ESSEC 2012

J.F. COSSUTTA   Ex lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR .

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

Commençons par quelques remarques et quelques évidences avec quelques preuves pour faciliter le passage entre applications linéaires et matrices...

R-1 Dans la suite nous noterons $< .,. >_n$ ($< .,. >_m$) le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$) et $\|.\|_n$ (resp. $\|.\|_m$) la norme associée.

R0 Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, comme le texte nous le propose on posera :

$$\boxed{\operatorname{Ker} M = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}\}.}$$

$$\boxed{\operatorname{Im} M = \{Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ Y = MX\} = \{MX\,;\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}.}$$

R1 Soit f une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et M sa matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}_n$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et à la base canonique $\mathcal{B}_m$ de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$\boxed{M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$ $\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = MX}$ $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} M}$ $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} M}$

f est une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, $\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n$ et $\dim \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) = m$. Donc M est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Notons que la matrice d'un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans la base canonique $\mathcal{B}_n$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est X ! De même la matrice d'un élément Y de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ dans la base canonique $\mathcal{B}_m$ de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ est Y.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La matrice de X dans $\mathcal{B}_n$ est X donc la matrice de $f(X)$ dans la base $\mathcal{B}_m$ est MX. Mais la matrice de $f(X)$ dans $\mathcal{B}_m$ est également $f(X)$. Alors $f(X) = MX$.

$\operatorname{Ker} f = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid f(X) = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}\}$ donc $\operatorname{Ker} f = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}\}$. Ainsi $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} M$.

$\operatorname{Im} f = \{f(X)\,;\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ donc. $\operatorname{Im} f = \{MX\,;\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$. Ainsi $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} M$.

R1' Soit f un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et M sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_n$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$\boxed{M \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{R})}$ $\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = MX}$ $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} M}$ $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} M}$

Il suffit de faire $m = n$ dans R1.

R2 M est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On pose $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ g(X) = MX$. Alors :

- g une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.
- M est sa matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}_n$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et à la base canonique $\mathcal{B}_m$ de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.
- $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} M$ et $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} M$.
- $\operatorname{Ker} M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{Im} M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.
- $\operatorname{rg} M = \dim \operatorname{Im} M$.

• $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ g(X) = MX \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. g est une application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ g(\lambda X + X') = M(\lambda X + X') = \lambda MX + MX' = \lambda g(X) + g(X')$. Alors g est linéaire.

Finalement g est une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

• Soit G la matrices de g relativement aux bases $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_m$. D'après $\boxed{\text{R1}}$: $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ g(X) = GX$.

Donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ MX = g(X) = GX$.

Posons $\mathcal{B}_n = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$. $\forall i \in [\![1, n]\!],\ ME_i = GE_i$. Donc pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, la $i^{\text{ème}}$ colonne de M est égale ̀la $i^{\text{ème}}$ colonne de G. Ainsi $M = G$.

• M étant la matrice de g relativement aux bases $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_m$ il résulte de $\boxed{\text{R1}}$ que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} M$ et $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} M$.

• Le cours indique que $\operatorname{Ker} g$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\operatorname{Ker} M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

De même $\operatorname{Im} g$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ donc $\operatorname{Im} M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

• $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} g = \dim \operatorname{Im} g = \dim \operatorname{Im} M$. Ainsi $\operatorname{rg} M = \dim \operatorname{Im} M$.

R3 M et M' sont deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. $M = M'$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ MX = M'X$.

Posons $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ g(X) = MX$ et $g'(X) = M'X$.

M (resp. M') est la matrice de g (resp. g') relativement aux bases $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_m$. Ainsi :

$M = M' \iff g = g' \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ g(X) = g'(X) \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ MX = M'X$.

R3' M est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

La matrice M est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ MX = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}$.

Il suffit de faire $M' = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$ dans $\boxed{\text{R3}}$.

R4 **Théorème du rang**. M est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} M + \dim \operatorname{Im} M = n} \text{ ou } \boxed{\dim \operatorname{Ker} M + \operatorname{rg} M = n.}$$

Posons $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ g(X) = MX$.

D'après $\boxed{\text{R2}}$, g est une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ telle que : $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} M = \operatorname{Im} g$.

D'après le théorème du rang du programme (!) : $\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Ker} g + \operatorname{rg} g$.

Alors $n = \dim \operatorname{Ker} g + \operatorname{rg} g = \dim \operatorname{Ker} M + \operatorname{rg} M$.

On a aussi $n = \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} g = \dim \operatorname{Ker} M + \dim \operatorname{Im} M$.

R5 M est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. $\boxed{\operatorname{rg} {}^tM = \operatorname{rg} M}$.

Résultat gracieusement admis par l'énoncé...

R6 F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. p est la projection orthogonale sur F et P est sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ p(X) = PX$.
- $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} P = F^{\perp}$; en particulier $\forall X \in F^{\perp},\ PX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.
- $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} P = F$.
- $\operatorname{Ker}\left(p - \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right) = \operatorname{Ker}(P - I_n) = F$; en particulier $\forall X \in F,\ PX = X$.

Rappelons que $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}\left(p - \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right)$ et $F^\perp = \operatorname{Ker} p$.

Notons que P et $I_n - P$ sont les matrices de p et $p - \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ dans la base $\mathcal{B}_n$.

$\boxed{\text{R1'}}$ donne alors les résultats des quatre points, non ?

$\boxed{\textbf{R7}}$ **"Théorème de meilleure approximation".**

F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E et x est un élément de E.

1. $\underset{z \in F}{\operatorname{Min}} \|x - z\|$ existe.
2. La projection orthogonale de x sur F est l'unique élément de F qui réalise ce minimum.

Ceci est un résultat de cours.

$\boxed{\textbf{R8}}$ **Méthode des moindres carrés.**

A est un élément de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. On suppose que $\boxed{\text{le rang de } A \text{ est } n}$.

$\|.\|_m$ est la norme de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique.

1. ${}^tAA$ est inversible.
2. $\underset{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}{\operatorname{Min}} \|AX - B\|_m$ existe.
3. Il existe un unique élément X_0 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AX_0 - B\|_m = \underset{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}{\operatorname{Min}} \|AX - B\|_m$.
4. $X_0 = ({}^tAA)^{-1}({}^tAB)$ ou ${}^tAAX_0 = {}^tAB$.

Ceci est un résultat de cours.

Question préliminaire.

---

1) Soit p la projection orthogonale sur F. P est sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$(U_1, U_2, \dots, U_k)$ est une base orthonormée de F donc le cours indique que $p(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} < U_i, X >_n U_i$.

Alors d'après $\boxed{\text{R1'}}$: $PX = p(X) = \sum_{i=1}^{k} < U_i, X >_n U_i = \sum_{i=1}^{k} ({}^tU_iX)\, U_i$.

Observons que, pour tout élément i de $[\![1, k]\!]$, ${}^tU_iX$ est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ que l'on assimile à un réel.

Donc, pour tout élément i de $[\![1, k]\!]$, $({}^tU_iX)\, U_i = U_i\, ({}^tU_iX)$. Alors :

$PX = \sum_{i=1}^{k} U_i({}^tU_iX) = \sum_{i=1}^{k} (U_i{}^tU_i)X = \left(\sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i\right) X$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ PX = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i\right) X$. $\boxed{\text{R3}}$ donne alors $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i$.

Ainsi : ${}^tP = {}^t\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} {}^t\left(U_i{}^tU_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} {}^t({}^tU_i){}^tU_i = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i = P$. Donc ${}^tP = P$.

Alors P est symétrique (normal pour la matrice d'une projection orthogonale dans une base orthnormée).

$$\boxed{P = \sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i \text{ et } P \text{ est une matrice symétrique.}}$$

Partie I - Décomposition spectrale de la matrice $^t\mathbf{AA}$ associée à une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(\mathbb{R})$.

2) (a) A est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ donc ^tA est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Alors ^tAA est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{{}^tAA \text{ est une matrice carrée d'ordre } n \text{ à coefficients réels.}}$$

Soit X un élément de $\operatorname{Ker} A$. $AX = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}$ donc $^tAAX = {}^tA\,0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ainsi X appartient à $\operatorname{Ker}{}^tAA$.

Finalement $\forall X \in \operatorname{Ker} A, X \in \operatorname{Ker}{}^tAA$. Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker}{}^tAA.}$$

(b) Soit X un élément de $\operatorname{Ker}{}^tAA$.

$^tAAX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $\|AX\|_m^2 = {}^t(AX)AX = {}^tX{}^tAAX = {}^tX0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0$. Donc $\|AX\|_m^2 = 0$ et : $\|AX\|_m = 0$.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ appartient à } \operatorname{Ker}{}^tAA \text{ alors } \|AX\|_m = 0.}$$

Soit X un élément de $\operatorname{Ker}{}^tAA$. Alors $\|AX\|_m = 0$. Ceci donne $AX = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}$ et permet de dire que X est dans $\operatorname{Ker} A$.

Donc $\forall X \in \operatorname{Ker}{}^tAA,\ X \in \operatorname{Ker} A$ et ainsi $\operatorname{Ker}{}^tAA \subset \operatorname{Ker} A$. Or **(a)** a donné $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker}{}^tAA$. Alors :

$$\boxed{\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}{}^tAA.}$$

D'après $\boxed{\text{R3'}}$ $A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \Longleftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}$. Donc $A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

De même $^tAA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}{}^tAA = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Or $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}{}^tAA$. Ainsi :

$A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}{}^tAA = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow {}^tAA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

> A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ si et seulement si ^tAA est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc A et ^tAA sont nulles simultanément.

(c) Soit Y un élément de $\operatorname{Im}{}^tAA$. Il existe un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = {}^tAAX$.

Posons $Z = AX$. Z appartient à $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et $Y = {}^tAZ$ donc Y appartient à $\operatorname{Im}{}^tA$.

$\forall Y \in \operatorname{Im}{}^tAA,\ Y \in \operatorname{Im}{}^tA$ donc $\operatorname{Im}{}^tAA \subset \operatorname{Im}{}^tA$.

Dès lors pour montrer que $\operatorname{Im}{}^tAA = \operatorname{Im}{}^tA$ il suffit de montrer que $\dim \operatorname{Im}{}^tAA = \dim \operatorname{Im}{}^tA$ car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

A est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et ^tAA est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{R4}}$ donne alors $\dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rg} A = n$ et $\dim \operatorname{Ker}{}^tAA + \operatorname{rg}{}^tAA = n$ (théorème du rang).

Or $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}{}^tAA$ donc $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker}{}^tAA$. Ainsi $\operatorname{rg} A = n - \dim \operatorname{Ker} A = n - \dim \operatorname{Ker}{}^tAA = \operatorname{rg}{}^tAA$.

Par conséquent $\text{rg}\, A = \text{rg}\, {}^tAA$. Or $\text{rg}\, {}^tA = \text{rg}\, A$ ($\boxed{\text{R5}}$) donc $\text{rg}\, {}^tA = \text{rg}\, {}^tAA$.

Alors $\dim \text{Im}\, {}^tA = \text{rg}\, {}^tA = \text{rg}\, {}^tAA = \dim \text{Im}\, {}^tAA$. Ainsi $\dim \text{Im}\, {}^tA = \dim \text{Im}\, {}^tAA$.

Ceci achève de monter que :

$$\boxed{\text{Im}\, {}^tA = \text{Im}\, {}^tAA.}$$

3) (a) ${}^tAA$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^t({}^tAA) = {}^tA\, {}^t({}^tA) = {}^tAA$.

Donc ${}^tAA$ est une matrice symétrique d'ordre n à coefficients réels. Ainsi :

$$\boxed{{}^tAA \text{ est diagonalisable.}}$$

Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$. λ est un réel car ${}^tAA$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit X un vecteur propre de ${}^tAA$ associé à la valeur propre λ.

X est un élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAX = \lambda\, X$.

Nous avons vu plus haut que $\|AX\|_m^2 = {}^tX{}^tAAX$. Alors $\|AX\|_m^2 = {}^tX\,(\lambda X) = \lambda\, {}^tXX = \lambda \|X\|_n^2$.

X n'est pas nul donc $\|X\|_n^2$ est strictement positif. Alors $\lambda = \dfrac{\|AX\|_m^2}{\|X\|_n^2}\cdot$ Plus de doute, λ est un réel positif ou nul.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } {}^tAA \text{ sont des réels positifs ou nuls.}}$$

(b) Soient i et j deux éléments distincts de $[\![1,p]\!]$.

Rappelons que les sous-espaces propres de la matrice symétrique ${}^tAA$ sont deux à deux orthogonaux.

Ainsi $E_{\lambda_i}({}^tAA)$ et $E_{\lambda_j}({}^tAA)$ sont orthogonaux donc $E_{\lambda_j}({}^tAA) \subset \Big(E_{\lambda_i}({}^tAA)\Big)^\perp$.

D'après $\boxed{\text{R6}}$: $\text{Im}\, Pj = E_{\lambda_j}({}^tAA)$ et $\text{Ker}\, P_i = \Big(E_{\lambda_i}({}^tAA)\Big)^\perp$. Donc $\text{Im}\, P_j \subset \text{Ker}\, P_i$.

Or $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ P_jX \in \text{Im}\, P_j$. Ainsi $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ P_jX \in \text{Ker}\, P_i$.

Ceci qui donne $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ P_iP_jX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $\boxed{\text{R3'}}$ nous autorise à dire que $P_iP_j = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Si } i \text{ et } j \text{ sont deux éléments distincts de } [\![1,p]\!],\ P_i\, P_j = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.}$$

Rappelons que pour tout élément i de $[\![1,p]\!]$, P_i est la matrice d'une projection donc $P_i^2 = P_i$. Alors :

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ P_i\, P_j = \begin{cases} P_i & \text{si } i = j \\ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} & \text{sinon} \end{cases}.}$$

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\exists\,!\,(X_1, X_2, \ldots, X_p) \in E_{\lambda_1}({}^tAA) \times E_{\lambda_2}({}^tAA) \times \cdots \times E_{\lambda_p}({}^tAA),\ X = \sum\limits_{j=1}^{p} X_j$ car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus\limits_{j=1}^{p} E_{\lambda_j}({}^tAA)$ puisque ${}^tAA$ est diagonalisable.

Soit i un élément de $[\![1,p]\!]$. $P_iX = \sum\limits_{j=1}^{p} P_iX_j$. Soit j un élément de $[\![1,p]\!]$.

Si $j = i$, $X_j = X_i \in E_{\lambda_i}({}^tAA) = \text{Ker}(P_i - I_n)$ d'après $\boxed{\text{R6}}$, donc $P_iX_j = P_iX_i = X_i$.

Supposons $j \neq i$.

$X_j \in E_{\lambda_j}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(P_j - I_n)$ d'après $\boxed{\text{R6}}$, donc $P_jX_j = X_j$ ou $X_j = P_jX_j$.

Alors $P_iX_j = P_iP_jX_j = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}X_j = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Finalement $P_iX_j = \begin{cases} X_i & \text{si } j = i \\ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} & \text{si } j \neq i \end{cases}$. Alors $P_iX = \sum\limits_{j=1}^{p} P_iX_j = X_i$ et ceci pour tout i dans $[\![1,p]\!]$.

Donc $\left(\sum\limits_{i=1}^{p} P_i\right) X = \sum\limits_{i=1}^{p} P_iX = \sum\limits_{i=1}^{p} X_i = X$.

Ainsi : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left(\sum\limits_{i=1}^{p} P_i\right) X = I_nX$. $\boxed{\text{R3}}$ donne alors :

$$\boxed{I_n = \sum_{i=1}^{p} P_i.}$$

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\exists!\,(X_1, X_2, \ldots, X_p) \in E_{\lambda_1}({}^tAA) \times E_{\lambda_2}({}^tAA) \times \cdots \times E_{\lambda_p}({}^tAA),\ X = \sum\limits_{i=1}^{p} X_i$.

$\forall i \in [\![1,p]\!],\ X_i \in E_{\lambda_i}({}^tAA)$ donc $\forall i \in [\![1,p]\!],\ {}^tAAX_i = \lambda_i X_i$. Rappelons que $\forall i \in [\![1,p]\!],\ P_iX = X_i$. Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i\right) X = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_iX = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i = \sum_{i=1}^{p} {}^tAA\, X_i = {}^tAA \left(\sum_{i=1}^{p} X_i\right) = {}^tAAX.$$

Ainsi : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left(\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i P_i\right) X = {}^tAAX$. $\boxed{\text{R3}}$ donne alors :

$$\boxed{{}^tAA = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i.}$$

4) (a) ${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Soit λ un réel et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$${}^tAAX = \lambda X \iff \begin{cases} 3x - 3y = \lambda x \\ -3x + 3y = \lambda y \\ 6z = \lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 3y = \lambda x \\ \lambda (x + y) = 0 \\ (\lambda - 6)\, z = 0 \end{cases}.$$

$\boxed{\textit{Version 1}}$

- Supposons que $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 6$.

${}^tAAX = \lambda X \iff \begin{cases} 3x - 3y = \lambda x \\ x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ (3 + 3 - \lambda)\, x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$. λ n'est pas valeur propre de ${}^tAA$.

- Si $\lambda = 0$: ${}^tAAX = \lambda X \iff \begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$. Alors 0 est valeur propre de ${}^tAA$ et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Si $\lambda = 6$, ${}^tAAX = \lambda X \iff \begin{cases} 3x - 3y = 6\, x \\ x + y = 0 \end{cases} \iff y = -x$.

Alors 6 est valeur propre de ${}^tAA$ et le sous-espace propre associé est l'hyperplan (donc le plan) d'équation $x + y = 0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Notons que $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de ce sous-espace propre.

$\boxed{\textit{Version 2}}$

Si $\lambda=6$, ${}^tAAX=\lambda\,X \iff \begin{cases}3x-3y=6\,x\\ x+y=0\end{cases} \iff y=-x.$

Alors 6 est valeur propre de ${}^tAA$ et le sous-espace propre associé est le plan vectoriel d'équation $x+y=0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Comme ${}^tAA$ est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ${}^tAA$ possède une seconde valeur propre α, et pas plus. De plus $E_6({}^tAA)$ et $E_\alpha({}^tAA)$ sont supplémentaires et orthogonaux. $E_6({}^tAA)$ étant l'hyperplan d'équation $x+y=0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est orthonormée, $E_\alpha({}^tAA)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Comme ${}^tAA\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3&0\\-3&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ alors $\alpha=0$. Nous avons ainsi retrouvé les résultats de la version précédente.

Résumons le tout.

$$\boxed{{}^tAA=\{0,6\}.\ E_0({}^tAA)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\text{ et }E_6({}^tAA)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).}$$

Notons qu'ici $p=2$, $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=6$. Déterminons P_1 et P_2.

$\boxed{\textit{Version 1}}$ Sans ruse !

- Posons $V_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $U_1=\dfrac{1}{\|V_1\|}\,V_1$. $U_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\\ 0\end{pmatrix}$.

(V_1) est une base de $E_0({}^tAA)$. Donc (U_1) est une base orthonormée de $E_0({}^tAA)$.

Alors d'après **Q1**, $P_1=U_1{}^tU_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&1/2&0\\1/2&1/2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

La matrice, dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, de la projection orthogonale sur $E_0({}^tAA)$ est $\boxed{P_1=\begin{pmatrix}1/2&1/2&0\\1/2&1/2&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$.

Posons $V_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $V_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $U_2=\dfrac{1}{\|V_2\|}\,V_2$ et $U_3=\dfrac{1}{\|V_3\|}\,V_3$. $U_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\\ 0\end{pmatrix}$ et $U_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

(V_2,V_3) est une base de $E_6({}^tAA)$. Mieux c'est une base orthogonale de $E_6({}^tAA)$.

Alors (U_2,U_3) est une base orthonormée de $E_6({}^tAA)$.

Ainsi $P_2=U_2{}^tU_2+U_3{}^tU_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&-1/2&0\\-1/2&1/2&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Finalement $P_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice, dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, de la projection orthogonale sur $E_6({}^tAA)$ est $\boxed{P_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

$\boxed{\textit{Version 2}}$ Avec ruse ! $I_3 = P_1 + P_2$ et ${}^tAA = 0\,P_1 + 6\,P_2$. Ainsi $P_2 = \dfrac{1}{6}\,{}^tAA$ et $P_1 = I_3 - \dfrac{1}{6}\,{}^tAA$.

Ceci qui redonne immédiatement $P_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La décomposition spectrale de ${}^tAA$ est : $0\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Rappelons que que A^tA est assimilable à un réel car $A^tA \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ puisque $A \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

$({}^tAA)^2 - (A^tA)^tAA = {}^tAA^tAA - (A^tA)^tAA = {}^tA(A^tA)A - (A^tA)^tAA$.

Or A^tA est un réel donc $({}^tAA)^2 - (A^tA)^tAA = (A^tA)^tAA - (A^tA)^tAA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Ainsi :

$X^2 - (A^tA)\,X$ est un polynôme annulateur de ${}^tAA$.

Les zéros du polynômes $X^2 - (A^tA)\,X$ sont 0 et A^tA. Donc le spectre de ${}^tAA$ est contenu dans $\{0, A^tA\}$.

1^er^ cas $n = 1$. Alors ${}^tAA$ est la matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ égale à (a_1^2). Alors a_1^2 est la seule valeur propre de ${}^tAA$.

Ici $p = 1$, $\lambda_1 = a_1^2 = A^tA$ et $P_1 = I_1$.

Si $n = 1$, $\mathrm{Sp}\,{}^tAA = \{a_1^2\} = \{A^tA\}$. La décomposition spectrale de ${}^tAA$ est ${}^tAA = (A^tA)\,I_1$!

2ième cas $n > 1$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons que $AX \in \mathbb{R}$. Alors : ${}^tAAX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff (AX)\,{}^tA = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

or ${}^tA \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc ${}^tAAX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff AX = 0 \iff {}^t({}^tA)X = 0 \iff < {}^tA, X >_n = 0 \iff X \in \Big(\mathrm{Vect}({}^tA)\Big)^{\perp}$.

Ainsi $\mathrm{Ker}\,{}^tAA = \Big(\mathrm{Vect}({}^tA)\Big)^{\perp}$. Comme ${}^tA \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, $\dim \mathrm{Vect}({}^tA) = 1$. Alors $\dim \mathrm{Ker}\,{}^tAA = n - 1$.

Comme $n - 1 > 0$, $\mathrm{Ker}\,{}^tAA$ n'est pas réduit à la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et ainsi 0 est valeur propre de ${}^tAA$.

Le sous-espace propre associé est l'hyperplan $\Big(\mathrm{Vect}({}^tA)\Big)^{\perp}$. $E_0({}^tAA) = \Big(\mathrm{Vect}({}^tA)\Big)^{\perp}$.

Comme ${}^tAA$ est diagonalisable, ${}^tAA$ a nécessairement une autre valeur propre qui ne peut être que A^tA car $\mathrm{Sp}\,{}^tAA$ est contenu dans $\{0, A^tA\}$.

De plus $E_0({}^tAA)$ et $E_{A^tA}({}^tAA)$ sont supplémentaires et orthogonaux car ${}^tAA$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors $E_{A^tA}({}^tAA)) = \big(E_0({}^tAA)\big)^{\perp} = \Big(\big(\mathrm{Vect}({}^tA)\big)^{\perp}\Big)^{\perp} = \mathrm{Vect}({}^tA)$. $E_{A^tA}({}^tAA) = \mathrm{Vect}({}^tA)$.

Si $n \geqslant 2$, $\mathrm{Sp}\,{}^tAA = \{0, A^tA\}$. $E_0({}^tAA) = \Big(\mathrm{Vect}({}^tA)\Big)^{\perp}$ et $E_{A^tA}({}^tAA) = \mathrm{Vect}({}^tA)$.

Ici $p=2$, $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=A\,{}^tA$.

Remarque *Notons que :*

- ${}^tAA=(a_i\,a_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$
- $E_0({}^tAA)$ *est l'hyperplan de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *d'équation* $a_1\,x_1+a_2\,x_2+\cdots+a_n\,x_n=0$ *dans la base canonique de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- $A\,{}^tA=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2$ *et* $E_{A\,{}^tA}({}^tAA)$ *est la droite vectorielle de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *engendrée par* $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$

$\boxed{\textit{Version 1}}$ $I_n=P_1+P_2$ et ${}^tAA=\lambda_1\,P_1+\lambda_2\,P_2=(A\,{}^tA)\,P_2$.

Donc $P_2=\dfrac{1}{A\,{}^tA}\,{}^tAA$ et $P_1=I_n-\dfrac{1}{A\,{}^tA}\,{}^tAA$. Notons que $P_2=\dfrac{1}{A\,{}^tA}\,{}^tAA=\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2}\,(a_i\,a_j)$.

$\boxed{\textit{Version 2}}$ Posons $V_2={}^tA$ et $U_2=\dfrac{1}{\|{}^tA\|_n}\,{}^tA$.

(V_2) est une base de $E_{A\,{}^tA}({}^tAA)$. (U_2) est une base orthnormée de $E_{A\,{}^tA}({}^tAA)$.

Alors $P_2=U_2\,{}^tU_2=\left(\dfrac{1}{\|{}^tA\|_n}\,{}^tA\right)\,{}^t\!\left(\dfrac{1}{\|{}^tA\|_n}\,{}^tA\right)=\dfrac{1}{\|{}^tA\|_n^2}\,{}^tA\,{}^t({}^tA)=\dfrac{1}{\|{}^tA\|_n^2}\,{}^tAA=\dfrac{1}{{}^t({}^tA)\,{}^tA}\,{}^tAA=\dfrac{1}{A\,{}^tA}\,{}^tAA.$

On retrouve ainsi $P_2=\dfrac{1}{A\,{}^tA}\,{}^tAA$ et $P_1=I_n-P_2=I_n-\dfrac{1}{A\,{}^tA}\,{}^tAA$.

> Si $n\geqslant 2$, la décomposition spectrale de ${}^tAA$ est ${}^tAA=0\,P_1+(A\,{}^tA)\,P_2$ avec $P_2=\dfrac{1}{A\,{}^tA}\,{}^tAA=\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2}\,(a_i\,a_j)$ et
>
> $P_1=I_n-P_2$!

Partie II - Pseudo solution d'une équation linéaire.

---

5) Dans toute la suite conformément au texte nous parlerons le plus souvent de l'équation $AX=B$ alors qu'il serait sans doute préférable de parler de l'équation $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX=B$.

► On suppose ici que l'équation $AX=B$ admet au moins une solution que nous noterons X_0.

Soit X' un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Supposons que X' est une pseudo solution de l'équation $AX=B$.

Alors $\forall Z\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX'-B\|_m\leqslant\|AZ-B\|_m$.

En particulier $\|AX'-B\|_m\leqslant\|AX_0-B\|_m=0$. Alors $\|AX'-B\|_n=0$ donc $AX'-B=0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}$.

Ainsi $AX'=B$ et X' est solution de l'équation $AX=B$.

- Supposons que X' est solution de l'équation $AX=B$.

Alors $\forall Z\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX'-B\|_m=0\leqslant\|AZ-B\|_m$. Donc X' est une pseudo solution de l'équation $AX=B$.

> Si l'équation $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX=B$ admet au moins une solution, l'ensemble de ses pseudo solutions est l'ensemble de ses solutions.

6) *Remarque Notons que les résultats de Q6 et Q7 sont presque dans notre cours au niveau de la méthode des moindres carrés. Sauf que dans le théorème concerné il y a une hypothèse supplémentaire :* $\operatorname{rg} A = n$. *Cette hypothèse assurant l'unicité d'une pseudo solution (comme nous le verrons dans Q9).*

Notons également que l'on peut obtenir les résultats de Q6 et Q7 en utilisant le "théorème de meilleure approximation". Nous en dirons deux mots à la fin de Q7.

Commençons par établir un résultat que nous utiliserons dans Q6 et dans Q7. Montrons donc que :

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (X,Y) \in \Big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\Big)^2,\ \|A(X+\lambda Y)-B\|_m^2 - \|AX-B\|_m^2 = \lambda^2\,\|AY\|_m^2 + 2\,\lambda\,{}^tY{}^tA\,(AX-B) \quad (1).$

Soit λ un réel. Soient X et Y deux éléments quelconques de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\|A(X+\lambda Y)-B\|_m^2 = \|(AX-B)+(\lambda\,AY)\|_m^2 = \|AX-B\|_m^2 + 2 < AX-B, \lambda\,AY >_m + \|\lambda\,AY\|_m^2.$

$\|A(X+\lambda Y)-B\|_m^2 - \|AX-B\|_m^2 = 2\,\lambda < AY, AX-B >_m + \lambda^2\|AY\|_m^2 = 2\,\lambda\,{}^t(AY)(AX-B) + \lambda^2\|AY\|_m^2.$

Ainsi : $\|A(X+\lambda Y)-B\|_m^2 - \|AX-B\|_m^2 = \lambda^2\,\|AY\|_m^2 + 2\,\lambda\,{}^tY{}^tA\,(AX-B).$

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (X,Y) \in \Big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\Big)^2,\ \|A(X+\lambda Y)-B\|_m^2 - \|AX-B\|_m^2 = \lambda^2\,\|AY\|_m^2 + 2\,\lambda\,{}^tY{}^tA\,(AX-B) \quad (1).}$$

► Supposons maintenant que X est une pseudo solution de l'équation.

$\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ 0 \leqslant \|AX-B\|_m \leqslant \|AZ-B\|_m$ donc $\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX-B\|_m^2 \leqslant \|AZ-B\|_m^2.$

Ce qui donne encore $\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AZ-B\|_m^2 - \|AX-B\|_m^2 \geqslant 0.$

Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|A(X+\lambda Y)-B\|_m^2 - \|AX-B\|_m^2 \geqslant 0.$

Alors $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lambda^2\|AY\|_m^2 + 2\,\lambda\,{}^tY\,{}^tA(AX-B) \geqslant 0$ d'après (1).

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est une pseudo solution de l'équation} : \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lambda^2\|AY\|_m^2 + 2\,\lambda\,{}^tY\,{}^tA(AX-B) \geqslant 0.}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lambda^2\|AY\|_m^2 + 2\,\lambda\,{}^tY\,{}^tA(AX-B) \geqslant 0.$

Soit Y un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrons que ${}^tY{}^tA(AX-B) = 0$

$\boxed{\textit{Version 1}}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2\|AY\|_m^2 + 2\,\lambda\,{}^tY\,{}^tA(AX-B) \geqslant 0.$

Donc pour tout réel strictement positif $\lambda\|AY\|_m^2 + 2\,{}^tY\,{}^tA(AX-B) \geqslant 0 \quad (2).$

Et pour tout réel strictement négatif $\lambda\|AY\|_m^2 + 2\,{}^tY\,{}^tA(AX-B) \leqslant 0 \quad (3).$

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs supérieures dans (2) il vient : $2\,{}^tY\,{}^tA(AX-B) \geqslant 0$ ou ${}^tY\,{}^tA(AX-B) \geqslant 0.$

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs inférieures dans (3) il vient : $2\,{}^tY\,{}^tA(AX-B) \leqslant 0$ ou ${}^tY\,{}^tA(AX-B) \leqslant 0.$

Alors ${}^tY\,{}^tA(AX-B) = 0.$

$\boxed{\textit{Version 2}}$ **1^er^ cas** $AY = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}.$

Alors ${}^tY\,{}^tA(AX-B) = {}^t(AY)\,(AX-B) = {}^t(0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})})(AX-B) = 0_{\mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{R})} \times (AX-B) = 0.$

2^ième^ cas $AY \neq 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}.$

Alors $\|AY\|_m^2 \neq 0$. Donc $\lambda \to \lambda^2\|AY\|_m^2 + 2\,\lambda\,{}^tY\,{}^tA(AX-B)$ est un polynôme du second degré à coefficients réels.

De plus ses zéros dans $\mathbb{R}$ sont 0 et $-\dfrac{2\,{}^tY\,{}^tA(AX-B)}{\|AY\|_m^2}.$

Or ce polynôme du second degré est positif sur $\mathbb{R}$ donc il ne peut pas avoir deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

Ainsi : $-\dfrac{2\,{}^tY\,{}^tA(AX-B)}{\|AY\|_m^2}=0$. Alors ${}^tY\,{}^tA(AX-B)=0$.

Finalement ${}^tY\,{}^tA(AX-B)=0$ et ceci pour tout Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Donc $\forall Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ <Y,{}^tA(AX-B)>_n=0$. Donc ${}^tA(AX-B)\in\Big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\Big)^{\perp}=\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Alors ${}^tA(AX-B)=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ ou ${}^tAAX-{}^tAB=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, et ainsi ${}^tAAX={}^tAB$.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est une pseudo solution de l'équation } X'\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } AX'=B \text{ alors } {}^tAAX={}^tAB.}$$

7) Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAX={}^tAB$.

Montrons que X est une pseudo solution de l'équation $X'\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX'=B$.

Soit Z un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y=Z-X$. Alors $Z=X+Y$. En appliquant (1) avec $\lambda=1$ il vient :

$\|AZ-B\|_m^2-\|AX-B\|_m^2=\|A(X+Y)-B\|_m^2-\|AX-B\|_m^2=1^2\times\|AY\|_m^2+2\times 1\times{}^tY{}^tA\,(AX-B)$.

$\|AZ-B\|_m^2-\|AX-B\|_m^2=\|AY\|_m^2+2\,{}^tY{}^tA\,(AX-B)$.

Par hypothèse ${}^tAAX={}^tAB$ donc ${}^tA(AX-B)=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ alors $\|AZ-B\|_m^2-\|AX-B\|_m^2=\|AY\|_m^2$.

Donc $\|AZ-B\|_m^2-\|AX-B\|_m^2\geqslant 0$ ce qui donne $\|AX-B\|_m^2\leqslant\|AZ-B\|_m^2$ puis $\|AX-B\|_m\leqslant\|AZ-B\|_m$.

Ainsi $\forall Z\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX-B\|_m\leqslant\|AZ-B\|_m$. X est donc une pseudo solution de l'équation.

Si X est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAX={}^tAB$, X est une pseudo solution de l'équation $X'\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX'=B$.

Ce résultat ajouté à celui de Q6 permet de dire que :

si X est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, X est une pseudo solution de l'équation $X'\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX'=B$ si et seulement si ${}^tAAX={}^tAB$.

${}^tAB$ appartient à $\operatorname{Im}{}^tA$ et nous avons vu dans **Q2 (c)** que $\operatorname{Im}{}^tA=\operatorname{Im}{}^tAA$. Alors ${}^tAB$ appartient à $\operatorname{Im}{}^tAA$. Ainsi il existe au moins un élément X_0 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAX_0={}^tAB$. Plus de doute :

$$\boxed{\text{l'équation } X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } AX=B \text{ a au moins une pseudo solution.}}$$

► *Retrouvons tous ces résultats (plus rapidement) en utilisant le "théorème de meilleure approximation" ($\boxed{R7}$).*

$\underset{Z\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}{\operatorname{Min}}\|AZ-B\|_m$ existe si et seulement si $\underset{Y\in\operatorname{Im}A}{\operatorname{Min}}\|Y-B\|_m$ existe.

Or $\operatorname{Im}A$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien $(\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}),<.,.>_m)$. Alors $\boxed{\text{R7}}$ montre que $\underset{Y\in\operatorname{Im}A}{\operatorname{Min}}\|Y-B\|_m$ existe et que la projection orthogonale B' de B sur $\operatorname{Im}A$ est l'unique élément de $\operatorname{Im}A$ qui réalise ce minimum.

Ainsi $\underset{Z\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}{\operatorname{Min}}\|AZ-B\|_m$ existe et les éléments qui réalisent ce minimum sont les éléments X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX=B'$.

Alors l'équation $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX=B$ admet des pseudo solutions qui sont les éléments X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX=B'$ (il en existe car $B'\in\operatorname{Im}A$...).

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. AX appartient à l'image de A.

Ainsi AX est la projection orthogonale B' de B sur $\operatorname{Im} A$ si et seulement si $B - AX$ ou $AX - B$ appartient à $(\operatorname{Im} A)^\perp$.

$AX - B \in (\operatorname{Im} A)^\perp \iff \forall Y \in \operatorname{Im} A, < Y, AX - B >_m = 0 \iff \forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), < AZ, AX - B >_m = 0.$

$AX - B \in (\operatorname{Im} A)^\perp \iff \forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t(AZ)(AX - B) = 0 \iff \forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tZ{}^tA(AX - B) = 0.$

$AX - B \in (\operatorname{Im} A)^\perp \iff \forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), < Z, {}^tA(AX - B) >_n = 0 \iff {}^tA(AX - B) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^\perp.$

Or $\Big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\Big)^\perp = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ donc :

$AX - B \in (\operatorname{Im} A)^\perp \iff {}^tA(AX - B) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff {}^tAAX - {}^tAB = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff {}^tAAX = {}^tAB.$

Alors $AX = B'$ si et seulement si ${}^tAAX = {}^tAB$. Donc X est une pseudo solution de l'équation si et seulement si ${}^tAAX = {}^tAB$.

Ainsi avons nous retrouvé l'ensemble des résultats de Q6 et Q7.

8) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$${}^tAAX = {}^tAB \iff \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ -3x + 3y = -3 \\ 6z = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x - 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des pseudo solutions de l'équation } X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ et } AX = B \text{ est } \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x-1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \, x \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Soit x un réel. Posons $T_x = \begin{pmatrix} x \\ x-1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\|T_x\|_3^2 = x^2 + (x-1)^2 + 1^2 = 2x^2 - 2x + 2 = 2(x^2 - x) + 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}.$$

Si x n'est pas égal à $\dfrac{1}{2}$, $\|T_x\|_3^2 = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2} > \dfrac{3}{2} = \|T_{\frac{1}{2}}\|_3^2$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \|T_x\|_3 > \|T_{\frac{1}{2}}\|_3$.

Rappelons que l'ensemble des pseudo solutions de l'équation $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x-1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \, x \in \mathbb{R} \right\}$ soit encore $\{T_x \; ; \, x \in \mathbb{R}\}$.

$T_{\frac{1}{2}}$ est donc l'unique pseudo solution de l'équation, de norme minimale. Notons que $T_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{L'équation } X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ et } AX = B \text{ admet une pseudo solution de norme minimale et une seule qui est } \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

9) Soit X_0 une pseudo solution de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$. ${}^tAAX_0 = {}^tAB$.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

X est une pseudo solution de l'équation si et seulement si ${}^tAAX = {}^tAB$.

${}^tAAX = {}^tAB \iff {}^tAAX = {}^tAAX_0 \iff {}^tAA(X - X_0) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff X - X_0 \in \operatorname{Ker} {}^tAA.$

${}^tAAX = {}^tAB \iff \exists Y \in \operatorname{Ker} {}^tAA, X - X_0 = Y \iff \exists Y \in \operatorname{Ker} {}^tAA,\ X = X_0 + Y$. Rappelons que $\operatorname{Ker} {}^tAA = \operatorname{Ker} A$.

Alors ${}^tAAX \iff \exists Y \in \operatorname{Ker} A,\ X = X_0 + Y$.

Donc l'ensemble des pseudo solutions de l'équation est $\{X_0 + Y\,;\, Y \in \operatorname{Ker} A\}$.

Si X_0 est une pseudo solution de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$, l'ensemble des pseudo solutions de cette équation est $\{X_0 + Y\,;\, Y \in \operatorname{Ker} A\}$.

Plus de doute alors, l'équation admet une pseudo solution et une seule si et seulement si $\operatorname{Ker} A = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

$\boxed{\text{R4}}$ donne $\dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rg} A = n$. Alors $\operatorname{Ker} A = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} \iff \dim \operatorname{Ker} A = 0 \iff \operatorname{rg} A = n$.

L'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ admet une pseudo solution et une seule si et seulement si $\operatorname{rg} A = n$.

Remarque *Supposons que* $\operatorname{rg} A = n$. *Nous avons vu dans* **Q2 (c)** *que* $\operatorname{rg} {}^tAA = \operatorname{rg} {}^tA = \operatorname{rg} A$. *Alors* $\operatorname{rg} {}^tAA = n$ *et* ${}^tAA$ *est une matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *donc* ${}^tAA$ *est inversible. L'unique pseudo solution de l'équation* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *et* $AX = B$ *est alors* $({}^tAA)^{-1}({}^tAB)$. *Nous retrouvons ainsi la totalité des résultats du théorème de la méthode des moindres carrés (* $\boxed{\textit{R8}}$ *). Nous y reviendrons encore dans Q11 (a).*

Partie III - Pseudo solution d'une matrice.

---

10) Nous allons donner deux (?) solutions à cette question.

Avant de commencer rappelons que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} {}^tAA$.

$\boxed{\textit{Version 1}}$ Le texte incite à construire une pseudo solution S orthogonale à $\operatorname{Ker} {}^tAA$ non ? Alors allons y.

Soit X_0 une pseudo solution de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

L'ensemble des pseudo solutions de cette équation est $\{X_0 + Y\,;\, Y \in \operatorname{Ker} A\}$ ou $\{X_0 + Y\,;\, Y \in \operatorname{Ker} {}^tAA\}$.

Soit X_0' la projection orthogonale de X_0 sur $\operatorname{Ker} {}^tAA$ ou sur $\operatorname{Ker} A$. Alors $X_0 - X_0'$ appartient à $(\operatorname{Ker} {}^tAA)^\perp$.

Posons donc $S = X_0 - X_0'$. Notons que S est orthogonal à $\operatorname{Ker} {}^tAA$.

De plus $S = X_0 + (-X_0')$ et $(-X_0')$ appartient à $\operatorname{Ker} A$ donc S est une pseudo solution de l'équation $AX = B$.

Notons alors que l'ensemble des pseudo solutions de l'équation $AX = B$ est encore $\{S + Y\,;\, Y \in \operatorname{Ker} A\}$.

Soit Z une pseudo solution de l'équation $AX = B$ distincte de S. Il existe un élément non nul Y de $\operatorname{Ker} A$ tel que $Z = S + Y$.

$S \in (\operatorname{Ker} {}^tAA)^\perp$ et $Y \in \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} {}^tAA$ donc S et Y sont orthogonaux.

Le théorème de Pythagore donne alors : $\|S + Y\|_n^2 = \|S\|_n^2 + \|Y\|_n^2$.

Ainsi $\|Z\|_n^2 = \|S + Y\|_n^2 = \|S\|_n^2 + \|Y\|_n^2 > \|S\|_n^2$ car $\|Y\|_n^2 > 0$.

Donc $\|Z\|_n > \|S\|_n$ et ceci pour toute pseudo solution Z de l'équation $AX = B$ distincte de S.

Ceci montre qu'il existe une unique pseudo solution de l'équation $AX = B$ de norme minimale et que cette pseudo solution est S.

Notons que ${}^tAAS = {}^tAB$ (car S est une pseudo solution de l'équation) et que S est orthogonal à $\operatorname{Ker} {}^tAA$.

Montrons que ceci caractérise S.

Supposons que S' soit un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAS' = {}^tAB$ et qui soit orthogonal à $\operatorname{Ker} {}^tAA$.

Notons que $S' - S$ est orthogonal à $\operatorname{Ker} {}^tAA$ car S et S' sont tous les deux orthogonaux à $\operatorname{Ker} {}^tAA$.

${}^tAAS' = {}^tAB$ donc S' est une pseudo solution de l'équation. Ainsi il existe Y' dans $\operatorname{Ker} A$ tel que $S' = S + Y'$.

Alors $S' - S = Y'$ et ainsi $S' - S$ appartient à $\operatorname{Ker} A$ donc à $\operatorname{Ker} {}^tAA$.

Finalement $S' - S \in (\operatorname{Ker} {}^tAA)^\perp \cap \operatorname{Ker} {}^tAA = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. Alors $S' = S$. Ce qui achève de montrer que :

l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ admet une unique pseudo solution de norme minimale notée S et caractérisée par les deux conditions ${}^tAAS = {}^tAB$ et S est orthogonal à $\operatorname{Ker} {}^tAA$.

Version 2 Soit X_0 une pseudo solution de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

L'ensemble $\mathcal{H}$ des pseudo solutions de l'équation est $\{X_0 + Y \,;\, Y \in \operatorname{Ker} A\}$ ou $\{X_0 - Y \,;\, Y \in \operatorname{Ker} A\}$ (car $\operatorname{Ker} A$ est un sous-espace vectoriel).

Comme $\operatorname{Ker} A$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), < .,. >_n)$, le "théorème de meilleure approximation" ($\boxed{\text{R7}}$) montre que $\underset{Y \in \operatorname{Ker} A}{\operatorname{Min}} \|X_0 - Y\|_n$ existe et que la projection orthogonale X_0' de X_0 sur $\operatorname{Ker} A$ est l'unique élément de $\operatorname{Ker} A$ qui réalise ce minimum.

Donc $\underset{Z \in \mathcal{H}}{\operatorname{Min}} \|Z\|_n$ existe et $X_0 - X_0'$ est l'unique élément de $\mathcal{H}$ qui réalise ce minimum.

Posons $S = X_0 - X_0'$. Alors S est l'unique pseudo solution de l'équation $AX = B$ de norme minimale et S est orthogonal à $\operatorname{Ker} A$ donc à $\operatorname{Ker} {}^tAA$ car X_0' est la projection orthogonale de X_0 sur $\operatorname{Ker} A$.

Soit S' un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAS' = {}^tAB$ et qui soit orthogonal à $\operatorname{Ker} {}^tAA$ donc à $\operatorname{Ker} A$.

${}^tAAS' = {}^tAB$ donc S' est une pseudo solution de l'équation $AX = B$. Ainsi il existe Y' appartenant à $\operatorname{Ker} A$ tel que $S' = X_0 + Y$.

Alors $X_0 = (-Y) + S'$ avec $-Y \in \operatorname{Ker} A$ et $S' \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$. Donc $-Y$ est la projection orthogonale de X_0 sur $\operatorname{Ker} A$ donc $-Y = X_0'$.

Alors $S' = X_0 + Y = X_0 - X_0' = S$. Ceci achève de démontrer le résultat demandé.

11) (a) Supposons que A est de rang n. Nous avons vu dans **Q9** que l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ admet une pseudo solution et une seule que nous noterons S. S est nécessairement la pseudo solution de l'équation $AX = B$ de norme minimale !

Nous avons vu dans **Q2 (c)** que $\operatorname{rg} {}^tAA = \operatorname{rg} A$. Alors $\operatorname{rg} {}^tAA = n$ et ${}^tAA$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc ${}^tAA$ est inversible.

Or ${}^tAAS = {}^tAB$ donc $S = ({}^tAA)^{-1}\left({}^tAB\right)$.

Si $\operatorname{rg} A = n$, ${}^tAA$ est inversible et l'unique pseudo solution (de norme minimale) de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est $({}^tAA)^{-1}\left({}^tAB\right)$.

Exercice   Montrer que si $\operatorname{rg} A = n$: $({}^tAA)^{-1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i} P_i$ *et* $({}^tAA)^{-1}\left({}^tAB\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i} P_i {}^tAB.$

(b) Supposons que A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors $\operatorname{Ker} A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc $\left(\operatorname{Ker} A\right)^\perp = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit S l'unique pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

S est orthogonal à $\operatorname{Ker} {}^tAA$ donc à $\operatorname{Ker} A$. Alors $S \in \left(\operatorname{Ker} A\right)^\perp$ donc $S = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Si A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, l'unique pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Remarque Notons que si A est nulle, l'ensemble des pseudo solutions de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il n'est donc pas étonnant que la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ soit $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

12) Notons φ l'application qui à tout élément B de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ associe la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

- Par définition φ est une application de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Montrons que φ est linéaire. Soient B et B' deux éléments de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. Soit λ un réel.

Posons $S = \varphi(B)$ et $S' = \varphi(B')$. Montrons que $\varphi(\lambda\, B + B') = \lambda\, S + S'$. Pour cela il convient de montrer que $\lambda\, S + S'$ est la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = \lambda\, B + B'$. Donc de montrer que ${}^tAA(\lambda\, S + S') = {}^tA(\lambda\, B + B')$ et que $\lambda\, S + S'$ est orthogonal à $\operatorname{Ker}{}^tAA$.

$S = \varphi(B)$ et $S' = \varphi(B')$ donc ${}^tAAS = {}^tAB$, ${}^tAAS' = {}^tAB'$ et, S et S' sont orthogonaux à $\operatorname{Ker}{}^tAA$.

Alors ${}^tAA(\lambda\, S + S') = \lambda\, {}^tAAS + {}^tAAS' = \lambda\, {}^tAB + {}^tAB' = {}^tA(\lambda\, B + B')$.

De plus $\lambda\, S + S'$ est orthogonal à $\operatorname{Ker}{}^tAA$ car S et S' sont orthogonaux à $\operatorname{Ker}{}^tAA$.

Ceci achève de montrer que $\lambda\, S + S'$ est la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = \lambda\, B + B'$.

Donc $\varphi(\lambda\, B + B') = \lambda\, S + S'$. Ainsi $\varphi(\lambda\, B + B') = \lambda\, \varphi(B) + \varphi(B')$. φ est linéaire.

L'application qui à tout élément B de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ associe l'unique pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

13) Rappelons que dans toute cette question A n'est pas la matrice nulle.

(a) Montrons que ${}^tAA$ possède au moins une valeur propre non nulle.

Raisonnons par l'absurde et supposons que ${}^tAA$ ne possède pas de valeur propre non nulle.

Comme ${}^tAA$ est diagonalisable, 0 est la seule valeur propre de ${}^tAA$. Ainsi $p = 1$ et $\lambda_1 = 0$.

Alors ${}^tAA = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i\, P_i = \lambda_1\, P_1 = 0 \times P_1 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. ${}^tAA$ est nulle.

Or d'après **Q2 (b)** A et ${}^tAA$ sont simultanément nulles. Ainsi A est nulle ce qui contredit l'hypothèse.

$$\boxed{\Gamma(A) \text{ n'est pas vide car } {}^tAA \text{ possède au moins une valeur propre non nulle!}}$$

(b) Nous allons proposer deux solutions pour cette question. La première version rebondira sur le résultat donné. La seconde, plus intéressante, retrouvera le résultat proposé. Mais avant cela établissons trois résultats utiles dans la suite.

$\boxed{\textbf{R9}}$ $\boxed{\forall j \in [\![1,p]\!],\ {}^tAAP_j = \lambda_j\, P_j.}$

Rappelons que $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \forall j \in [\![1,p]\!],\ P_iP_j = \begin{cases} P_j & \text{si } i = j \\ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} & \text{sinon} \end{cases}$.

Donc $\forall j \in [\![1,p]\!],\ {}^tAAP_j = \left(\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i\, P_i \right) P_j = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i P_i P_j = \lambda_j\, P_j$.

Remarques 1. Notons que ce résultat vaut encore si A est la matrice nulle car dans ce cas : $p = 1$, $\lambda_1 = 0$ et ${}^tAA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

2. Clairement $\forall j \in [\![1,p]\!],\ P_j\, {}^tAA = \lambda_j\, P_j$. Nous le verrons dans Q16).

R10 $\boxed{\left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^{\perp} = \displaystyle\bigoplus_{i\in\Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA) = \operatorname{Im}{}^tAA = \operatorname{Im}{}^tA.}$

Notons que **Q2 (c)** nous a déjà donné $\operatorname{Im}{}^tAA = \operatorname{Im}{}^tA$.

1^er cas $\operatorname{Ker}{}^tAA = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Alors 0 n'est pas valeur propre de ${}^tAA$. Donc $\Gamma(A) = [\![1,p]\!]$.

$\left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^{\perp} = \left(\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}\right)^{\perp} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

${}^tAA$ est inversible car 0 n'est pas valeur propre de ${}^tAA$ donc $\operatorname{Im}{}^tAA = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Rappelons que ${}^tAA$ est diagonalisable donc $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}({}^tAA) = \bigoplus_{i\in\Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA)$.

Ce qui précède donne alors $\left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^{\perp} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \displaystyle\bigoplus_{i\in\Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA) = \operatorname{Im}{}^tAA = \operatorname{Im}{}^tA$.

2^ième cas $\operatorname{Ker}{}^tAA \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Alors 0 est valeur propre de ${}^tAA$. Donc $p \geqslant 2$, $\lambda_1 = 0$, $E_{\lambda_1}({}^tAA) = \operatorname{Ker}{}^tAA$ et $\Gamma(A) = [\![2,p]\!]$.

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}({}^tAA) = E_{\lambda_1}({}^tAA) \bigoplus \left(\bigoplus_{i\in\Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA)\right) = \operatorname{Ker}{}^tAA \bigoplus \left(\bigoplus_{i\in\Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA)\right).$$

Donc $\operatorname{Ker}{}^tAA$ et $\displaystyle\bigoplus_{i\in\Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA)$ sont supplémentaires.

Pour tout élément i de $[\![2,p]\!]$, $E_{\lambda_1}({}^tAA)$ et $E_{\lambda_i}({}^tAA)$ sont orthogonaux donc $E_{\lambda_1}({}^tAA)$ et $\displaystyle\bigoplus_{i\in\Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA)$ sont orthogonaux.

Alors $\operatorname{Ker}{}^tAA$ et $\displaystyle\bigoplus_{i\in\Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA)$ sont supplémentaires et orthogonaux donc $\left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^{\perp} = \displaystyle\bigoplus_{i\in\Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA)$.

Soit i un élément de $\Gamma(A)$. Soit X un élément de $E_{\lambda_i}({}^tAA)$.

${}^tAAX = \lambda_i X$ et $\lambda_i \neq 0$ donc $X = \dfrac{1}{\lambda_i}\,{}^tAAX = {}^tAA\left(\dfrac{1}{\lambda_i} X\right)$. Alors X appartient à $\operatorname{Im}{}^tAA$.

Donc pour tout élément i de $\Gamma(A)$, $E_{\lambda_i}({}^tAA)$ est contenu dans $\operatorname{Im}{}^tAA$. Ainsi $\displaystyle\bigoplus_{i\in\Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA) \subset \operatorname{Im}{}^tAA$.

Or $\displaystyle\bigoplus_{i\in\Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA) = \left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^{\perp}$ donc $\dim \displaystyle\bigoplus_{i\in\Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA) = \dim\left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^{\perp} = n - \dim\operatorname{Ker}{}^tAA = \dim\operatorname{Im}{}^tAA$.

Alors $\displaystyle\bigoplus_{i\in\Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA) \subset \operatorname{Im}{}^tAA$ et $\dim \displaystyle\bigoplus_{i\in\Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA) = \dim\operatorname{Im}{}^tAA$ donc $\displaystyle\bigoplus_{i\in\Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA) = \operatorname{Im}{}^tAA = \operatorname{Im}{}^tA$.

Ceci achève la preuve de $\boxed{\text{R10}}$.

Exercice *Retrouver* $\left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^{\perp} = \operatorname{Im}{}^tAA$ *en montrant d'abord que* $\left(\operatorname{Im}{}^tAA\right)^{\perp} = \operatorname{Ker}{}^tAA$.

R11 $\boxed{\text{Si 0 est valeur propre de } {}^tAA \text{ c'est à dire si } \operatorname{Ker}{}^tAA \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} : \boxed{P_1\,{}^tA = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}}.}$

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. ${}^tAX$ appartient à l'image de ${}^tA$.

Or $\operatorname{Im}{}^tA = \operatorname{Im}{}^tAA = \left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^{\perp} = \left(E_{\lambda_1}({}^tAA)\right)^{\perp} = \operatorname{Ker} P_1$. Ainsi $P_1\,{}^tAX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}),\ P_1\,{}^tAX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. $\boxed{\text{R3'}}$ donne alors $P_1\,{}^tA = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$.

Remarque *Notons que ce résultat vaut encore si A est la matrice nulle car dans ce cas :* ${}^tAA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$*, 0 est valeur propre de* ${}^tAA$ *et* ${}^tA = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$*.*

♣ *Exercice* *Sous les hypoyhèses de R11 montrer que* $AP_1 = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$ *(ce sera fait dans Q16)).*

Montrons alors que $A^+ = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tA$.

Pour cela, d'après $\boxed{\text{R3}}$, il suffit de montrer que $\forall B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}),\ A^+B = \left(\displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tA\right) B$.

$\boxed{\textit{Version 1}}$ Soit B un élément de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

Posons $H = \left(\displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tA\right) B$ et montrons que $H = A^+B$.

Ce qui revient à montrer que H est la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ ou encore que ${}^tAAH = {}^tAB$ et que H est orthogonal à $\operatorname{Ker}{}^tAA$.

Notons que $H = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tAB$.

${}^tAAH = {}^tAA\left(\displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tAB\right) = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} {}^tAAP_i{}^tAB = \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} \lambda_i P_i{}^tAB = \sum_{i\in\Gamma(A)} P_i{}^tAB$ d'après $\boxed{\text{R9}}$.

1^er^ cas $\operatorname{Ker}{}^tAA = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Alors $\Gamma(A) = [\![1,p]\!]$. Donc ${}^tAAH = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} P_i{}^tAB = \sum_{i=1}^{p} P_i{}^tAB = \left(\sum_{i=1}^{p} P_i\right){}^tAB = {}^tAB$ car $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} P_i = I_n$.

2^ième^ cas $\operatorname{Ker}{}^tAA \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Alors 0 est valeur propre de ${}^tAA$. Donc $p \geqslant 2$ et $\Gamma(A) = [\![2,p]\!]$. $\boxed{\text{R11}}$ donne $P_1{}^tA = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$ donc $P_1{}^tAB = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Ainsi : ${}^tAAH = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} P_i{}^tAB = \sum_{i=2}^{p} P_i{}^tAB = \sum_{i=1}^{p} P_i{}^tAB = {}^tAB$ car $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} P_i = I_n$.

Ne reste plus qu'à montrer que H est orthogonal à $\operatorname{Ker}{}^tAA$. C'est à dire à montrer que H appartient à $\left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^\perp$ ou à $\operatorname{Im}{}^tAA$.

Soit i un élément de $\Gamma(A)$. $P_i{}^tAB$ appartient à $\operatorname{Im} P_i$ et $\operatorname{Im} P_i = E_{\lambda_i}({}^tAA) \subset \displaystyle\bigoplus_{j\in\Gamma(A)} E_{\lambda_j}({}^tAA) = \operatorname{Im}{}^tAA$ d'après $\boxed{\text{R10}}$.

Donc $P_i{}^tAB \in \operatorname{Im}{}^tAA$. Alors $\dfrac{1}{\lambda_i} P_i{}^tA \in \operatorname{Im}{}^tAA$ et ceci pour tout élément i de $\Gamma(A)$.

Ainsi $H = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tAB \in \operatorname{Im}{}^tAA$. Comme $\operatorname{Im}{}^tAA = \left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^\perp$, H est orthogonal à $\operatorname{Ker}{}^tAA$.

Ceci achève de de montrer que $H = A^+B$.

Donc $\left(\displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tA\right) B = A^+B$ et ceci pour tout élément B de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. Alors $\boxed{\text{R3}}$ donne :

$$\boxed{A^+ = \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tA.}$$

$\boxed{\textit{Version 2}}$ Soit B un élément de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

Soit S la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

${}^tAAS = {}^tAB$ et $S \in \left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^{\perp}$. Montrons que $S = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tAB$.

$S = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} P_iS$ car $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} P_i = I_n$ de même ${}^tAB = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} P_i{}^tAB$ car ${}^tAB$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} P_i{}^tAB = {}^tAB = {}^tAAS = {}^tAA\left(\sum_{i=1}^{p} P_iS\right) = \sum_{1=i}^{p} {}^tAAP_iS = \sum_{1=i}^{p} \lambda_i\, P_iS$ d'après $\boxed{\text{R9}}$.

Or $\forall i \in [\![1,p]\!],\ P_i{}^tAB \in \operatorname{Im} P_i = E_{\lambda_i}({}^tAA)$.

De même $\forall i \in [\![1,p]\!],\ P_iS \in E_{\lambda_i}({}^tAA)$ donc $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \lambda_i\, P_iS \in E_{\lambda_i}({}^tAA)$.

Alors comme la somme $E_{\lambda_1}({}^tAA) + E_{\lambda_2}({}^tAA) + \cdots + E_{\lambda_p}({}^tAA)$ est directe l'égalité $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} P_i{}^tAB = \sum_{1=i}^{p} \lambda_i\, P_iS$ donne :

$\forall i \in [\![1,p]\!],\ P_i{}^tAB = \lambda_iP_iS$. Alors $\forall i \in \Gamma(A),\ P_iS = \dfrac{1}{\lambda_i} P_i{}^tAB$.

1^er^ cas $\operatorname{Ker}{}^tAA = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

0 n'est pas valeur propre de ${}^tAA$. Alors $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \lambda_i \neq 0$ et $\Gamma(A) = [\![1,p]\!]$.

Donc $\forall i \in [\![1,p]\!],\ P_iS = \dfrac{1}{\lambda_i} P_i{}^tAB$. Ainsi $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} P_iS = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tAB = \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tAB$.

2^ième^ cas $\operatorname{Ker}{}^tAA \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Alors 0 est valeur propre de ${}^tAA$. Donc $p \geqslant 2$, $\lambda_1 = 0$, $E_{\lambda_1}({}^tAA) = \operatorname{Ker}{}^tAA = \operatorname{Im} P_1$ et $\Gamma(A) = [\![2,p]\!]$.

S appartient à $\left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^{\perp}$ donc à $\operatorname{Ker} P_1$. Alors $P_1S = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} P_iS = \sum_{i=2}^{p} P_iS = \sum_{i\in\Gamma(A)} P_iS$.

Or nous avons vu plus haut que $\forall i \in \Gamma(A),\ P_iS = \dfrac{1}{\lambda_i} P_i{}^tAB$, donc $S = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} P_iS = \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tAB$.

Dans les deux cas $\displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tAB$ est donc la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

Ainsi $A^+B = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tAB$.

$\forall B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}),\ A^+B = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tAB = \left(\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tA\right) B$. Alors $A^+ = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^tA$ d'après $\boxed{\text{R3}}$.

Remarque Ceci fournit clairement des pistes pour donner une troisième solution à la question 10 ou pour faire simultanément les questions 10 et 13...

Pour être complet examinons le cas où $A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$.

D'après **Q11) (b)**, pour tout élément B de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\forall B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}),\ A^+B = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. $\boxed{\text{R3'}}$ donne alors $A^+ = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est la matrice nulle de } \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ A^+ \text{ est la matrice nulle de } \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}).}$$

14) Notons que A n'est pas la matrice nulle. De plus $p=2$, $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=6$. Alors $\Gamma(A)=\{6\}$ et $A^+=\dfrac{1}{6}P_2\,{}^tA$.

$$A^+=\frac{1}{6}P_2\,{}^tA=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A^+=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.}$$

$$A^+B=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\ -1/2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Nous retrouvons que si $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$, la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $AX=B$ est $\begin{pmatrix}1/2\\ -1/2\\ 1\end{pmatrix}$.

15) Nous poserons $A=(a_1\,a_2\,\ldots a_n)$.

1

1er cas $A=0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})}$.

En faisant $m=1$ dans **Q11 (b)** nous pouvons dire que pour tout élément $B\in\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX=B$ est $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\forall B\in\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}),\ A^+B=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Donc d'après $\boxed{\text{R3'}}$: $A^+=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ (résultat que nous avions déjà montré à la fin de Q13).

2ième cas $A\neq 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})}$.

- $n=1$. Nous avons vu dans **Q4 (b)** que $\operatorname{Sp}{}^tAA=\{a_1^2\}=\{A^tA\}$, $p=1$, $\lambda_1=A^tA=a_1^2$, $P_1=I_1$.

Comme A n'est pas la matrice nulle, a_1 est différent de 0 et il en est de même de λ_1. $\Gamma(A)=[\![1,1]\!]$.

Alors $A^+=\dfrac{1}{\lambda_1}\,P_1{}^tA=\dfrac{1}{\lambda_1}\,I_1{}^tA=\dfrac{1}{\lambda_1}\,{}^tA=\dfrac{1}{A^tA}{}^tA$. Donc $A^+=\dfrac{1}{A^tA}{}^tA$.

- $n\geqslant 2$. Nous avons vu dans **Q4 (b)** que $\operatorname{Sp}{}^tAA=\{0,A^tA\}$, $p=2$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=A^tA$, $P_1=I_n-\dfrac{1}{A^tA}\,{}^tAA$ et $P_2=\dfrac{1}{A^tA}\,{}^tAA$. $\Gamma(A)=[\![2,2]\!]$.

Alors $A^+=\dfrac{1}{\lambda_2}\,P_2{}^tA=\dfrac{1}{A^tA}\left(\dfrac{1}{A^tA}\,{}^tAA\right){}^tA=\dfrac{1}{(A^tA)^2}({}^tAA){}^tA=\dfrac{1}{(A^tA)^2}{}^tA(A^tA)$.

Comme A^tA est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ assimilable à un réel on obtient : $A^+=\dfrac{1}{(A^tA)^2}\,(A^tA)\,{}^tA$. Donc $A^+=\dfrac{1}{A^tA}\,{}^tA$.

Ceci achève la détermination de A^+ lors que A est une matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}),\ A^+=\begin{cases}\dfrac{1}{A^tA}\,{}^tA & \text{si } A\neq 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})}\\ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} & \text{sinon}\end{cases}.}$$

Partie IV - Étude de l'opérateur $\mathbf{A}\to\mathbf{A}^+$.

► $\boxed{\text{Dans toute cette partie } A \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).}$

16) Supposons dans un premier temps que A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors, d'après **Q11 (b)**, pour tout élément B de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Donc $\forall B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}),\ A^+B = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors, d'après $\boxed{\text{R3'}}$, $A^+ = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$. Nous avons ainsi redémontré (pour la troisième fois ou presque !) que :

$\boxed{\textbf{R12}}$ $\boxed{\text{Si } A \text{ est la matrice nulle de } \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ alors } A^+ \text{ est la matrice nulle de } \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}).}$

Donc si $A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$ alors $A^+ = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$ et il est alors clair que $A = AA^+A$, $A^+ = A^+AA^+$, ${}^t\big(A^+A\big) = A^+A$ et ${}^t\big(AA^+\big) = AA^+$.

Supposons maintenant que A n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors $A^+ = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tA$.

Rappelons que ${}^tAA = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, P_i$.

- $A^+A = \left(\displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tA\right) A = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tAA$.

Soit i dans $\Gamma(A)$. $P_i\,{}^tAA = P_i \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, P_j = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, P_i\, P_j = \lambda_i\, P_i$ car $\forall j \in [\![1,p]\!],\ P_i\, P_j = \begin{cases} P_i & \text{si } j = i \\ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $A^+A = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} \lambda_i\, P_i = \sum_{i\in\Gamma(A)} P_i$. $\boxed{A^+A = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} P_i}$.

A^+A est alors une combinaison linéaire de matrices symétriques. C'est donc une matrice symétrique. Ainsi :
$\underline{{}^t\big(A^+A\big) = A^+A}$.

♣ *Exercice Montrer que* A^+A *est la matrice de la projection orthogonale de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *sur* $\operatorname{Im}{}^tAA$ *ou* $\big(\operatorname{Ker}{}^tAA\big)^\perp$ *ou* $\operatorname{Im}{}^tA$ *ou* $\big(\operatorname{Ker} A\big)^\perp$ *!*

- De plus $AA^+A = A \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} P_i = \sum_{i\in\Gamma(A)} AP_i$.

Si 0 n'est pas valeur propre de A, $\Gamma(A) = [\![1,p]\!]$ et $AA^+A = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} AP_i = A \sum_{i=1}^{p} P_i = AI_n = A$.

Supposons que 0 est valeur propre de A. Alors $p \geqslant 2$, $\lambda_1 = 0$ et $\Gamma(A) = [\![2,p]\!]$.

Donc $AA^+A = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} AP_i = \sum_{i=2}^{p} AP_i = \sum_{i=1}^{p} AP_i - AP_1 = A\left(\sum_{i=1}^{p} P_i\right) - AP_1 = AI_n - AP_1 = A - AP_1$.

Montrons que $AP_1 = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $P_1X \in \operatorname{Im} P_1$ et $\operatorname{Im} P_1 = E_{\lambda_1}({}^tAA) = \operatorname{Ker}{}^tAA = \operatorname{Ker} A$.

Donc P_1X est un élément de $\operatorname{Ker} A$. Ainsi $AP_1X = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}$ et ceci pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors $\boxed{\text{R3'}}$ montre que $AP_1 = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$. Donc $AA^+A = A - AP_1 = A$.

Dans les deux cas $\underline{AA^+A = A}$.

- $A^+A = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} P_i$ donc $A^+AA^+ = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} P_iA^+$. Soit i un élément de $\Gamma(A)$.

$$P_i A^+ = P_i \sum_{j\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_j} P_j{}^t A = \sum_{j\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_j} P_i\,P_j{}^t A = \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^t A \text{ car } \forall j \in \Gamma(A),\ P_i\,P_j = \begin{cases} P_i & \text{si } j = i \\ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donc $A^+AA^+ = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} P_i A^+ = \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^t A = A^+$. $\underline{A^+AA^+ = A^+}$.

- $AA^+ = A \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^t A = \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} A\,P_i{}^t A$. Alors ${}^t(AA^+) = {}^t\left(\displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} A\,P_i{}^t A\right) = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i}\,{}^t\big(A\,P_i{}^t A\big)$.

$${}^t(AA^+) = \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i}\,{}^t\big({}^t A\big)\,{}^t P_i{}^t A = \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} A\,{}^t P_i{}^t A = \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} A\,P_i{}^t A = A\left(\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^t A\right) = AA^+.$$

$\underline{{}^t(AA^+) = AA^+}$. Cela achève de montrer que :

$$\boxed{\boxed{AA^+A = A}\ \boxed{A^+AA^+ = A^+}\ \boxed{{}^t(A^+A) = A^+A}\ \boxed{{}^t(AA^+) = AA^+}}$$

♣ *Exercice* *Montrer que AA^+ est la matrice de la projection orthogonale de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ sur* $\operatorname{Im} A$.

17) (a) • $M^tM^tA = M^t(AM) = MAM = M$ et ${}^tA^tMM = {}^t(MA)M = MAM = M$, donc :

$$\boxed{M = M^tM^tA = {}^tA^tMM.}$$

- $A^tA^tM = A^t(MA) = AMA = A$ et ${}^tM^tAA = {}^t(AM)A = AMA = A$.

$$\boxed{A = A^tA^tM = {}^tM^tAA.}$$

- $A = (AM)A$ donc ${}^tA = {}^tA^t(AM) = {}^tAAM$. $A = A(MA)$ donc ${}^tA = {}^t(MA)^tA = MA^tA$. Ainsi :

$$\boxed{{}^tA = {}^tAAM = MA^tA.}$$

(b) Pour montrer que $M = A^+$ il suffit de montrer que $\forall B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}), MB = A^+B$ d'après $\boxed{\text{R3}}$.

Cela revient à montrer que, pour tout élément B de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, MB est la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ ou encore que ${}^tAAMB = {}^tAB$ et $MB \in \big(\operatorname{Ker}{}^tAA\big)^\perp$.

Soit B un élément de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

- ${}^tAAMB = ({}^tAAM)B = {}^tAB$.
- Montrons que MB est orthogonal à $\operatorname{Ker}{}^tAA$. Rappelons que d'après $\boxed{\text{R10}}$, $\big(\operatorname{Ker}{}^tAA\big)^\perp = \operatorname{Im}{}^tAA = \operatorname{Im}{}^tA$.

Or $MB = ({}^tA^tMM)B = {}^tA({}^tMMB)$. Donc MB est bien un élément de $\operatorname{Im}{}^tA$ donc de $\big(\operatorname{Ker}{}^tAA\big)^\perp$. Ainsi MB est orthogonal à $\operatorname{Ker}{}^tAA$.

Ceci achève de montrer que $MB = A^+B$ et ceci pour tout élément B de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\boxed{M = A^+.}$$

Q16 montre que A^+ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ qui vérifie (*) et nous venons de voir qu'une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ qui vérifie (*) est égale à A^+. Alors :

$$\boxed{A^+ \text{ est l'unique matrice de } \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \text{ qui vérifie (*)}.}$$

18) (a) Notons que $\left(A^+\right)^+$ est l'unique matrice N de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^+ = A^+NA^+$, $N = NA^+N$, ${}^t(NA^+) = NA^+$ et ${}^t(A^+N) = A^+N$.

Or A est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ qui vérifie : $A^+ = A^+AA^+$, $A = AA^+A$, ${}^t(AA^+) = AA^+$ et ${}^t(A^+A) = A^+A$. Alors :

$$\boxed{\left(A^+\right)^+ = A.}$$

(b) Notons que ${}^tA$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

$\left({}^tA\right)^+$ est l'unique matrice L de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ qui vérifie : ${}^tA = {}^tAL{}^tA$, $L = L{}^tAL$, ${}^t(L{}^tA) = L{}^tA$ et ${}^t({}^tAL) = {}^tAL$.

Or en transposant les quatre égalités $A = AA^+A$, $A^+ = A^+AA^+$, ${}^t(A^+A) = A^+A$, et ${}^t(AA^+) = AA^+$ il vient :

${}^tA = {}^tA\,{}^tA^+\,{}^tA$, ${}^tA^+ = {}^tA^+\,{}^tA\,{}^tA^+$, ${}^t\big({}^t\big(A^+A\big)\big) = {}^t(A^+A)$, et ${}^t\big({}^t\big(AA^+\big)\big) = {}^t(AA^+)$.

${}^t\big({}^t\big(A^+A\big)\big) = {}^t(A^+A)$ donne : ${}^t({}^tA\,{}^tA^+) = {}^tA\,{}^tA^+$ et ${}^t\big({}^t\big(AA^+\big)\big) = {}^t(AA^+)$ donne ${}^t({}^tA^+\,{}^tA) = {}^tA^+\,{}^tA$.

Finalement ${}^tA^+$ est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ qui vérifie : ${}^tA = {}^tA\,{}^tA^+\,{}^tA$, ${}^tA^+ = {}^tA^+\,{}^tA\,{}^tA^+$, ${}^t({}^tA^+\,{}^tA) = {}^tA^+\,{}^tA$.

et ${}^t({}^tA\,{}^tA^+) = {}^tA\,{}^tA^+$. Donc :

$$\boxed{\left({}^tA\right)^+ = {}^tA^+.}$$

19) Soit x un réel strictement positif. Nous avons vu dans **Q3 a** que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont des réels positifs ou nuls donc $-x$ n'est pas valeur propre de ${}^tAA$ et ainsi ${}^tAA - (-x)\,I_n$ est inversible. Donc :

$$\boxed{\text{si } x \text{ est un réel strictement positif la matrice } {}^tAA + x\,I_n \text{ est inversible.}}$$

Notons que $\forall i \in [\![1,p]\!], \lambda_i + x > 0$ car $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \lambda_i \geqslant 0$ et $x > 0$.

Posons $Q_x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i + x}\,P_i$ et montrons que $Q_x = ({}^tAA + x\,I_n)^{-1}$.

Notons que ${}^tAA + x\,I_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\,P_i + x\sum_{i=1}^{p} P_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + x)\,P_i$.

$$({}^tAA + x\,I_n)\,Q_x = \left(\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + x)\,P_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_j + x}\,P_j\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \frac{\lambda_i + x}{\lambda_j + x}\,P_iP_j.$$

$$({}^tAA + x\,I_n)\,Q_x = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i + x}{\lambda_i + x}\,P_i = \sum_{i=1}^{p} P_i = I_n \text{ car } \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ P_i\,P_j = \begin{cases} P_i & \text{si } j = i \\ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} & \text{sinon} \end{cases}.$$

$({}^tAA+x\,I_n)\,Q_x = I_n$ ce qui suffit pour dire que $({}^tAA+x\,I_n)^{-1} = Q_x$. Cela redonne aussi l'inversibilité de ${}^tAA+x\,I_n$...

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif} : ({}^tAA + x\,I_n)^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i + x}\,P_i.}$$

Montrons que $A^+ = \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left[({}^tAA + x\,I_n)^{-1}\,{}^tA\right]$.

1^er^ cas $\quad A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$.

Alors $A^+ = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$ et ${}^tA = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$ Le résultat est alors clair car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ ({}^tAA + x\,I_n)^{-1}\,{}^tA = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$.

2^ième^ cas $\quad A \neq 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$.

Alors $\Gamma(A) \neq \emptyset$. Soit x un réel strictement positif. Montrons que $({}^tAA + x\,I_n)^{-1}\,{}^tA = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i + x}\,P_i{}^tA$.

Si 0 n'est pas valeur propre de ${}^tAA$, $\Gamma(A)=[\![1,p]\!]$ et ainsi : $({}^tAA+x\,I_n)^{-1}\,{}^tA=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i{}^tA=\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i{}^tA.$

Supposons que 0 soit valeur propre de ${}^tAA$. $\Gamma(A)=[\![2,p]\!]$. $\boxed{\text{R11}}$ donne $P_1{}^tA=0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$.

Alors $({}^tAA+x\,I_n)^{-1}\,{}^tA=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i{}^tA=\sum_{i=2}^{p}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i{}^tA=\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i{}^tA.$

Dans les deux cas $({}^tAA+x\,I_n)^{-1}\,{}^tA=\displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i{}^tA.$

Notons que $\forall i\in\Gamma(A),\ \lambda_i\neq 0$ donc $\forall i\in\Gamma(A),\ \displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\lambda_i+x}=\frac{1}{\lambda_i}$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left[({}^tAA+x\,I_n)^{-1}\,{}^tA\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i{}^tA\right]=\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}\,P_i{}^tA=A^+.$

$$\boxed{A^+=\lim_{x\to0^+}\left[({}^tAA+x\,I_n)^{-1}\,{}^tA\right].}$$

Appliquons cela à la matrice A de Q8.

Soit x un réel strictement positif. Calculons $({}^tAA+x\,I_3)^{-1}$.

$\boxed{\textit{Version 1}}$ On utilise la formule établie ci-dessus.

Ici $p=2$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=6$, $P_1=\begin{pmatrix}1/2&1/2&0\\1/2&1/2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $P_2=\begin{pmatrix}1/2&-1/2&0\\-1/2&1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Alors $\left({}^tAA+x\,I_3\right)^{-1}=\dfrac{1}{x+0}\,P_1+\dfrac{1}{x+6}\,P_2=\dfrac{1}{x+0}\begin{pmatrix}1/2&1/2&0\\1/2&1/2&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\dfrac{1}{x+6}\begin{pmatrix}1/2&-1/2&0\\-1/2&1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

$$\left({}^tAA+x\,I_3\right)^{-1}=\frac{1}{2\,x\,(x+6)}\left(\begin{pmatrix}x+6&x+6&0\\x+6&x+6&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&-x&0\\-x&x&0\\0&0&2x\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2\,x\,(x+6)}\begin{pmatrix}2x+6&6&0\\6&2x+6&0\\0&0&2x\end{pmatrix}.$$

$$\left({}^tAA+x\,I_3\right)^{-1}=\frac{1}{x\,(x+6)}\begin{pmatrix}x+3&3&0\\3&x+3&0\\0&0&x\end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textit{Version 2}}$ À la main !

${}^tAA=\begin{pmatrix}3&-3&0\\-3&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$ donc ${}^tAA+x\,I_3=\begin{pmatrix}3+x&-3&0\\-3&3+x&0\\0&0&6+x\end{pmatrix}$.

Soient $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $X'=\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $\left({}^tAA+x\,I_3\right)X=X'$.

$$\begin{pmatrix}3+x&-3&0\\-3&3+x&0\\0&0&6+x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}\text{ donc }\begin{cases}(3+x)\,a-3\,b=a'\\-3\,a+(3+x)\,b=b'\\(6+x)\,c=c'\end{cases}\quad(\bigstar).$$

Déjà : $c=\dfrac{1}{6+x}\,c'$

En remplaçant la ligne 2 par trois fois la ligne 1 plus trois fois la ligne 2 le tout divisé par x il vient :

$$\begin{cases} (3+x)\,a - 3\,b = a' \\ 3\,a + 3\,b = \dfrac{3}{x}\,(a'+b') \end{cases}.$$

La ligne un plus la ligne deux le tout divisé par $6+x$ donne : $a = \dfrac{1}{6+x}\,\left(\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\,a' + \dfrac{3}{x}\,b'\right)$.

Ainsi $a = \dfrac{1}{x\,(x+6)}\big((x+3)\,a' + 3\,b'\big)$. En repartant de $(\bigstar)$:

En remplaçant la ligne 1 par trois fois la ligne 1 plus trois fois la ligne 2 le tout divisé par x il vient :

$$\begin{cases} 3\,a + 3\,b = \dfrac{3}{x}\,(a'+b') \\ -3\,a + (3+x)\,b = b' \end{cases}.$$

La ligne un plus la ligne deux le tout divisé par $6+x$ donne : $b = \dfrac{1}{6+x}\,\left(\dfrac{3}{x}\,a' + \left(\dfrac{3}{x}+1\right)\,b'\right)$.

Ainsi $b = \dfrac{1}{x\,(x+6)}\big(3\,a' + (x+3)\,b'\big)$.

Finalement $a = \dfrac{1}{x\,(x+6)}\big((x+3)\,a' + 3\,b'\big)$, $b = \dfrac{1}{x\,(x+6)}\big(3\,a' + (x+3)\,b'\big)$ et $c = \dfrac{1}{6+x}\,c' = \dfrac{1}{x\,(x+6)}\,x\,c'$

Donc $({}^tAA + x\,I_3)^{-1} = \dfrac{1}{x\,(x+6)}\,\begin{pmatrix} x+3 & 3 & 0 \\ 3 & x+3 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ again...

Alors $({}^tAA + x\,I_3)^{-1}\,{}^tA = \dfrac{1}{x\,(x+6)}\,\begin{pmatrix} x+3 & 3 & 0 \\ 3 & x+3 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{x\,(x+6)}\,\begin{pmatrix} x & x & -x \\ -x & -x & x \\ x & x & 2\,x \end{pmatrix}$.

$({}^tAA + x\,I_3)^{-1}\,{}^tA = \dfrac{1}{x+6}\,\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors $A^+ = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x+6}\,\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \dfrac{1}{6}\,\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Nous retrouvons } A^+ = \dfrac{1}{6}\,\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

20) Soit α un réel non nul. Posons $A_\alpha = \alpha\,A$ et déterminons $(A_\alpha)^+$.

Soit x un réel strictement positif.

$\left({}^tA_\alpha A_\alpha + x\,I_n\right)^{-1}{}^tA_\alpha = \left(\alpha^2\,{}^tAA + x\,I_n\right)^{-1}\,\alpha\,{}^tA = \left(\alpha^2\,\left({}^tAA + \dfrac{x}{\alpha^2}\,I_n\right)\right)^{-1}\,\alpha\,{}^tA = \dfrac{1}{\alpha^2}\,\left({}^tAA + \dfrac{x}{\alpha^2}\,I_n\right)^{-1}\,\alpha\,{}^tA$.

$\left({}^tA_\alpha A_\alpha + x\,I_n\right)^{-1}{}^tA_\alpha = \dfrac{1}{\alpha}\,\left({}^tAA + \dfrac{x}{\alpha^2}\,I_n\right)^{-1}\,{}^tA$.

$(A_\alpha)^+ = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\left({}^tA_\alpha A_\alpha + x\,I_n\right)^{-1}{}^tA_\alpha\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\alpha}\,\left({}^tAA + \dfrac{x}{\alpha^2}\,I_n\right)^{-1}\,{}^tA\right) = \dfrac{1}{\alpha}\,\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\left({}^tAA + \dfrac{x}{\alpha^2}\,I_n\right)^{-1}\,{}^tA\right)$.

$(A_\alpha)^+ = \dfrac{1}{\alpha}\,\lim\limits_{z\to 0^+}\left(\left({}^tAA + z\,I_n\right)^{-1}\,{}^tA\right) = \dfrac{1}{\alpha}\,A^+$.

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ (\alpha\,A)^+ = \dfrac{1}{\alpha}A^+.}$$

$\clubsuit$ *Exercice Retrouver ce résultat en utilisant Q17) (b) (resp. Q13) (b)).*

1^er^ cas $A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$.

Alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ \alpha\, A = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$ donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+,\ (\alpha\, A)^+ = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$. Par conséquent $\lim\limits_{\alpha \to 0} (\alpha\, A)^+ = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Si } A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})},\ \lim_{\alpha \to 0} (\alpha\, A)^+ = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}.}$$

2^ième^ cas $A \neq 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$.

Si $A^+ = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})} : A = \left(A^+\right)^+ = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$! Donc A^+ n'est pas la matrice nulle. Alors A^+ possède un coefficient γ non nul.

Or $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ (\alpha\, A)^+ = \dfrac{1}{\alpha} A^+$ et $\alpha \to \dfrac{\gamma}{\alpha}$ n'a pas de limite en 0. Ainsi la matrice $(\alpha\, A)^+$ n'a pas de limite lorsque α tend vers 0.

$$\boxed{\text{Si } A \neq 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}, \text{ la matrice } (\alpha\, A)^+ \text{ n'a pas de limite lorsque } \alpha \text{ tend vers } 0.}$$
