]^p = 0$.

Il vient alors par encadrement : $\lim\limits_{p\to+\infty} \|A^p X\| = 0$. La suite $(A^p X)$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

> Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
>
> i. Pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la suite $(A^p X)$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.
>
> ii. $\rho(A) < 1$.

Remarque *$\rho(A)$ est le rayon spectral de la matrice A. Le résultat précédent vaut en fait pour une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

Partie II : Un problème de minimisation.

Remarque *Soit f une fonction numérique continue sur un segment $[b,c]$ de $\mathbb{R}$ ($b < c$).*

$|f|$ est également continue sur le segment $[b,c]$ donc $|f|$ possède un maximum sur $[b,c]$ que nous noterons $\underset{t\in[b,c]}{\text{Max}}\,|f(t)|$.

Alors la partie $\{|f(t)|/b \leqslant t \leqslant c\}$ possède un plus grand élément donc une borne supérieure que l'on note usuellement $\underset{t\in[b,c]}{\text{Sup}}\,|f(t)|$.

Retenons que $\text{Sup}\{|f(t)|/b \leqslant t \leqslant c\} = \underset{t\in[b,c]}{\text{Sup}}\,|f(t)| = \underset{t\in[b,c]}{\text{Max}}\,|f(t)|$ (... dans la mesure où f est <u>continue</u> sur le <u>segment</u> $[b,c]$).

Dans la suite nous appellerons un max un max (!) et nous utiliserons le plus souvent la notation $\underset{t\in[b,c]}{\text{Max}}\,|f(t)|$ de préférence à $\text{Sup}\{|f(t)|/b \leqslant t \leqslant c\}$; sauf dans quelques conclusions et ceci pour être agréable au concepteur.

Q1 **a)** Montrons à l'aide d'une récurrence "d'ordre 2" que, pour tout élément p de $\mathbb{N}$, T_p est une fonction polynôme de degré p.

- La propriété est vraie pour $p = 0$ et $p = 1$ car $\forall t \in \mathbb{R},\ T_0(t) = 1$ et $T_1(t) = t$.

- Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie pour $p-1$ et pour p. Montrons la pour $p+1$.

T_p est une fonction polynôme de degré p donc $t \to 2\,t\,T_p(t)$ est une fonction polynôme de degré $p+1$. Comme T_{p-1} est une fonction polynôme de degré $p-1$, $T_{p+1} : t \to 2\,t\,T_p(t) - T_{p-1}(t)$ est alors une fonction polynôme de degré $p+1$ et la récurrence s'achève.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } p \text{ de } \mathbb{N},\ T_p \text{ est une fonction polynôme de degré } p.}$$

Pour tout élément p de $\mathbb{N}$, notons γ_p le coefficient de t^p dans T_p. Notons que $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$.

Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. Le coefficient de t^{p+1} dans $T_{p+1} : t \to 2\,t\,T_p(t) - T_{p-1}(t)$ est le coefficient de t^{p+1} dans $t \to 2\,t\,T_p(t)$ car T_{p-1} est de degré $p-1$.

Ainsi le coefficient de t^{p+1} dans T_{p+1} est $2\,\gamma_p$.

Par conséquent $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \gamma_{p+1} = 2\,\gamma_p$. $(\gamma_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1.

Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \gamma_p = 2^{p-1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } p \text{ de } \mathbb{N}^*, \text{ le coefficient de } t^p \text{ dans } T_p \text{ est } 2^{p-1}.}$$

b) Montrons à l'aide d'une récurrence "d'ordre 2" que, pour tout élément p de $\mathbb{N}$ et pour tout réel θ, $T_p(\cos\theta) = \cos(p\,\theta)$.

• $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0\,\theta)$ et $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_1(\cos\theta) = \cos(\theta)$. La propriété est donc vraie pour $p = 0$ et $p = 1$.

• Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie pour $p-1$ et pour p. Montrons la pour $p+1$.

$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_p(\cos\theta) = \cos(p\,\theta)$ et $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_{p-1}(\cos\theta) = \cos((p-1)\theta)$.

Alors $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_{p+1}(\cos\theta) = 2\,\cos\theta\,T_p(\cos\theta) - T_{p-1}(\cos\theta) = 2\,\cos\theta\,\cos(p\,\theta) - \cos((p-1)\theta)$.

Or $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos((p-1)\,\theta) = \cos(p\,\theta)\,\cos(\theta) + \sin(p\,\theta)\,\sin(\theta)$.

Alors $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_{p+1}(\cos\theta) = \cos\theta\,\cos(p\,\theta) - \sin(p\,\theta)\,\sin(\theta) = \cos(p\,\theta + \theta) = \cos((p+1)\,\theta)$.

Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } p \text{ de } \mathbb{N} \text{ et pour tout réel } \theta,\ T_p(\cos\theta) = \cos(p\,\theta).}$$

c) Soit p un élément de $\mathbb{N}$. $|T_p|$ est continue sur le segment $[-1,1]$ donc possède un maximum sur ce segment que nous noterons $\underset{t\in[-1,1]}{\mathrm{Max}}\,|T_p(t)|$.

L'image du segment $[0,\pi]$ par la fonction cos est le segment $[-1,1]$.

Ainsi $\underset{t\in[-1,1]}{\mathrm{Max}}\,|T_p(t)| = \underset{\theta\in[0,\pi]}{\mathrm{Max}}\,|T_p(\cos\theta)| = \underset{\theta\in[0,\pi]}{\mathrm{Max}}\,|\cos(p\,\theta)|$.

Or $\forall \theta \in [0,\pi],\ |\cos(p\,\theta)| \leqslant 1 = |\cos(p\,0)|$. Alors $\underset{t\in[-1,1]}{\mathrm{Max}}\,|T_p(t)| = \underset{\theta\in[0,\pi]}{\mathrm{Max}}\,|\cos(p\,\theta)| = 1$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \underset{t\in[-1,1]}{\mathrm{Max}}\,|T_p(t)| = 1. \text{ A fortiori } \forall p \in \mathbb{N},\ \mathrm{Sup}\{|T_p(t)| / -1 \leqslant t \leqslant 1\} = 1.}$$

Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. Si x est un élément de $[-1,1]$ il existe un unique élément θ dans $[0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$.

Il est alors légitime de chercher les zéros de T_p dans $[-1,1]$ sous la forme $\cos\theta$ avec θ dans $[0,\pi]$.

Soit θ un élément de $[0,\pi]$.

$$T_p(\cos\theta) = 0 \iff \cos(p\,\theta) = 0 \iff p\,\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ p\,\theta = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{2\,p} + \frac{k\,\pi}{p}\cdot$$

Or θ appartient à $[0,\pi]$. Par conséquent $T_p(\cos\theta) = 0 \iff \exists k \in [\![0, p-1]\!],\ \theta = \dfrac{\pi}{2\,p} + \dfrac{k\,\pi}{p}\cdot$

Dès lors posons $\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ \theta_k = \dfrac{\pi}{2\,p} + \dfrac{k\,\pi}{p} = \dfrac{(2\,k+1)\,\pi}{2p}$ et $z_k = \cos\theta_k$.

z_0, z_1, ..., z_{p-1} sont les zéros de T_p dans $[-1,1]$. Montrons qu'ils sont distincts.

$0 < \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{p-1} < \pi$ et la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

Alors $1 > \cos\theta_0 > \cos\theta_1 > \cdots > \cos\theta_{p-1} > -1$ ou $1 > z_0 > z_1 > \cdots > z_{p-1} > -1$.

Ainsi z_0, z_1, ..., z_{p-1} sont les p zéros distincts de T_p dans $[-1, 1]$.

Notons que z_0, z_1, ..., z_{p-1} sont tous les zéros de T_p car T_p est de degré p.

En particulier T_p n'a pas de zéro dans $\mathbb{R} - [-1, 1]$.

$\boxed{\text{Si } p \text{ est dans } \mathbb{N}^*,\ T_p \text{ admet dans } [-1,1],\ p \text{ zéros distincts qui sont : } \cos\left(\frac{\pi}{2p}\right),\ \cos\left(\frac{3\,\pi}{2p}\right),\ \ldots,\ \cos\left(\frac{(2\,p-1)\,\pi}{2p}\right).}$

Notons que $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ T_p = 2^{p-1} \prod_{k=0}^{p-1} \left(X - \cos\left(\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2p}\right)\right).}$

$\boxed{\text{Remarque}}$ *Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. On peut de la même manière trouver tous les éléments de $[-1, 1]$ qui réalisent le maximum de $|T_p|$ sur $[-1, 1]$.*

Soit x un élément de $[-1, 1]$. Il existe un unique élément θ de $[0, \pi]$ tel que $x = \cos\theta$.

$|T_p(x)| = \underset{t\in[-1,1]}{\mathrm{Max}} |T_p(t)| \Longleftrightarrow |T_p(x)| = 1 \Longleftrightarrow |T_p(\cos\theta)| = 1 \Longleftrightarrow |\cos(p\,\theta)| = 1 \Longleftrightarrow \cos(p\,\theta) = 1$ *et* $\cos(p\,\theta) = -1$.

$|T_p(x)| = \underset{t\in[-1,1]}{\mathrm{Max}} |T_p(t)| \Longleftrightarrow p\,\theta \equiv 0\,[\pi] \Longleftrightarrow \theta \equiv 0 \left[\frac{\pi}{p}\right] \Longleftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{j\,\pi}{p}\cdot$

Or θ appartient à $[0, \pi]$ donc : $|T_p(x)| = \underset{t\in[-1,1]}{\mathrm{Max}} |T_p(t)| \Longleftrightarrow \exists j \in [\![0, p]\!],\ \theta = \frac{j\,\pi}{p}\cdot$

Finalement x réalise le maximum de $|T_p|$ sur $[-1, 1]$ si et seulement si il existe un élément j de $[\![0, p]\!]$ tel que $x = \cos\left(\frac{j\,\pi}{p}\right)\cdot$

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Avant de commencer éclairons le problème avec quelques remarques.

▲ Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. $|a| > 1$ donc $T_p(a)$ n'est pas nul. La définition de S_p est légitime.

C'est encore le cas pour $p = 0$ car $T_0(a) = 1$.

▲ Soit p un élément de $\mathbb{N}$. Notons $\mathcal{L}_p$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}_p[X]$ prenant la valeur 1 en a.

$\boxed{\mathcal{L}_p = \{Q \in \mathbb{R}_p[X] \mid Q(a) = 1\}}$.

$\boxed{\text{Dans cette question on cherche à montrer que } \underset{Q\in\mathcal{L}_p}{\mathrm{Min}} \left(\underset{t\in[-1,1]}{\mathrm{Max}} |Q(t)|\right) \text{ existe, vaut } \frac{1}{|T_p(a)|} \text{ et que } S_p = \frac{T_p}{T_p(a)} \text{ est le seul élément de } \mathcal{L}_p \text{ qui réalise ce minimum.}}$

▲ Réglons d'abord le cas où p vaut 0. $\forall t \in \mathbb{R},\ T_0(t) = S_0(t) = 1$.

Notons que S_0 est le seul élément de $\mathbb{R}_0[X]$ qui prend la valeur 1 en a ; ainsi $\mathcal{L}_0 = \{S_0\}$.

Alors $\underset{Q\in\mathcal{L}_0}{\mathrm{Min}} \left(\underset{t\in[-1,1]}{\mathrm{Max}} |Q(t)|\right)$ existe, vaut $1 = \frac{1}{|T_0(a)|}$ et S_0 est le seul élément de $\mathcal{L}_0$ qui réalise ce minimum !

Dans toute la suite de cette question nous supposerons que p est un élément de $\mathbb{N}^*$.

▲ Observons encore que $S_p = \frac{T_p}{T_p(a)}$ est un élément de $\mathbb{R}_p[X]$ tel que $S_p(a) = 1$; donc $S_p \in \mathcal{L}_p$.

De plus $\underset{t\in[-1,1]}{\mathrm{Max}} |S_p(t)| = \frac{1}{|T_p(a)|} \underset{t\in[-1,1]}{\mathrm{Max}} |T_p(t)| = \frac{1}{|T_p(a)|}$ car $\underset{t\in[-1,1]}{\mathrm{Max}} |T_p(t)| = 1$ d'après Q1 c).

$\boxed{\text{Pour faciliter les écritures dans la suite, posons : } \forall j \in [\![0, p]\!],\ x_j = \cos\left(\frac{j\,\pi}{p}\right).}$

Notons que $1 = x_0 > x_1 > \cdots > x_{p-1} > x_p = -1$.

a) Supposons donc qu'il existe une fonction polynôme P de $\mathbb{R}_p[X]$ telle que $P(a) = 1$ et telle que

$\underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}} |P(t)| < \dfrac{1}{|T_p(a)|}\cdot$

Alors $\forall t \in [-1,1],\ |P(t)| < \dfrac{1}{|T_p(a)|}\cdot$ Ainsi $\forall t \in [-1,1],\ -\dfrac{1}{|T_p(a)|} < P(t) < \dfrac{1}{|T_p(a)|}\cdot$

Par conséquent $\forall t \in [-1,1],\ \dfrac{1}{|T_p(a)|} - P(t) > 0$ et $-\dfrac{1}{|T_p(a)|} - P(t) < 0\cdot$

Alors pour tout élément j de $[\![0,p]\!]$: $\dfrac{1}{|T_p(a)|} - P(x_j) > 0$ et $-\dfrac{1}{|T_p(a)|} - P(x_j) < 0$.

Soit j un élément de $[\![0,p]\!]$.

$S_p(x_j) = S_p\left(\cos\left(\dfrac{j\,\pi}{p}\right)\right) = \dfrac{1}{T_p(a)}\,T_p\left(\cos\left(\dfrac{j\,\pi}{p}\right)\right) = \dfrac{1}{T_p(a)}\,\cos\left(p\,\dfrac{j\,\pi}{p}\right) = \dfrac{1}{T_p(a)}\,\cos(j\,\pi) = \dfrac{(-1)^j}{T_p(a)}\cdot$

Ainsi $S_p(x_j) - P(x_j) = \dfrac{(-1)^j}{T_p(a)} - P(x_j)$.

Si $(-1)^j\,T_p(a)$ est strictement positif : $S_p(x_j) - P(x_j) = \dfrac{1}{|T_p(a)|} - P(x_j) > 0$.

Si $(-1)^j\,T_p(a)$ est strictement négatif : $S_p(x_j) - P(x_j) = -\dfrac{1}{|T_p(a)|} - P(x_j) < 0$.

Pour tout élément j de $[\![0,p]\!]$, $S_p\left(\cos\left(\dfrac{j\,\pi}{p}\right)\right) - P\left(\cos\left(\dfrac{j\,\pi}{p}\right)\right)$ est strictement positif (resp. strictement négatif) si $(-1)^j\,T_p(a)$ est strictement positif (resp. strictement négatif).

Ainsi pour tout élément j de $[\![0,p]\!]$, $(S_p - P)(x_j)$ est strictement positif si $(-1)^j\,T_p(a) > 0$ et strictement négatif si $(-1)^j\,T_p(a) < 0$.

Soit j un élément de $[\![0,p-1]\!]$. j et $j+1$ sont de parités différentes donc $(S_p - P)(x_j)\,(S_p - P)(x_{j+1}) < 0$.

Comme $S_p - P$ est une fonction continue sur l'intervalle $[x_{j+1}, x_j]$, le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence d'au moins un réel y_j appartenant à $]x_{j+1}, x_j[$ tel que $(S_p - P)(y_j) = 0$.

Ainsi y_0, y_1, ..., y_{p-1} sont p racines distinctes de $S_p - P$ appartenant à l'intervalle $]-1,1[$.

$(S_p - P)(a) = S_p(a) - P(a) = 1 - 1 = 0$ et a n'appartient pas à $]-1,1[$ car $|a| > 1$.

Ainsi y_0, y_1, ..., y_{p-1}, a sont $p+1$ racines réelles distinctes de $S_p - P$.

$S_p - P$ a au moins $p+1$ racines réelles distinctes.

$S_p - P$ est alors un élément de $\mathbb{R}_p[X]$ (comme différence de deux éléments de $\mathbb{R}_p[X]$) ayant au moins $p+1$ racines réelles distinctes donc $S_p - P$ est la fonction polynôme nulle.

Alors $P = S_p$. Or $\underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}} |P(t)| < \dfrac{1}{|T_p(a)|} = \underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}} |S_p(t)|$. Ceci induit une légère contradiction !

Il n'existe pas d'élément P de $\mathbb{R}_p[X]$ prenant la valeur 1 en a tel que $\underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}} |P(t)| < \dfrac{1}{|T_p(a)|}\cdot$

b) Ce qui précède montre donc que si P est un élément de $\mathcal{L}_p = \{Q \in \mathbb{R}_p[X] \mid Q(a) = 1\}$ alors $\underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}} |P(t)| \geqslant \dfrac{1}{|T_p(a)|}\cdot$

Comme S_p est un élément de $\mathcal{L}_p$ tel que $\underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}} |S_p(t)| = \dfrac{1}{|T_p(a)|}$ on peut alors dire que :

" $\text{Sup}\{|Q(t)|/ -1 \leqslant t \leqslant 1\}$ où Q décrit $\mathbb{R}_p[X]$ et vérifie $Q(a) = 1$ est minimal pour S_p et vaut $\dfrac{1}{|T_p(a)|}$ "

En clair

Si $\mathcal{L}_p = \{Q \in \mathbb{R}_p[X] \mid Q(a) = 1\}$:

1. $\underset{Q\in\mathcal{L}_p}{\text{Min}} \left(\underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}} |Q(t)|\right)$ existe et vaut $\dfrac{1}{|T_p(a)|}$.
2. S_p est un élément de $\mathcal{L}_p$ qui réalise ce minimum.

Ne "reste" plus qu'à montrer que S_p est le seul élément de $\mathcal{L}_p$ tel que $\underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}} |S_p(t)| = \dfrac{1}{|T_p(a)|}$.

c) On suppose donc que P est une fonction polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$ telle que $P(a) = 1$ et $\underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}} |P(t)| = \dfrac{1}{|T_p(a)|}$.

On se propose de montrer que $\dfrac{1}{2}\left(P + S_p\right)$ a encore ces qualités.

P et S_p sont deux éléments de $\mathbb{R}_p[X]$ donc $\dfrac{1}{2}\left(P + S_p\right)$ appartient également à $\mathbb{R}_p[X]$.

$P(a) = S_p(a) = 1$ donc $\dfrac{1}{2}\left(P + S_p\right)(a) = 1$.

$\dfrac{1}{2}\left(P + S_p\right)$ est un élément de $\mathbb{R}_p[X]$ qui prend la valeur 1 en a. Donc $\dfrac{1}{2}\left(P + S_p\right)$ est un élément de $\mathcal{L}_p$.

Q2 b) permet déjà de dire que $\underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}} \left|\dfrac{1}{2}\left(P + S_p\right)(t)\right| \geqslant \dfrac{1}{|T_p(a)|}$.

Rappelons que $\underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}} |P(t)| = \underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}} |S_p(t)| = \dfrac{1}{|T_p(a)|}$. Donc $\forall t \in [-1,1]$, $|P(t)| \leqslant \dfrac{1}{|T_p(a)|}$ et $|S_p(t)| \leqslant \dfrac{1}{|T_p(a)|}$.

Ainsi $\forall t \in [-1,1]$, $\left|\dfrac{1}{2}\left(P + S_p\right)(t)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(|P(t)| + |S_p(t)|\right) \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{|T_p(a)|} + \dfrac{1}{|T_p(a)|}\right) = \dfrac{1}{|T_p(a)|}$.

Donc $\underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}} \left|\dfrac{1}{2}\left(P + S_p\right)(t)\right| \leqslant \dfrac{1}{|T_p(a)|}$.

Finalement : $\dfrac{1}{|T_p(a)|} \leqslant \underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}} \left|\dfrac{1}{2}\left(P + S_p\right)(t)\right| \leqslant \dfrac{1}{|T_p(a)|}$. Ainsi $\underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}} \left|\dfrac{1}{2}\left(P + S_p\right)(t)\right| = \dfrac{1}{|T_p(a)|}$.

Si P est un polynôme satisfaisant au problème de minimisation de b) il en est de même de $\dfrac{1}{2}\left(P + S_p\right)$.

En clair si P est un élément de $\mathcal{L}_p$ qui réalise $\underset{Q\in\mathcal{L}_p}{\text{Min}} \left(\underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}} |Q(t)|\right)$ alors il en est de même de $\dfrac{1}{2}\left(P + S_p\right)$.

$\boxed{\bigstar\bigstar\bigstar}$ Ici il y a visiblement une erreur de conception car il n'est pas simple de montrer que pour tout élément j de $[\![0,p]\!]$: $\dfrac{1}{2}\left|P\left(\cos\left(\dfrac{j\,\pi}{p}\right)\right) + S_p\left(\cos\left(\dfrac{j\,\pi}{p}\right)\right)\right| = \dfrac{1}{|T_p(a)|}$.

Voici une démonstration standard dans ce type de question.

Dans ce qui suit $\|.\|_\infty$ est la norme infinie dans l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $[-1,1]$.

Ainsi si f est une fonction numérique continue sur $[-1,1]$, $\|f\|_\infty = \underset{[-1,1]}{\text{Sup}} |f(x)| = \underset{x\in[-1,1]}{\text{Max}} |f(x)|$.

Posons $U = \dfrac{1}{2}\left(S_p + P\right)$. $\|S_p\|_\infty = \|P\|_\infty = \|U\|_\infty = \dfrac{1}{|T_p(a)|}$ d'après ce qui précède.

L'objectif est de montrer que $\forall j \in [\![0,p]\!]$, $\left|U\left(\cos\left(\dfrac{j\,\pi}{p}\right)\right)\right| = |U(x_j)| = \dfrac{1}{|T_p(a)|} = \|U\|_\infty$.

Soit b un élément de $[-1,1]$ tel que $|U(b)| = \underset{x\in[-1,1]}{\operatorname{Max}} |U(x)| = \|U\|_\infty$.

$$\frac{2}{|T_p(a)|} = 2\,|U(b)| = |S_p(b)+P(b)| \leqslant |S_p(b)|+|P(b)| \leqslant \frac{1}{|T_p(a)|}+\frac{1}{|T_p(a)|} = \frac{2}{|T_p(a)|}\cdot$$

Nécessairement $|S_p(b)| = |P(b)| = \dfrac{1}{|T_p(a)|}\cdot$

En particulier $|T_p(b)| = 1 = \underset{t\in[-1,1]}{\operatorname{Max}} |T_p(t)|$ et ainsi il existe j_0 dans $[\![0,p]\!]$ tel que $b = \cos\left(\dfrac{j_0\,\pi}{p}\right) = x_{j_0}$.

Donc $|U|$ ne réalise son maximum sur $[-1,1]$ qu'en des points de l'ensemble $\{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$.

Pour montrer que $\forall j \in [\![0,p]\!],\ |U(x_j)| = \dfrac{1}{|T_p(a)|}$ il ne reste plus alors qu'à montrer que $|U|$ réalise son maximum sur $[-1,1]$ en au moins $p+1$ points de $[-1,1]$ (qui seront nécessairement x_0, x_1, ..., x_p).

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors $|U|$ réalise son maximum sur $[-1,1]$ qu'en exactement k points a_1, a_2, ..., a_k de $[-1,1]$ avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ et $k \leqslant p$.

L'interpolation de Lagrange assure l'existence (et l'unicité) d'un polynôme H de degré au plus k tel que $H(a_1) = H(a_2) = \cdots = H(a_k) = 0$ et $H(a) = 1$ (a_1, a_2, ..., a$_k$, a sont $k+1$ réels deux à deux distincts...).

$\boxed{\textit{Remarque}}$ *Si $L = (X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_k)$, $H = \dfrac{1}{L(a)}\,L$ convient.*

Notons que H est un élément de $\mathbb{R}_p[X]$ et que $H(a) = 1$.

Soit ε un réel strictement positif. La continuité et la nullité de H en a_1, a_2, ..., a_k permet d'obtenir l'existence d'un réel α strictement positif tel que $\forall i \in [\![1,k]\!],\ \forall x \in [-1,1] \cap]a_i-\alpha, a_i+\alpha[, |H(x)| < \varepsilon$.

Posons $\Omega_\varepsilon = \displaystyle\bigcup_{i\in[\![1,k]\!]}]a_i-\alpha, a_i+\alpha[$. Ω_ε est un ouvert de $\mathbb{R}$ comme réunion de k ouverts de $\mathbb{R}$.

Soit t un élément de $]0,1[$. Posons $U_t = (1-t)\,U + t\,H$.

U_t est un élément de $\mathbb{R}_p[X]$ tel que $U(a) = 1$ donc $\|U_t\|_\infty \geqslant \dfrac{1}{|T_p(a)|} = \|U\|_\infty$.

- Si x appartient à $\Omega_\varepsilon \cap [-1,1]$, $|U_t(x)| = |(1-t)\,U(x) + t\,H(x)| \leqslant (1-t)\,|U(x)| + t\,|H(x)| \leqslant (1-t)\,\|U\|_\infty + t\,\varepsilon$.
- Soit x un élément de $[-1,1]-\Omega_\varepsilon$, $|U_t(x)| = |U(x) + t\,(H(x)-U(x))| \leqslant |U(x)| + t\,\|H-U\|_\infty$.

$|U|$ est continue sur le <u>fermé</u> <u>borné</u> (ok ?) $[-1,1]-\Omega_\varepsilon$ donc $|U|$ possède un maximum M_ε sur $[-1,1]-\Omega_\varepsilon$.

Alors $|U_t(x)| \leqslant M_\varepsilon + t\,\|H-U\|_\infty$.

Observons que $M_\varepsilon < \|U\|_\infty$ car $[-1,1]-\Omega_\varepsilon$ est contenu dans $[-1,1]$ et les seuls point où $|U|$ prend la valeur $\|U\|_\infty$ sont a_1, a_2, ..., a_k qui n'appartiennent pas à $[-1,1]-\Omega_\varepsilon$.

Dès lors choisissons ε strictement positif et strictement inférieur à $\|U\|_\infty$.

Comme $M_\varepsilon < \|U\|_\infty$ il est possible de trouver un élément t_0 de $]0,1[$ tel que $M_\varepsilon + t_0\,\|U-H\|_\infty < \|U\|_\infty$ (en effet $\lim\limits_{t\to 0}\big(M_\varepsilon + t\,\|U-H\|_\infty\big) = M_\varepsilon < \|U\|_\infty$).

Nous avons alors : $\forall x \in [-1,1]-\Omega_\varepsilon,\ |U_{t_0}(x)| < \|U\|_\infty$.

De plus : $\forall x \in \Omega_\varepsilon \cap [-1,1],\ |U_{t_0}(x)| \leqslant (1-t_0)\,\|U\|_\infty + t_0\,\varepsilon < (1-t_0)\,\|U\|_\infty + t_0\,\|U\|_\infty = \|U\|_\infty$.

Donc $\forall x \in [-1,1],\ |U_{t_0}(x)| < \|U\|_\infty$. Ainsi $\|U_{t_0}\|_\infty < \|U\|_\infty = \dfrac{1}{|T_p(a)|}$ ce qui donne une contradiction car U_{t_0} est un élément de $\mathbb{R}_p[X]$ qui prend la valeur 1 en a.

Ainsi U réalise son maximum $\dfrac{1}{|T_p(a)|}$ en x_0, x_1, ..., x_p. $\boxed{\bigstar\bigstar\bigstar}$

$$\boxed{\forall j \in [\![0,p]\!],\ \frac{1}{2}\left|P\left(\cos\left(\frac{j\,\pi}{p}\right)\right)+S_p\left(\cos\left(\frac{j\,\pi}{p}\right)\right)\right| = \frac{1}{|T_p(a)|}\cdot}$$

Soit j un élément de $[\![0,p]\!]$. $\dfrac{1}{|T_p(a)|} = \dfrac{1}{2}\Big|P(x_j)+S_p(x_j)\Big| \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(|P(x_j)|+|S_p(x_j)|\Big) \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{|T_p(a)|}+\dfrac{1}{|T_p(a)|}\Big) = \dfrac{1}{|T_p(a)|}\cdot$

Ceci exige $|P(x_j)+S_p(x_j)| = |P(x_j)|+|S_p(x_j)|$ et $|P(x_j)| = |S_p(x_j)| = \dfrac{1}{|T_p(a)|}\cdot$

Rappelons que si a et b sont deux réels, $|a+b| = |a|+|b|$ si et seulement si $ab \geqslant 0$.

Alors $|P(x_j)| = |S_p(x_j)|$ et $P(x_j)\,S_p(x_j) \geqslant 0$ donc $P(x_j) = S_p(x_j)$. Ainsi $(P-S_p)(x_j) = 0$.

$\forall j \in [\![0,p]\!],\ (P-S_p)(x_j) = 0$. $P-S_p$ est donc un élément de $\mathbb{R}_p[X]$ ayant au moins $p+1$ racines distinctes donc $P-S_p$ est le polynôme nul et :

$$\boxed{P = S_p}$$

$$\boxed{S_p \text{ est l'unique élément de } \mathcal{L}_p = \{Q \in \mathbb{R}_p[X] \mid Q(a) = 1\} \text{ qui réalise } \underset{Q\in\mathcal{L}_p}{\mathrm{Min}}\left(\underset{t\in[-1,1]}{\mathrm{Max}}|Q(t)|\right).}$$

Q3 Posons $\mathcal{L}'_p = \{Q \in \mathbb{R}_p[X] \mid Q(0) = 1\}$. On cherche à montrer que $\underset{Q\in\mathcal{L}'_p}{\mathrm{Min}}\left(\underset{t\in[\alpha,\beta]}{\mathrm{Max}}|Q(t)|\right)$ existe et que ce minimum est réalisé pour le seul élément $t \to \dfrac{T_p\left(\frac{2\,t-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right)}{T_p\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)}$ de $\mathcal{L}'_p$.

Nous allons pour ce faire utiliser Q2 en remarquant que $t \to \dfrac{2\,t-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}$ applique $[\alpha,\beta]$ sur $[-1,1]$.

posons $\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = \dfrac{2\,t-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\cdot$ u est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$.

Ainsi u est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Un calcul simple montre que $\forall t \in \mathbb{R},\ u^{-1}(t) = \dfrac{1}{2}\Big((\beta-\alpha)\,t+\alpha+\beta\Big)$.

u étant continue et croissante sur $[\alpha,\beta]$, $u([\alpha,\beta]) = [u(\alpha),u(\beta)] = [-1,1]$. Alors $u^{-1}([-1,1]) = [\alpha,\beta]$.

Posons alors $a = u(0) = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ et $\mathcal{L}_p = \{Q \in \mathbb{R}_p[X] \mid Q(a) = 1\}$.

$\alpha > -\alpha$ car α est strictement positif. Alors $\beta+\alpha > \beta-\alpha > 0$. Ceci donne $\dfrac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} > 1$. Ainsi $a = \dfrac{\beta+\alpha}{\alpha-\beta} < -1$.

Par conséquent $|a| > 1$. Q2 montre que $\underset{Q\in\mathcal{L}_p}{\mathrm{Min}}\left(\underset{t\in[-1,1]}{\mathrm{Max}}|Q(t)|\right)$ existe et vaut $\dfrac{1}{|T_p(a)|}\cdot$

De plus $S_p = \dfrac{T_p}{T_p(a)}$ est le seul élément de $\mathcal{L}_p$ qui réalise ce minimum.

Posons $\forall Q \in \mathcal{L}_p,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(Q)(t) = Q\big(u(t)\big)$ et $\forall Q \in \mathcal{L}'_p,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \psi(Q)(t) = Q\big(u^{-1}(t)\big)$.

Soit Q un élément de $\mathcal{L}_p$. Q appartient à $\mathbb{R}_p[X]$ et u est un élément de $\mathbb{R}_1[X]$ donc $\varphi(Q) = Q\circ u$ est clairement un élément de $\mathbb{R}_p[X]$. De plus $\varphi(Q)(0) = Q\big(u(0)\big) = Q(a) = 1$. Par conséquent $\varphi(Q)$ est un élément de $\mathcal{L}'_p$.

Ainsi φ est une application de $\mathcal{L}_p$ dans $\mathcal{L}'_p$. On montre de même que ψ est une application de $\mathcal{L}'_p$ dans $\mathcal{L}_p$.

$\forall Q \in \mathcal{L}_p,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \psi\big(\varphi(Q)\big)(t) = \big(\varphi(Q)\big)\big(u^{-1}(t)\big) = Q\Big(u\big(u^{-1}(t)\big)\Big) = Q(t)$. Ainsi $\forall Q \in \mathcal{L}_p,\ \psi\big(\varphi(Q)\big) = Q$.

Alors $\psi\circ\varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}_p}$. On montre de même que $\varphi\circ\psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}'_p}$.

φ (resp ψ) est alors une bijection de $\mathcal{L}_p$ (resp. $\mathcal{L}'_p$) sur $\mathcal{L}'_p$ (resp. $\mathcal{L}_p$) et $\varphi^{-1} = \psi$ (resp. $\psi^{-1} = \varphi$).

Rappelons que $u([\alpha,\beta]) = [-1,1]$. Donc $\forall Q \in \mathcal{L}_p,\ \underset{t\in[\alpha,\beta]}{\mathrm{Max}}|\varphi(Q)(t)| = \underset{t\in[\alpha,\beta]}{\mathrm{Max}}\big|Q\big(u(t)\big)\big| = \underset{x\in[-1,1]}{\mathrm{Max}}|Q(x)|$.

Comme $\underset{Q\in\mathcal{L}_p}{\text{Min}}\left(\underset{t\in[-1,1]}{\text{Max}}|Q(t)|\right)$ existe et vaut $\dfrac{1}{|T_p(a)|}$, $\underset{Q\in\mathcal{L}_p}{\text{Min}}\left(\underset{t\in[\alpha,\beta]}{\text{Max}}|\varphi(Q)(t)|\right)$ existe et vaut également $\dfrac{1}{|T_p(a)|}\cdot$

Or $\mathcal{L}'_p=\{\varphi(Q);Q\in\mathcal{L}_p\}$, donc $\underset{Q\in\mathcal{L}'_p}{\text{Min}}\left(\underset{t\in[\alpha,\beta]}{\text{Max}}|Q(t)|\right)$ existe et vaut $\dfrac{1}{|T_p(a)|}\cdot$

Supposons que Q soit un élément de $\mathcal{L}'_p$ qui réalise ce minimum. Rappelons que $u^{-1}([-1,1])=[\alpha,\beta]$.

$\dfrac{1}{|T_p(a)|}=\underset{t\in[\alpha,\beta]}{\text{Max}}|Q(t)|=\underset{x\in[-1,1]}{\text{Max}}|Q\big(u^{-1}(x)\big)|=\underset{x\in[-1,1]}{\text{Max}}|\psi(Q)(x)|.$

$\psi(Q)$ est un élément de $\mathcal{L}_p$ tel que $\underset{x\in[-1,1]}{\text{Max}}|\psi(Q)(x)|=\dfrac{1}{|T_p(a)|}\cdot$ Ainsi $\psi(Q)=S_p$. Donc $Q=\varphi(S_p)$.

$\forall t\in\mathbb{R},\ Q(t)=\varphi(S_p)(t)=S_p\big(u(t)\big)=\dfrac{T_p\big(u(t)\big)}{T_p(a)}=\dfrac{T_p\left(\frac{2\,t-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right)}{T_p\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)}\cdot$

$$\boxed{\begin{array}{l}\underset{Q\in\{P\in\mathbb{R}_p[X]\,|\,P(0)=1\}}{\text{Min}}\left(\underset{t\in[\alpha,\beta]}{\text{Max}}|Q(t)|\right)\text{ existe. Ce minimum est réalisé pour le seul élément } t\to\dfrac{T_p\left(\frac{2\,t-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right)}{T_p\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)}\text{ de}\\ \text{l'ensemble } \{P\in\mathbb{R}_p[X]\mid P(0)=1\}\text{ et il vaut }\dfrac{1}{\left|T_p\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)\right|}\cdot\end{array}}$$

Remarque *Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. Rappelons que :* $T_p=2^{p-1}\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}\left(X-\cos\left(\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2p}\right)\right)$.

Soit t un réel. $\dfrac{T_p\left(\frac{2\,t-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right)}{T_p\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)}=\dfrac{2^{p-1}\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}\left(\frac{2\,t-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}-\cos\left(\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2p}\right)\right)}{2^{p-1}\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\cos\left(\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2p}\right)\right)}=\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}\left(\frac{\frac{2\,t-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}-\cos\left(\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2p}\right)}{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\cos\left(\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2p}\right)}\right).$

$$\frac{T_p\left(\frac{2\,t-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right)}{T_p\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)}=\prod_{k=0}^{p-1}\left(\frac{-2\,t+\alpha+\beta-(\alpha-\beta)\,\cos\left(\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2p}\right)}{\alpha+\beta-(\alpha-\beta)\,\cos\left(\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2p}\right)}\right)=\prod_{k=0}^{p-1}\left(1-\frac{2}{\alpha+\beta-(\alpha-\beta)\,\cos\left(\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2p}\right)}\,t\right).$$

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\forall t\in\mathbb{R},\quad \frac{T_p\left(\frac{2\,t-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right)}{T_p\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)}=\prod_{k=0}^{p-1}\left(1-\frac{2}{\alpha+\beta+(\beta-\alpha)\,\cos\left(\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2p}\right)}\,t\right).}$$

PARTIE III : Résolution itérative d'un système $\mathbf{AX=B}$.

0 n'est pas valeur propre de A donc A est inversible. Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe un unique élément } X^* \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } AX^*=B\,;\ X^*=A^{-1}B.}$$

Q1 **a)** Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$.

$X_{p+1}-X^*=X_p+\alpha\,(B-AX_p)-X^*=\alpha\,(AX^*-AX_p)+(X_p-X^*)=-\alpha\,A(X_p-X^*)+(X_p-X^*)=(I-\alpha\,A)(X_p-X^*).$

Ainsi : $\forall p\in\mathbb{N},\ X_{p+1}-X^*=(I-\alpha\,A)(X_p-X^*)$.

Une récurrence simple donne alors $\forall p\in\mathbb{N},\ X_p-X^*=(I-\alpha\,A)^p(X_0-X^*)$.

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ X_p-X^*=(I-\alpha\,A)^p(X_0-X^*).}$$

b) A est symétrique et réelle donc A est diagonalisable. Mieux il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit la matrice diagonale $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\lambda_n\end{pmatrix}$.

$D=P^{-1}AP$ donc $A=PDP^{-1}$. Alors $I-\alpha\,A=I-\alpha\,PDP^{-1}=PIP^{-1}-\alpha\,PDP^{-1}=P(I-\alpha\,D)P^{-1}$.

Ainsi $I-\alpha\,A$ est semblable à $I-\alpha\,D=\begin{pmatrix}1-\alpha\,\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1-\alpha\,\lambda_n\end{pmatrix}$.

Alors les valeurs propres de $I-\alpha\,A$ sont les valeurs propres de la matrice diagonale $I-\alpha\,D$. Ainsi

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } I-\alpha\,A \text{ sont } 1-\alpha\,\lambda_1,\ 1-\alpha\,\lambda_2,\ ...,\ 1-\alpha\,\lambda_n.}$$

Posons $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \mu_i=1-\alpha\,\lambda_i$. $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ et $\alpha>0$ donc $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n$.

Alors $\forall i\in[\![1,n]\!],\ -|\mu_n|\leqslant\mu_n\leqslant\mu_i\leqslant\mu_1\leqslant|\mu_1|$. donc $\forall i\in[\![1,n]\!],\ -\operatorname{Max}(|\mu_1|,|\mu_n|)\leqslant\mu_i\leqslant\operatorname{Max}(|\mu_1|,|\mu_n|)$.

Ainsi $\forall i\in[\![1,n]\!],\ |\mu_i|\leqslant\operatorname{Max}(|\mu_1|,|\mu_n|)$. Par conséquent : $\rho(I-\alpha\,A)=\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\operatorname{Max}}|\mu_i|=\operatorname{Max}(|\mu_1|,|\mu_n|)$.

$$\boxed{\rho(I-\alpha\,A)=\operatorname{Max}(|1-\alpha\,\lambda_1|,|1-\alpha\,\lambda_n|).}$$

Précisons encore en supposant pour commencer que $\lambda_1<\lambda_n$.

$|1-\alpha\,\lambda_1|\leqslant|1-\alpha\,\lambda_n|\iff(1-\alpha\,\lambda_1)^2\leqslant(1-\alpha\,\lambda_n)^2\iff 1-2\,\alpha\,\lambda_1+\alpha^2\,\lambda_1^2\leqslant 1-2\,\alpha\,\lambda_n+\alpha^2\,\lambda_n^2$.

$|1-\alpha\,\lambda_1|\leqslant|1-\alpha\,\lambda_n|\iff 0\leqslant-2\alpha\,(\lambda_n-\lambda_1)+\alpha^2\,(\lambda_n+\lambda_1)(\lambda_n-\lambda_1)\iff 0\leqslant\alpha\,(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n+\lambda_1)\left(\alpha-\dfrac{2}{\lambda_1+\lambda_n}\right)\cdot$

Or $\alpha\,(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n+\lambda_1)$ est strictement positif donc $|1-\alpha\,\lambda_1|\leqslant|1-\alpha\,\lambda_n|\iff\alpha\geqslant\dfrac{2}{\lambda_1+\lambda_n}\cdot$

Ainsi $\rho(I-\alpha\,A)=|1-\alpha\,\lambda_n|$ si $\alpha\geqslant\dfrac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$ et $\rho(I-\alpha\,A)=|1-\alpha\,\lambda_1|$ si $\alpha\leqslant\dfrac{2}{\lambda_1+\lambda_n}\cdot$

Observons que $\dfrac{1}{\lambda_n}\leqslant\dfrac{2}{\lambda_n+\lambda_1}\leqslant\dfrac{1}{\lambda_1}$, que $|1-\alpha\,\lambda_1|=1-\alpha\,\lambda_1$ si $\alpha\leqslant\dfrac{1}{\lambda_1}$ et que $|1-\alpha\,\lambda_n|=\alpha\,\lambda_n-1$ si $\alpha\geqslant\dfrac{1}{\lambda_n}\cdot$

Alors $\rho(I-\alpha\,A)=1-\alpha\,\lambda_1$ si $\alpha\leqslant\dfrac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$ et $\rho(I-\alpha\,A)=\alpha\,\lambda_n-1$ si $\alpha\geqslant\dfrac{2}{\lambda_1+\lambda_n}\cdot$

Notons que ceci vaut encore pour $\lambda_1=\lambda_n$ car dans ce cas $\dfrac{2}{\lambda_1+\lambda_n}=\dfrac{1}{\lambda_1}$ et $\rho(I-\alpha\,A)=|1-\alpha\,\lambda_1|=|1-\alpha\,\lambda_n|$. Finalement :

$$\boxed{\rho(I-\alpha\,A)=\begin{cases}1-\alpha\,\lambda_1 & \text{si } \alpha\leqslant\dfrac{2}{\lambda_n+\lambda_1}\\[2mm] \alpha\,\lambda_n-1 & \text{si } \alpha\geqslant\dfrac{2}{\lambda_n+\lambda_1}\end{cases}.}$$

$f:t\to\rho(I-\alpha\,A)$ est donc affine et strictement décroissante sur $\left]0,\dfrac{2}{\lambda_n+\lambda_1}\right]$ et affine et strictement croissante sur $\left[\dfrac{2}{\lambda_n+\lambda_1},+\infty\right[$. Le tracé de la courbe représentative ne pose pas franchement de problème...

Notons que f possède un minimum sur $]0,+\infty[$ atteint en le seul point $\dfrac{2}{\lambda_n+\lambda_1}\cdot$

$f\left(\dfrac{2}{\lambda_n+\lambda_1}\right)=1-\dfrac{2}{\lambda_n+\lambda_1}\,\lambda_1=\dfrac{\lambda_n-\lambda_1}{\lambda_n+\lambda_1}$ donc le minimum de $f:t\to\rho(I-\alpha\,A)$ sur $]0,+\infty[$ est donc $\dfrac{\lambda_n-\lambda_1}{\lambda_n+\lambda_1}\cdot$

c) $\boxed{\bigstar}$ Si $X_0=X^*$, $\forall p\in\mathbb{N},\ X_p=X^*$. La suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge alors clairement vers X^* et ceci pour toute valeur de α. Il convient donc de reformuler la question. $\boxed{\bigstar}$

Montrons que la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers X^* **pour tout choix de $\mathbf{X_0}$** dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\alpha<\dfrac{2}{\lambda_n}\cdot$

Pour cela nous allons utiliser I Q3 b). Remarquons d'abord que $I-\alpha\,A$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Rappelons que $\forall p \in \mathbb{N},\ X_p - X^* = (I - \alpha\, A)^p (X_0 - X^*)$.

Par conséquent la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers X^* pour tout choix de X_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si la suite $\Big((I - \alpha\, A)^p (X_0 - X^*)\Big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ pour tout choix de X_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Or dire que suite $\Big((I - \alpha\, A)^p (X_0 - X^*)\Big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ pour tout choix de X_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ équivaut à dire que la suite $\Big((I - \alpha\, A)^p X\Big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ pour tout choix de X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après I Q3 b ceci équivaut à dire que $\rho(I - \alpha\, A) < 1$.

Ainsi la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers X^* pour tout choix de X_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\rho(I - \alpha\, A) < 1$.

Si $\alpha \in \left]0, \dfrac{2}{\lambda_n + \lambda_1}\right[$, $\rho(I - \alpha\, A) = f(\alpha) = 1 - \alpha\,\lambda_1 < 1$.

Si $\alpha \in \left[\dfrac{2}{\lambda_n + \lambda_1}, +\infty\right[: f(\alpha) = \rho(I - \alpha\, A) < 1 \iff \alpha\,\lambda_n - 1 < 1 \iff \alpha < \dfrac{2}{\lambda_n}\cdot$

En remarquant que $\dfrac{2}{\lambda_n + \lambda_1} < \dfrac{2}{\lambda_n}$ on peut dire que $\rho(I - \alpha\, A) < 1$ si et seulement si $\alpha < \dfrac{2}{\lambda_n}\cdot$ Finalement :

$$\boxed{\text{La suite } (X_p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } X^* \text{ pour tout choix de } X_0 \text{ dans } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \alpha < \dfrac{2}{\lambda_n}\cdot}$$

$I - \alpha\, A$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc, d'après I 3 a) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|(I - \alpha\, A)X\| \leqslant \rho(I - \alpha\, A)\,\|X\|$.

Alors $\forall p \in \mathbb{N},\ \|X_{p+1} - X^*\| = \|(I - \alpha\, A)(X_p - X^*)\| \leqslant \rho(I - \alpha\, A)\,\|X_p - X^*\|$.

Une récurrence simple donne $\forall p \in \mathbb{N},\ \|X_p - X^*\| \leqslant \big(\rho(I - \alpha\, A)\big)^p\,\|X_0 - X^*\|$. ($\clubsuit$)

Alors la convergence est d'autant plus "rapide" que $\rho(I - \alpha\, A)$ est "petit".

Ainsi la convergence est optimale si $\rho(I - \alpha\, A) = f(\alpha)$ est minimum donc si $\alpha = \dfrac{2}{\lambda_n + \lambda_1}$ comme nous l'avons vu plus haut.

Dans ce cas $\rho(I - \alpha\, A) = f(\alpha) = \dfrac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ \|X_p - X^*\| \leqslant \left(\dfrac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^p \|X_0 - X^*\|$.

$$\boxed{\text{La convergence est optimale si } \alpha = \dfrac{2}{\lambda_n + \lambda_1}\cdot \text{ Dans ce cas } \forall p \in \mathbb{N},\ \|X_p - X^*\| \leqslant \left(\dfrac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^p \|X_0 - X^*\|.}$$

$\boxed{\textit{Remarque}}$ *Notons que la majoration ($\clubsuit$) est la meilleure possible pour α fixé dans $\mathbb{R}^{+*}$ et X_0 quelconque.*

Nous allons le montrer en trouvant un X_0 qui transforme cette inégalité en une égalité.

Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$ tel que $|\mu_k| = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}}\,|\mu_i| = \rho(I - \alpha\, A)$ et Z un vecteur propre de $I - \alpha\, A$ associé à la valeur propre μ_k.

$(I - \alpha\, A)\, Z = \mu_k\, Z$. Une récurrence simple donne $\forall p \in \mathbb{N},\ (I - \alpha\, A)^p\, Z = \mu_k^p\, Z$.

Considérons la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par $X_0 = Z + X^*$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ X_{p+1} = X_p + \alpha\,(B - AX_p)$.

$\forall p \in \mathbb{N},\ X_p - X^* = (I - \alpha\, A)^p\,(X_0 - X^*) = (I - \alpha\, A)^p\, Z = \mu_k^p\, Z = \mu_k^p\,(X_0 - X^*)$.

Alors $\forall p \in \mathbb{N},\ \|X_p - X^*\| = \|\mu_k^p\,(X_0 - X^*)\| = |\mu_k^p|\,\|X_0 - X^*\| = |\mu_k|^p\,\|X_0 - X^*\| = \big(\rho(I - \alpha\, A)\big)^p\,\|X_0 - X^*\|$.

Alors $\forall p \in \mathbb{N},\ \|X_p - X^*\| = \big(\rho(I - \alpha\, A)\big)^p\,\|X_0 - X^*\|$ et ($\clubsuit$) est une égalité...

Cela rend également optimale la majoration obtenue juste plus haut.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ **a)** Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. Rappelons qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. $D = P^{-1}AP$ donc $A = PDP^{-1}$.

Alors $\forall i \in [\![0, p-1]\!],\ I - \alpha_i\, A = I - \alpha_i\, PDP^{-1} = PIP^{-1} - \alpha_i\, PDP^{-1} = P(I - \alpha_i\, D)P^{-1}$.

Ainsi $P_p(A) = (I - \alpha_0\, A)(I - \alpha_1\, A) \cdots (I - \alpha_{p-1}\, A) = P(I - \alpha_0\, D)P^{-1}P(I - \alpha_1\, D)P^{-1} \cdots P(I - \alpha_{p-1}\, D)P^{-1}$.

Donc $P_p(A) = P(I - \alpha_0\, D)(I - \alpha_1\, D) \cdots (I - \alpha_{p-1}\, D)P^{-1} = PP_p(D)P^{-1}$.

Par conséquent $P_p(A)$ est semblable à $P_p(D)$. Ces deux matrices ont alors les mêmes valeurs propres.

De plus comme D est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ il est aisé de montrer que $P_p(D)$ est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} P_p(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_p(\lambda_n) \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de $P_p(D)$ sont donc $P_p(\lambda_1)$, $P_p(\lambda_2)$, ..., $P_p(\lambda_n)$. Finalement :

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } P_p(A) \text{ sont } P_p(\lambda_1),\ P_p(\lambda_2),\ ...,\ P_p(\lambda_n).}$$

Posons $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \nu_i = P_p(\lambda_i)$. $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_1 \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_n$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ |\nu_i| = |P_p(\lambda_i)| \leqslant \underset{t \in [\lambda_1, \lambda_n]}{\text{Max}} |P_p(t)|$.

Par conséquent $\underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}} |\nu_i| \leqslant \underset{t \in [\lambda_1, \lambda_n]}{\text{Max}} |P_p(t)|$. Ainsi :

$$\boxed{\rho\big(P_p(A)\big) \leqslant \underset{t \in [\lambda_1, \lambda_n]}{\text{Max}} |P_p(t)|.}$$

b) Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$.

$X_{p+1} - X^* = X_p + \alpha_p\,(B - AX_p) - X^* = \alpha_p\,(AX^* - AX_p) + (X_p - X^*) = -\alpha_p\, A(X_p - X^*) + (X_p - X^*)$.

$X_{p+1} - X^* = (I - \alpha_p\, A)(X_p - X^*)$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ X_{p+1} - X^* = (I - \alpha_p\, A)(X_p - X^*)$. Une récurrence très simple montre alors que :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ X_p - X^* = P_p(A)(X_0 - X^*).}$$

Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. A est une matrice symétrique donc pour tout élément k de $\mathbb{N}$, A^k est une matrice symétrique.

Ainsi $P_p(A)$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme combinaison linéaire de matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors I Q3 a) permet de dire que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|P_p(A)X\| \leqslant \rho\big(P_p(A)\big)\, \|X\|$.

En particulier $\|P_p(A)(X_0 - X^*)\| \leqslant \rho\big(P_p(A)\big)\, \|X_0 - X^*\|$.

Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \|X_p - X^*\| = \|P_p(A)(X_0 - X^*)\| \leqslant \rho\big(P_p(A)\big)\, \|X_0 - X^*\| \leqslant \underset{t \in [\lambda_1, \lambda_n]}{\text{Max}} |P_p(t)|\, \|X_0 - X^*\|$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \|X_p - X^*\| \leqslant \underset{t \in [\lambda_1, \lambda_n]}{\text{Max}} |P_p(t)|\, \|X_0 - X^*\|.}$$

c) $\boxed{\bigstar}$ Nous supposerons dans la suite que $\lambda_1 < \lambda_n$ $\boxed{\bigstar}$

$\boxed{\text{Fixons } p \text{ dans } \mathbb{N}^*}$. Observons que P_p est un élément de $\mathbb{R}_p[X]$ tel que $P_p(0) = 1$.

En appliquant II Q3 nous pouvons dire que $\displaystyle \underset{Q\in\{P\in\mathbb{R}_p[X]\,|\,P(0)=1\}}{\text{Min}}\left(\underset{t\in[\lambda_1,\lambda_n]}{\text{Max}}|Q(t)|\right)$ existe et que ce minimum est réalisé pour le seul élément $H_p : t \to \dfrac{T_p\left(\frac{2\,t-\lambda_1-\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_1}\right)}{T_p\left(\frac{\lambda_1+\lambda_n}{\lambda_1-\lambda_n}\right)}\cdot$

Nous avons également montré que : $\displaystyle \forall t\in\mathbb{R}, H_p(t)=\prod_{k=0}^{p-1}\left(1-\frac{2}{\lambda_1+\lambda_n+(\lambda_n-\lambda_1)\,\cos\left(\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2p}\right)}\,t\right)$.

Observons que $\cos\left(\dfrac{(2\,k+1)\,\pi}{2p}\right)\geqslant -1$ et $\lambda_n-\lambda_1>0$.

Donc $\lambda_n+\lambda_1+(\lambda_n-\lambda_1)\,\cos\left(\dfrac{(2\,k+1)\,\pi}{2p}\right)\geqslant \lambda_n+\lambda_1-(\lambda_n-\lambda_1)=2\,\lambda_1>0$.

Dès lors en posant : $\forall k\in[\![0,p-1]\!],\ \alpha_k=\dfrac{2}{\lambda_1+\lambda_n+(\lambda_n-\lambda_1)\,\cos\left(\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2p}\right)}$ on a $\forall k\in[\![0,p-1]\!],\ \alpha_k>0$ et $P_p=H_p$.

Ainsi $\underset{t\in[\lambda_1,\lambda_n]}{\text{Max}}|P_p(t)|$ est minimum.

$$\boxed{\text{On rend } \underset{t\in[\lambda_1,\lambda_n]}{\text{Max}}|P_p(t)| \text{ minimum en posant} : \forall j\in[\![0,p-1]\!],\ \alpha_j=\dfrac{2}{\lambda_1+\lambda_n+(\lambda_n-\lambda_1)\,\cos\left(\frac{(2\,j+1)\,\pi}{2p}\right)}\cdot}$$

Supposons $\forall j\in[\![0,p-1]\!],\ \alpha_j=\dfrac{2}{\lambda_1+\lambda_n+(\lambda_n-\lambda_1)\,\cos\left(\frac{(2\,j+1)\,\pi}{2p}\right)}\cdot$

$\underset{t\in[\lambda_1,\lambda_n]}{\text{Max}}|P_p(t)|=\underset{t\in[\lambda_1,\lambda_n]}{\text{Max}}|H_p(t)|=\dfrac{1}{\left|T_p\left(\frac{\lambda_n+\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}\right)\right|}\cdot$ b) permet alors de dire que :

$$\boxed{\|X_p-X^*\|\leqslant\frac{1}{\left|T_p\left(\frac{\lambda_n+\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}\right)\right|}\,\|X_0-X^*\|.}$$

$\boxed{\bigstar\bigstar\bigstar}$ L'équivalent proposé est faux. Cherchons le bon ! ! $\boxed{\bigstar\bigstar\bigstar}$

Posons $x=\dfrac{\lambda_n+\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}\cdot$ Comme ici $\lambda_n>\lambda_1>0$, $\lambda_n+\lambda_1>\lambda_n-\lambda_1>0$. Ainsi x est un réel strictement supérieur à 1.

Nous allons calculer $T_p(x)$ pour tout élément p de $\mathbb{N}$.

Posons $\forall p\in\mathbb{N},\ u_p=T_p(x)$.

$u_0=T_0(x)=1$, $u_1=T_1(x)=x$ et $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ u_{p+1}=T_{p+1}(x)=2\,x\,T_p(x)-T_{p-1}(x)=2\,x\,u_p-u_{p-1}$.

$(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite définie par une récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $z\in\mathbb{C}$ et $z^2-2\,x\,z+1=0$.

Cette équation admet deux racines réelles distinctes $x+\sqrt{x^2-1}$ et $x-\sqrt{x^2-1}$.

Alors il existe deux réels γ et δ tels que : $\forall p\in\mathbb{N},\ u_p=\gamma\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^p+\delta\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^p$.

$1=u_0=\gamma+\delta$ et $x=u_1=\gamma\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\delta\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=(\gamma+\delta)\,x+(\gamma-\delta)\sqrt{x^2-1}=x+(\gamma-\delta)\sqrt{x^2-1}$.

Alors $\gamma+\delta=1$ et $(\gamma-\delta)\sqrt{x^2-1}=0$. Comme $\sqrt{x^2-1}$ n'est pas nul : $\gamma+\delta=1$ et $\gamma-\delta=0$. Ainsi $\gamma=\delta=\dfrac{1}{2}\cdot$

$\forall p\in\mathbb{N},\ T_p(x)=u_p=\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^p+\dfrac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^p$.

$\boxed{\textit{Remarque}}$ *En fait pour tout réel x tel que $|x|>1$ on a encore $\forall p\in\mathbb{N},\ T_p(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^p+\dfrac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^p$... et même pour $|x|=1$. A titre d'exercice on pourra traiter le cas où $|x|<1$.*

$0 < x - \sqrt{x^2-1} < x + \sqrt{x^2-1}$ donc $0 < \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} < 1$. Alors $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(1+\left(\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^p\right) = 1$.

Or $\forall p \in \mathbb{N},\ u_p = \dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^p \left(1+\left(\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^p\right)$. Ainsi $u_p \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^p$.

$x = \dfrac{\lambda_n+\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}$ donc $x^2-1 = \left(\dfrac{\lambda_n+\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}\right)^2 - 1 = \dfrac{(\lambda_n+\lambda_1)^2-(\lambda_n-\lambda_1)^2}{(\lambda_n-\lambda_1)^2} = \dfrac{4\,\lambda_n\,\lambda_1}{(\lambda_n-\lambda_1)^2}$.

Alors $x+\sqrt{x^2-1} = \dfrac{\lambda_n+\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1} + \dfrac{2\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_n-\lambda_1} = \dfrac{\left(\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\lambda_1}\right)^2}{\lambda_n-\lambda_1} = \dfrac{\left(\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\lambda_1}\right)^2}{\left(\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\lambda_1}\right)\left(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_1}\right)} = \dfrac{\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_1}}$.

Alors $u_p \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_1}}\right)^p$. Par conséquent :

$$\boxed{T_p\left(\frac{\lambda_n+\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_1}}\right)^p \text{ et } \left|T_p\left(\frac{\lambda_n+\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}\right)\right| \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_1}}\right)^p.}$$

Notons que $\dfrac{1}{\left|T_p\left(\frac{\lambda_n+\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}\right)\right|} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\lambda_1}}\right)^p$.

Dans Q1 un bon choix de α donne : $\forall p \in \mathbb{N},\ \|X_p - X^*\| \leqslant \left(\dfrac{\lambda_n-\lambda_1}{\lambda_n+\lambda_1}\right)^p \|X_0 - X^*\|$.

Dans Q2, pour p fixé dans $\mathbb{N}^*$ un bon choix de α_1, α_2, ..., α_{p-1} donne : $\|X_p - X^*\| \leqslant \dfrac{1}{\left|T_p\left(\frac{\lambda_n+\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}\right)\right|}\|X_0 - X^*\|$.

Comparons donc les suites de termes généraux $\dfrac{1}{\left|T_p\left(\frac{\lambda_n+\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}\right)\right|}$ et $\left(\dfrac{\lambda_n-\lambda_1}{\lambda_n+\lambda_1}\right)^p$ ou les suites de termes généraux et $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\lambda_1}}\right)^p$ et $\left(\dfrac{\lambda_n-\lambda_1}{\lambda_n+\lambda_1}\right)^p$ car $\dfrac{1}{\left|T_p\left(\frac{\lambda_n+\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}\right)\right|} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\lambda_1}}\right)^p$.

$$\left|\frac{\frac{\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\lambda_1}}}{\frac{\lambda_n-\lambda_1}{\lambda_n+\lambda_1}}\right| = \frac{(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_1})(\lambda_n+\lambda_1)}{(\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\lambda_1})(\lambda_n-\lambda_1)} = \frac{\lambda_n+\lambda_1}{(\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\lambda_1})^2} = \frac{\lambda_n+\lambda_1}{\lambda_n+\lambda_1+2\sqrt{\lambda_n\,\lambda_1}} = 1 - \frac{2\sqrt{\lambda_n\,\lambda_1}}{\lambda_n+\lambda_1+2\sqrt{\lambda_n\,\lambda_1}} < 1.$$

Ainsi $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\dfrac{\frac{\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\lambda_1}}}{\frac{\lambda_n-\lambda_1}{\lambda_n+\lambda_1}}\right)^p = 0$. Alors $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\lambda_1}}\right)^p}{\left(\frac{\lambda_n-\lambda_1}{\lambda_n+\lambda_1}\right)^p} = 0$.

La suite de terme général $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\lambda_1}}\right)^p$ est négligeable devant la suite de terme général $\left(\dfrac{\lambda_n-\lambda_1}{\lambda_n+\lambda_1}\right)^p$ donc la suite de terme général $\dfrac{1}{\left|T_p\left(\frac{\lambda_n+\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}\right)\right|}$ est négligeable devant la suite de terme général $\left(\dfrac{\lambda_n-\lambda_1}{\lambda_n+\lambda_1}\right)^p$.

La méthode itérative optimale développée dans cette question laisse donc espérer une convergence plus rapide que la méthode itérative optimale à α constant développée dans la question 1.

Je propose de modifier le texte de la manière suivante.

• On fait passer la partie III en partie IV en donnant le bon équivalent (et une petite indication pour l'obtenir).

• On supprime II Q2 c) et on supprime le mot unique dans Q3. On crée alors une partie III montrant l'unicité dans le problème de minimisation (que l'on peut rendre facultative pour les élèves qui ont des difficultés).

Cette partie III pourrait être la suivante.

PARTIE III : De l'unicité dans le problème de minimisation

Dans cette partie p est un élément de $\mathbb{N}^*$. On pose $\forall j \in [\![0,p]\!],\ x_j = \cos\left(\dfrac{j\,\pi}{p}\right)$.

Dans la suite si f est une fonction numérique continue sur $[-1,1]$, on note $\|f\|_\infty$ le réel $\underset{x\in[-1,1]}{\mathrm{Sup}} |f(x)| = \underset{x\in[-1,1]}{\mathrm{Max}} |f(x)|$.

On se propose de montrer que S_p est le seul élément de $\mathbb{R}_p[X]$ qui prend la valeur 1 en a et qui vérifie $\|S_p\|_\infty = \dfrac{1}{|T_p(a)|}\cdot$

On considère alors un élément P de $\mathbb{R}_p[X]$ qui prend la valeur 1 en a et qui vérifie $\|P\|_\infty = \dfrac{1}{|T_p(a)|}\cdot$

Q1 Montrer que $U = \dfrac{1}{2}\left(P + S_p\right)$ a les mêmes qualités que P.

Q2 Soit b un élément de $[-1,1]$.

a) Montrer que $|S_p(b)| = \dfrac{1}{|T_p(a)|}$ si et seulement il existe un élément j de $[\![0,p]\!]$ tel que : $b = x_j$.

b) Montrer que si $|U(b)| = \dfrac{1}{|T_p(a)|}$ alors il existe un élément j_0 de $[\![0,p]\!]$ tel que : $b = x_{j_0}$.

Q3 Ici on veut montrer que $\forall j \in [\![0,p]\!],\ |U(x_j)| = \dfrac{1}{|T_p(a)|}\cdot$ D'après ce qui précède il suffit de montrer que $|U|$ réalise son maximum sur $[-1,1]$ en au moins $p+1$ points de $[-1,1]$ (qui seront nécessairement x_0, x_1, ..., x_p).

On raisonne par l'absurde et on suppose que $|U|$ réalise son maximum sur $[-1,1]$ en exactement k points a_1, a_2, ..., a_k de $[-1,1]$ avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ et $1 \leqslant k \leqslant p$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme H de degré au plus k tel que $H(a_1) = H(a_2) = \cdots = H(a_k) = 0$ et $H(a) = 1$. H est ainsi un élément de $\mathbb{R}_p[X]$ qui prend la valeur 1 en a.

b) Soit ε un réel strictement positif et strictement inférieur à $\|U\|_\infty$.

Montrer qu'il existe un réel α strictement positif tel que : $\forall i \in [\![1,k]\!],\ \forall x \in [-1,1] \cap]a_i - \alpha, a_i + \alpha[, |H(x)| < \varepsilon$.

On pose : $\Omega_\varepsilon = \displaystyle\bigcup_{i\in[\![1,k]\!]}]a_i - \alpha, a_i + \alpha[$. Ω_ε est un ouvert de $\mathbb{R}$.

c) Soit t un élément de $]0,1[$. On pose $U_t = (1-t)\,U + t\,H$.

Montrer que $|U|$ possède un maximum sur $[-1,1] - \Omega_\varepsilon$, que nous noterons M_ε, et que ce maximum est strictement inférieur à $\|U\|_\infty$.

Montrer que $\forall x \in \Omega_\varepsilon \cap [-1,1],\ |U_t(x)| < \|U\|_\infty$ et que $\forall x \in [-1,1] - \Omega_\varepsilon,\ |U_t(x)| \leqslant M_\varepsilon + t\,\|H - U\|_\infty$.

d) Montrer que l'on peut trouver t_0 dans $]0,1[$ tel que $\|U_{t_0}\| < \|U\|_\infty$ et en déduire une contradiction.

Q4 Dès lors $\forall j \in [\![0,p]\!], |U(x_j)| = \dfrac{1}{|T_p(a)|}\cdot$ Montrer que $\forall j \in [\![0,p]\!], (P - S_p)(x_j) = 0$ et en déduire que $P = S_p$.

Q5 Que dire du polynôme de II Q3 ?
