ESSEC 2013

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

Partie I - Construction de la fonction arctan.

Remarque *Cette partie surprend un peu car la définition et la dérivation de la fonction Arctan (notation "officielle") sont au programme de la classe...*

1) Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}\cdot$ φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel x, $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

Ainsi arctan est définie sur $\mathbb{R}$. Notons que arctan est la primitive sur l'intervalle $\mathbb{R}$ de la fonction φ, qui prend la valeur 0 en 0.

arctan est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\arctan' = \varphi$.

φ étant une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Alors $\arctan'$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Soit x dans $\mathbb{R}$, $-x$ est également dans $\mathbb{R}$!

$t \to t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ nous pouvons faire le changement de variable $u = -t$ dans ce qui suit.

$\arctan(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^x \frac{\big(-\mathrm{d}u\big)}{1+(-u)^2} = -\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = -\arctan x.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$ et $\arctan(-x) = -\arctan x$ donc arctan est impaire sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction arctan est bien définie sur } \mathbb{R}\text{, impaire, de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.\ \forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}\cdot}$$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan x = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, donc pour montrer que arctan admet une limite finie en $+\infty$ il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge.

- $\varphi : t \to \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.
- $\forall t \in [1, +\infty[,\ \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente car $2 > 1$.

Ce qui précède et les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives donnent la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc $x \to \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$.

Ainsi $x \to \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ admet une limite finie en $+\infty$. Alors :

$$\boxed{\text{arctan admet une limite finie en } +\infty \text{ provisoirement notée } L.}$$

Ceci permet également de dire que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \text{ converge et vaut } L.}$$

• arctan est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

• arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2} > 0.$ Donc arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• arctan admet une limite finie en $+\infty$ qui vaut L et est impaire sur $\mathbb{R}$.

Alors $-L = -\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \big(-\arctan x\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(-x)$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(-x) = -L$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -L$. arctan admet une limite finie en $-\infty$ qui vaut $-L$.

Les trois points précédents et le théorème de la bijection montrent que :

$$\boxed{\text{arctan est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]-L, L[.}$$

3) Posons $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ H(x) = \arctan\big[\tan(x)\big]$. tan est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc par composition H est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ H'(x) = (\tan'(x))\ \arctan'\big[\tan(x)\big]$.

$\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ H'(x) = \big(1+(\tan x)^2\big)\ \dfrac{1}{1+(\tan x)^2} = 1.$

$\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ H(x) = H(x) - 0 = H(x) - H(0) = \displaystyle\int_0^x H'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = \big[t\big]_0^x = x - 0 = x.$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ appartenant à } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan\big[\tan(x)\big] = x.}$$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{z\to+\infty} \arctan z = L$. Par composition $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \arctan\big[\tan x\big] = L$.

Alors $L = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \arctan\big[\tan x\big] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} x = \dfrac{\pi}{2}\cdot$ Par conséquent :

$$\boxed{L \text{ vaut } \frac{\pi}{2}\cdot}$$

Ceci permet également de dire que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{2}\cdot \text{ Un énorme scoop non ?}}$$

Remarque *Il est grand temps de retomber sur nos pieds rt de retrouver notre cous. Notons s la restriction de* tan *à l'intervalle* $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

• *s est continue sur l'intervalle* $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

• *s est dérivable sur l'intervalle* $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *et* $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ s'(x) = \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$ *donc s est strictement croissante sur* $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

- $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} s(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} s(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty.$

Les trois points précédents et le théorème de la bijection montrent que s est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$.

s^{-1} *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Rappelons que $\forall z \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ z = \arctan\left[\tan z\right]$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ s^{-1}(x) = \arctan\left[\tan(s^{-1}(x))\right] = \arctan\left[s(s^{-1}(x))\right] = \arctan x$.

Ainsi arctan *est égal à* s^{-1}. *Inouï, non ?*

4) arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ |\arctan' t| = \left|\dfrac{1}{1+t^2}\right| = \dfrac{1}{1+t^2}\cdot$

$\forall t \in \mathbb{R},\ 0 < 1 \leqslant 1 + t^2$ donc $\forall t \in \mathbb{R},\ |\arctan' t| = \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1} = 1.$

L'inégalité des accroissements finis donne alors : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\arctan x - \arctan y| \leqslant 1 \times |x-y| = |x-y|$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\arctan x - \arctan y| \leqslant |x-y|.}$$

5) Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ D(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}\cdot$

$x \to \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors par composition $x \to \arctan\dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par somme D est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ D'(x) = \arctan' x + \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \arctan' \dfrac{1}{x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ D'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0.$

Alors D' est nulle sur **l'intervalle** $\mathbb{R}_+^*$ donc D est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Il existe un réel c tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ D(x) = c$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\dfrac{1}{x} = \arctan 0 = 0$ (car arctan est continue en 0) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}\cdot$ Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} D(x) = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ D(x) = c$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} D(x) = c$. Ainsi $c = \dfrac{\pi}{2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = D(x) = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}\cdot}$$

Remarque *Soit x un réel strictement négatif. $-x$ est un réel strictement positif donc* $\arctan(-x) + \arctan\dfrac{1}{-x} = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

Comme arctan *est impaire sur* $\mathbb{R}$, $-\arctan x - \arctan\dfrac{1}{x} = \arctan(-x) + \arctan\dfrac{1}{-x} = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

Ainsi $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ \arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}\cdot}$$

Partie II - Premières propriétés de $\Phi(\mathbf{f})$ et de Φ.

6) • Par définition E_0 est contenu dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ puisque E_0 est l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornées sur $\mathbb{R}$.

• Notons $0_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ l'élément nul de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ 0_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}(x)=0$ donc $0_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est une fonction de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornée sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent $0_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est un élément de E_0 et ainsi E_0 n'est pas vide.

• Soit λ un réel. Soient f_1 et f_2 deux éléments de E_0.

f_1 et f_2 sont deux fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornées sur $\mathbb{R}$.

Donc il existe deux réels positifs c_1 et c_2 tels que : $\forall x\in\mathbb{R},\ |f_1(x)|\leqslant c_1$ et $|f_2(x)|\leqslant c_2$. Alors :

$\forall x\in\mathbb{R},\ \big|(\lambda\, f_1+f_2)(x)\big|=|\lambda\, f_1(x)+f_2(x)|\leqslant|\lambda\, f_1(x)|+|f_2(x)|=|\lambda|\,|f_1(x)|+|f_2(x)|\leqslant|\lambda|\,c_1+c_2.$

Par conséquent $\lambda\, f_1+f_2$ est une fonction de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornée sur $\mathbb{R}$; $\lambda\, f_1+f_2$ appartient à E_0.

Finalement : $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(f_1,f_2)\in\big(E_0\big)^2,\ \lambda\, f_1+f_2\in E_0$. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{E_0 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$

7) Soit f un élément de E_0 et soit x un réel.

$t\to tx$ et arctan sont continues sur $\mathbb{R}$. Par composition $t\to\arctan(tx)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus f_0 et $\varphi: t\to\dfrac{1}{1+t^2}$ sont également continues sur $\mathbb{R}$. Alors par produit $t\to\arctan(tx)\,\dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,+\infty[$.

Rappelons que arctan prend ses valeurs dans $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\forall t\in[0,+\infty[,\ |\arctan(tx)|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

f appartient à E_0 donc f est bornée sur $\mathbb{R}$. Alors $\forall t\in[0,+\infty[,\ |f(t)|\leqslant\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|=N_0(f)$.

Finalement $\forall t\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant|\arctan(tx)|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\ 0\leqslant|f(t)|\leqslant N_0(f)$ et $0\leqslant\dfrac{1}{1+t^2}$.

Donc $\forall t\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant\left|\arctan(tx)\,\dfrac{f(t)}{1+t^2}\right|=|\arctan(tx)|\ |f(t)|\ \dfrac{1}{1+t^2}\leqslant\dfrac{\pi}{2}\,N_0(f)\,\dfrac{1}{1+t^2}$.

• $\forall t\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant\left|\arctan(tx)\,\dfrac{f(t)}{1+t^2}\right|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\,N_0(f)\,\dfrac{1}{1+t^2}$.

• Comme nous l'avons vu plus haut $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\,N_0(f)\,\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}\,N_0(f)\,\dfrac{\pi}{2}$ donc $\dfrac{\pi^2}{4}\,N_0(f)$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives permettent de dire que :

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\arctan(tx)\,\frac{f(t)}{1+t^2}\right|\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\arctan(tx)\,\frac{f(t)}{1+t^2}\right|\mathrm{d}t\leqslant\frac{\pi^2}{4}\,N_0(f)$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\arctan(tx)\,\frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\arctan(tx)\,\frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\left|\int_0^{+\infty}\arctan(tx)\,\frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^{+\infty}\left|\arctan(tx)\,\frac{f(t)}{1+t^2}\right|\mathrm{d}t\leqslant\frac{\pi^2}{4}\,N_0(f).$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } f \text{ de } E_0 \text{ et pour tout réel } x,\ \int_0^{+\infty}\arctan(tx)\,\frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est absolument convergente.}}$$

8) Soit f un élément de E_0. Comme nous l'avons vu plus haut, pour tout réel x, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(tx)\,\frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$ est absolument convergente donc convergente. Par conséquent $\Phi(f)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

La question précédente a également montré que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \big|\Phi(f)(x)\big| = \left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(tx)\,\frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\,N_0(f)$.

Donc $\Phi(f)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \big|\Phi(f)(x)\big| \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\,N_0(f)$.

► *Remarque* *Ici un petit problème se pose. En effet si l'on veut être conforme au texte, pour parler de $N_0\big(\Phi(f)\big)$ il faut que $\Phi(f)$ appartienne à E_0. Or nous n'avons pas encore montré que $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et c'est même l'objet de la question suivante ! Par conséquent nous nous contenterons de remarquer que si h est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} |h(x)|$ existe si et seulement si $|h|$ est majorée sur $\mathbb{R}$ ou si et seulement si h est bornée sur $\mathbb{R}$.*

Donc si h est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $N_0(h)$ existe si et seulement si et seulement si h est bornée sur $\mathbb{R}$. ◄

$\forall x \in \mathbb{R},\ \big|\Phi(f)(x)\big| \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\,N_0(f)$. Ainsi $\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}}\big|\Phi(f)(x)\big|$ existe et est majoré par $\dfrac{\pi^2}{4}\,N_0(f)$.

La remarque et une petite extrapolation du texte nous autorisent à écrire que $N_0\big[\Phi(f)\big] \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\,N_0(f)$.

$$\boxed{\text{Soit } f \text{ un élément } E_0.\ \Phi(f) \text{ est bornée sur } \mathbb{R} \text{ et } N_0\big[\Phi(f)\big] \leqslant \frac{\pi^2}{4}\,N_0(f).}$$

Exercice *Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornées sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Montrer que l'application N de $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $\forall h \in \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ N(h) = \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} |h(x)|$ est une norme sur $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donc vérifie :

- $\forall h \in \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ N(h) = 0 \Longleftrightarrow h = 0_{\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ N(\lambda\, h) = |\lambda|\, N(h)$
- $\forall (h_1,h_2) \in \big(\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})\big)^2,\ N(h_1+h_2) \leqslant N(h_1) + N(h_2)$.

9) Dans a-, b-, c- et d- f est un élément de E_0.

a- x, A et h sont trois réels. On suppose que A est strictement positif et que h n'est pas nul.

$\Big|\big[\Phi(f)\big](x+h) - \big[\Phi(f)\big](x)\Big| = \left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(t(x+h))\,\frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \arctan(tx))\,\frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right|$.

$\Big|\big[\Phi(f)\big](x+h) - \big[\Phi(f)\big](x)\Big| = \left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)}{1+t^2}\,f(t)\,\mathrm{d}t\right|$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)}{1+t^2}\,f(t)\right| = \dfrac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2}\,|f(t)|$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)}{1+t^2}\,f(t)\right| \leqslant \dfrac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2}\,N_0(f)$.

De plus $\forall t \in [0,+\infty[,\ |\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)| \leqslant |\arctan(t(x+h))| + |\arctan(tx)| \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$. Alors :

$\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)}{1+t^2}\,f(t)\right| \leqslant \dfrac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2}\,N_0(f) \leqslant \dfrac{\pi\,N_0(f)}{1+t^2}$.

Rappelons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\pi\,N_0(f)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives permettent alors d'affirmer que :

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)}{1+t^2}\,f(t)\right|\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,N_0(f)\right)\mathrm{d}t$ convergent.

En plus $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)}{1+t^2}\,f(t)\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}\left(\frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,N_0(f)\right)\mathrm{d}t.$

Ce qui donne aussi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)}{1+t^2}\,f(t)\right|\mathrm{d}t\leqslant N_0(f)\int_0^{+\infty}\frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

Dans ces conditions $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)}{1+t^2}\,f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente (ce que nous savions) et nous pouvons écrire :

$\displaystyle\left|\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)}{1+t^2}\,f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^{+\infty}\left|\frac{\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)}{1+t^2}\,f(t)\right|\mathrm{d}t.$

Alors : $\displaystyle\Big|\big[\Phi(f)\big](x+h)-\big[\Phi(f)\big](x)\Big|\leqslant\int_0^{+\infty}\left|\frac{\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)}{1+t^2}\,f(t)\right|\mathrm{d}t$, puis :

$\displaystyle\Big|\big[\Phi(f)\big](x+h)-\big[\Phi(f)\big](x)\Big|\leqslant N_0(f)\int_0^{+\infty}\frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

Chasles permet alors de majorer $\Big|\big[\Phi(f)\big](x+h)-\big[\Phi(f)\big](x)\Big|$ par :

$\displaystyle N_0(f)\left(\int_0^{A}\frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_A^{+\infty}\frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right).$

Finalement si x est un réel, h un réel non nul et A un réel strictement positif, $\Big|\big[\Phi(f)\big](x+h)-\big[\Phi(f)\big](x)\Big|$ est majoré par $\displaystyle N_0(f)\left(\int_0^{A}\frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_A^{+\infty}\frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right).$

b- x, A et h sont trois réels. On suppose que A est strictement positif et que h n'est pas nul.

$\forall t\in[0,A],\ |\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|\leqslant|t(x+h)-tx|=|h|\,t$ et $\dfrac{1}{1+t^2}\geqslant 0$ d'après **4)**. Donc

$\forall t\in[0,A],\ \dfrac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\leqslant|h|\,\dfrac{t}{1+t^2}$ et $A>0$.

Alors $\displaystyle\int_0^{A}\frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant|h|\int_0^{A}\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

$\forall t\in[A,+\infty[,\ |\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|\leqslant|\arctan(t(x+h))|+|\arctan(tx)|\leqslant\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}=\pi$ et $\dfrac{1}{1+t^2}\geqslant 0$. Donc

$\forall t\in[A,+\infty[,\ \dfrac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\leqslant\pi\,\dfrac{1}{1+t^2}$, $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et $A>0$.

Alors $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\pi\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Ainsi :

$\displaystyle\int_0^{A}\frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_A^{+\infty}\frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant|h|\int_0^{A}\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\pi\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$

$N_0(f)\in[0,+\infty[$ donc $\displaystyle N_0(f)\left(\int_0^{A}\frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_A^{+\infty}\frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)$ est majoré par $\displaystyle N_0(f)\left(|h|\int_0^{A}\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\pi\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right).$

Ainsi $\left|\left[\Phi(f)\right](x+h)-\left[\Phi(f)\right](x)\right| \leqslant N_0(f)\left(|h|\displaystyle\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\pi\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right)$.

Finalement si x est un réel, h un réel non nul et A un réel strictement positif :

$$\left|\left[\Phi(f)\right](x+h)-\left[\Phi(f)\right](x)\right| \leqslant N_0(f)\left(|h|\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\pi\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right).$$

c- Soit x un réel et h un réel non nul. Posons $A=\dfrac{1}{|h|}\cdot$ A est strictement positif.

Alors **b-** donne : $\left|\left[\Phi(f)\right](x+h)-\left[\Phi(f)\right](x)\right| \leqslant N_0(f)\left(|h|\displaystyle\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\pi\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right)$.

$$\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^A\left(\frac{1}{2}\,\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\,\ln(1+t^2)\right]_0^A=\frac{1}{2}\,\ln(1+A^2)=\frac{1}{2}\,\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right).$$

Rappelons que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}\cdot$ Donc $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}-\int_0^A\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}-\arctan A$

Comme A est strictement positif **5)** donne $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\arctan\frac{1}{A}=\arctan|h|$. Finalement :

$$N_0(f)\left(|h|\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\pi\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right)=N_0(f)\left(|h|\,\frac{1}{2}\,\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right)+\pi\,\arctan|h|\right).$$

Ainsi $N_0(f)\left(|h|\displaystyle\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\pi\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right)=|h|\,\frac{N_0(f)}{2}\,\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right)+\pi\,N_0(f)\,\arctan|h|$.

Alors $\left|\left[\Phi(f)\right](x+h)-\left[\Phi(f)\right](x)\right| \leqslant |h|\,\dfrac{N_0(f)}{2}\,\ln\left(1+\dfrac{1}{h^2}\right)+\pi\,N_0(f)\,\arctan|h|$.

Si x est un réel et h un réel non nul : $\left|\left[\Phi(f)\right](x+h)-\left[\Phi(f)\right](x)\right| \leqslant |h|\,\dfrac{N_0(f)}{2}\,\ln\left(1+\dfrac{1}{h^2}\right)+\pi\,N_0(f)\,\arctan|h|$.

d- Soit x un réel. Posons $\forall h\in\mathbb{R},\ \psi(h)=\begin{cases}|h|\,\ln\left(1+\dfrac{1}{h^2}\right) & \text{si } h\neq 0\\ 0 & \text{si } h=0\end{cases}$

$\forall h\in\mathbb{R}^*,\ 0\leqslant\left|\left[\Phi(f)\right](x+h)-\left[\Phi(f)\right](x)\right|\leqslant\dfrac{N_0(f)}{2}\,\psi(h)+\pi\,N_0(f)\,\arctan|h|$.

Or $\left|\left[\Phi(f)\right](x+0)-\left[\Phi(f)\right](x)\right|=0=\dfrac{N_0(f)}{2}\,\psi(0)+\pi\,N_0(f)\,\arctan|0|$. Donc :

$\forall h\in\mathbb{R},\ 0\leqslant\left|\left[\Phi(f)\right](x+h)-\left[\Phi(f)\right](x)\right|\leqslant\dfrac{N_0(f)}{2}\,\psi(h)+\pi\,N_0(f)\,\arctan|h|$

$\forall h\in\mathbb{R}^*,\ |h|\,\ln\left(1+\dfrac{1}{h^2}\right)=|h|\,\ln\left(\dfrac{h^2+1}{h^2}\right)=|h|\ln(h^2+1)-|h|\,\ln\left(|h|^2\right)=|h|\,\ln(h^2+1)-2\,|h|\,\ln|h|$.

Donc $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(|h|\,\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right)\right)=\lim_{h\to 0}\left(|h|\,\ln(h^2+1)-2\,|h|\,\ln|h|\right)=0\times\ln(0^2+1)-2\times 0=0=\psi(0)$.

ψ est alors continue en 0. Par conséquent $\displaystyle\lim_{h\to 0}\psi(h)=\psi(0)=0$. Alors

- $\forall h\in\mathbb{R},\ 0\leqslant\left|\left[\Phi(f)\right](x+h)-\left[\Phi(f)\right](x)\right|\leqslant\dfrac{N_0(f)}{2}\,\psi(h)+\pi\,N_0(f)\,\arctan|h|$.

• $\lim_{h\to 0}\left(\dfrac{N_0(f)}{2}\,\psi(h)+\pi\,N_0(f)\,\arctan|h|\right)=\dfrac{N_0(f)}{2}\times 0+\pi\,N_0(f)\times 0=0.$

Par encadrement il vient $\lim_{h\to 0}\big[\Phi(f)\big](x+h)=\big[\Phi(f)\big](x)$. Ainsi $\Phi(f)$ est continue en x et ceci pour tout réel x.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } f \text{ de } E_0,\ \Phi(f) \text{ est continue en tout point de } \mathbb{R}.}$$

e- • Soit f un élément de E_0. Nous avons vu dans **8)** que $\Phi(f)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et dans **9) d-** que $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\Phi(f)$ appartient à E_0.

$\forall f\in E_0,\ \Phi(f)\in E_0$ donc Φ est une application de E_0 dans E_0.

• Soit λ un réel. Soient f_1 et f_2 deux éléments de E_0.

$\forall x\in\mathbb{R},\ \Phi(\lambda\,f_1+f_2)(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\arctan(tx)\,\frac{(\lambda\,f_1+f_2)(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left(\lambda\,\arctan(tx)\,\frac{f_1(t)}{1+t^2}+\arctan(tx)\,\frac{f_2(t)}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t.$

$\forall x\in\mathbb{R},\ \Phi(\lambda\,f_1+f_2)(x)=\lambda\displaystyle\int_0^{+\infty}\arctan(tx)\,\frac{f_1(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\arctan(tx)\,\frac{f_2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ car toutes les intégrales convergent.

$\forall x\in\mathbb{R},\ \Phi(\lambda\,f_1+f_2)(x)=\lambda\,\Phi(f_1)(x)+\Phi(f_2)(x)=\big(\lambda\,\Phi(f_1)+\Phi(f_2)\big)(x).\ \Phi(\lambda\,f_1+f_2)=\lambda\,\Phi(f_1)+\Phi(f_2).$

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(f_1,f_2)\in E_0^2,\ \Phi(\lambda\,f_1+f_2)=\lambda\,\Phi(f_1)+\Phi(f_2).$ Φ est linéaire.

Les deux points précédents montrent alors que :

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } E_0.}$$

Partie III - Étude d'un exemple.

► *Remarque L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constante égale à 1 est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ donc est un élément de E_0.*

Il est donc légitime de parler de son image g par Φ. Notons que la partie précédente permet de dire que g est un élément de E_0 donc que g est continue et bornée sur $\mathbb{R}$. ◄

10) Rappelons que arctan est impaire sur $\mathbb{R}$. Soit x un réel.

$$g(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\big(t(-x)\big)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(-tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{-\arctan(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -g(x).$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = -g(x)$.

$$\boxed{g \text{ est impaire sur } \mathbb{R}.}$$

11) Dans toute cette question x est un réel strictement positif.

a- arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc arctan est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$!

$\forall u \in \mathbb{R},\ \arctan'(u) = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot$ $\forall u \in \mathbb{R},\ \arctan''(u) = -\dfrac{2u}{(1+u^2)^2}\cdot$ $\forall u \in \mathbb{R},\ \big|\arctan''(u)\big| = \dfrac{2|u|}{(1+u^2)^2}\cdot$

$\forall u \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{1+u^2} - \big|\arctan''(u)\big| = \dfrac{1}{1+u^2} - \dfrac{2\,|u|}{(1+u^2)^2} = \dfrac{1+u^2-2\,|u|}{(1+u^2)^2} = \dfrac{(1-|u|)^2}{(1+u^2)^2} \geqslant 0.$

Alors $\forall u \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{1+u^2} - \big|\arctan''(u)\big| \geqslant 0$. Ainsi

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R},\ \big|\arctan''(u)\big| \leqslant \frac{1}{1+u^2}\cdot}$$

b- Soient a et b deux réels distincts et I le segment d'extrémités a et b. arctan est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on peut donc appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à arctan à l'ordre 1. Ceci donne :

$|\arctan b - \arctan a - (b-a)\ \arctan'(a)| \leqslant \dfrac{|b-a|^2}{2}\ \underset{u\in I}{\operatorname{Max}}\,|\arctan''(u)|.$

Par conséquent $\left|\arctan b - \arctan a - \dfrac{b-a}{1+a^2}\right| \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{2}\ \underset{u\in I}{\operatorname{Max}}\,|\arctan''(u)|.$

$\forall u \in I,\ \big|\arctan''(u)\big| \leqslant \dfrac{1}{1+u^2}$ et $u \to \dfrac{1}{1+u^2}$ est continue sur le segment I. Ainsi $\underset{u\in I}{\operatorname{Max}}\,|\arctan''(u)| \leqslant \underset{u\in I}{\operatorname{Max}}\,\dfrac{1}{1+u^2}\cdot$

Comme $\dfrac{(b-a)^2}{2}$ est positif : $\left|\arctan b - \arctan a - \dfrac{b-a}{1+a^2}\right| \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{2}\ \underset{u\in I}{\operatorname{Max}}\,\dfrac{1}{1+u^2}\cdot$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Soient } a \text{ et } b \text{ deux réels distincts et } I \text{ le segment d'extrémités } a \text{ et } b.\\ \left|\arctan b - \arctan a - \dfrac{b-a}{1+a^2}\right| \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{2}\ \underset{u\in I}{\operatorname{Max}}\,\dfrac{1}{1+u^2}\cdot\end{array}}$$

c- Soit h un réel de l'intervalle $\left]-\dfrac{x}{2}, \dfrac{x}{2}\right[$ et t un réel de l'intervalle $[0, +\infty[$.

Si $th = 0$ alors $\left|\arctan\big[t(x+h)\big] - \arctan(tx) - \dfrac{th}{1+t^2\,x^2}\right| = 0 \leqslant 0 = \dfrac{t^2\,h^2}{2}\ \dfrac{1}{1+\frac{t^2\,x^2}{4}}\cdot$ Supposons maintenant que th n'est pas nul.

Alors $t(x+h)$ et tx sont deux réels distincts. Notons encore I le segment d'extrémités tx et $t(x+h)$ et appliquons **b-**.

Il vient : $\left|\arctan\left[t(x+h)\right]-\arctan(tx)-\dfrac{t(x+h)-tx}{1+(tx)^2}\right|\leqslant\dfrac{\big(t(x+h)-tx\big)^2}{2}\,\underset{u\in I}{\mathrm{Max}}\,\dfrac{1}{1+u^2}\cdot$

Donc : $\left|\arctan\left[t(x+h)\right]-\arctan(tx)-\dfrac{th}{1+t^2\,x^2}\right|\leqslant\dfrac{t^2\,h^2}{2}\,\underset{u\in I}{\mathrm{Max}}\,\dfrac{1}{1+u^2}\cdot$

Soit u un élément du segment I d'extrémités tx et $t(x+h)$. $u\geqslant \mathrm{Min}(tx,t(x+h))$.

$t\geqslant 0$, $x>0$ et $h\in\left]-\dfrac{x}{2},\dfrac{x}{2}\right[$. Donc $x\geqslant\dfrac{x}{2}$ et $x+h\geqslant x-\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{2}\cdot$ Alors $tx\geqslant\dfrac{tx}{2}$ et $t(x+h)\geqslant\dfrac{tx}{2}\cdot$

Donc $u\geqslant\mathrm{Min}(tx,t(x+h))\geqslant\dfrac{tx}{2}\geqslant 0$.

Ceci donne successivement $u^2\geqslant\dfrac{t^2\,x^2}{4}$, $1+u^2\geqslant 1+\dfrac{t^2\,x^2}{4}>0$ et $\dfrac{1}{1+u^2}\leqslant\dfrac{1}{1+\frac{t^2\,x^2}{4}}\cdot$

$\forall u\in I,\ \dfrac{1}{1+u^2}\leqslant\dfrac{1}{1+\frac{t^2\,x^2}{4}}$ donc $\underset{u\in I}{\mathrm{Max}}\,\dfrac{1}{1+u^2}\leqslant\dfrac{1}{1+\frac{t^2\,x^2}{4}}\cdot$

Alors : $\left|\arctan\left[t(x+h)\right]-\arctan(tx)-\dfrac{th}{1+t^2\,x^2}\right|\leqslant\dfrac{t^2\,h^2}{2}\,\underset{u\in I}{\mathrm{Max}}\,\dfrac{1}{1+u^2}\leqslant\dfrac{t^2\,h^2}{2}\,\dfrac{1}{1+\frac{t^2\,x^2}{4}}$ car $\dfrac{t^2\,h^2}{2}$ est positif ou nul.

Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\forall h\in\left]-\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right[,\ \forall t\in[0,+\infty[,\ \left|\arctan\left[t(x+h)\right]-\arctan(tx)-\frac{th}{1+t^2\,x^2}\right|\leqslant\frac{t^2\,h^2}{2}\,\frac{1}{1+\frac{t^2\,x^2}{4}}\cdot}$$

d- Soit h un élément de $\left]-\dfrac{x}{2},\dfrac{x}{2}\right[$. Soit t un élément de $[0,+\infty[$.

$$\left|\frac{\arctan\left[t(x+h)\right]}{1+t^2}-\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}-\frac{th}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\right|=\left|\arctan\left[t(x+h)\right]-\arctan(tx)-\frac{th}{1+t^2\,x^2}\right|\times\frac{1}{1+t^2}\cdot$$

Or $\left|\arctan\left[t(x+h)\right]-\arctan(tx)-\dfrac{th}{1+t^2\,x^2}\right|\leqslant\dfrac{t^2\,h^2}{2}\,\dfrac{1}{1+\frac{t^2\,x^2}{4}}$ et $\dfrac{1}{1+t^2}\geqslant 0$ donc :

$$\left|\frac{\arctan\left[t(x+h)\right]}{1+t^2}-\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}-\frac{th}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\right|\leqslant\frac{t^2\,h^2}{2}\,\frac{1}{1+\frac{t^2\,x^2}{4}}\,\frac{1}{1+t^2}=2h^2\,\frac{t^2}{4+t^2x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\cdot$$

Finalement $\forall t\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant\left|\dfrac{\arctan\left[t(x+h)\right]}{1+t^2}-\dfrac{\arctan(tx)}{1+t^2}-\dfrac{th}{1+t^2\,x^2}\,\dfrac{1}{1+t^2}\right|\leqslant 2h^2\,\dfrac{t^2}{4+t^2x^2}\,\dfrac{1}{1+t^2}\cdot\quad(\bigstar)$

- $t\to\dfrac{t^2}{4+t^2x^2}\,\dfrac{1}{1+t^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$
- $\dfrac{t^2}{4+t^2x^2}\,\dfrac{1}{1+t^2}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{t^2}{t^2x^2}\,\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{1}{x^2}\,\dfrac{1}{t^2}$ (car $x\neq 0$).
- $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car $2>1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{4+t^2x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. $\displaystyle\int_0^{+\infty}2h^2\,\frac{t^2}{4+t^2x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge également.

($\bigstar$) et les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives permettent de dire que :

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{\arctan\left[t(x+h)\right]}{1+t^2}-\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}-\frac{th}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\right|\mathrm{d}t$ converge et est majorée par $\displaystyle\int_0^{+\infty}2h^2\,\frac{t^2}{4+t^2x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan\left[t(x+h)\right]}{1+t^2}-\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}-\frac{th}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

De plus on peut majorer $\left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan\left[t(x+h)\right]}{1+t^2}-\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}-\frac{th}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\right|$ par

$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\arctan\left[t(x+h)\right]}{1+t^2}-\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}-\frac{th}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\right|\mathrm{d}t$, puis par $\int_0^{+\infty} 2h^2\,\frac{t^2}{4+t^2x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $\left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan\left[t(x+h)\right]}{1+t^2}-\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}-\frac{th}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^{+\infty} 2h^2\,\frac{t^2}{4+t^2x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Ou encore $\left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan\left[t(x+h)\right]}{1+t^2}-\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}-\frac{th}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\right|\leqslant 2h^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{4+t^2x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ (★★).

1. $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan\left[t(x+h)\right]}{1+t^2}-\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}-\frac{th}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$ converge.
2. $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\left[t(x+h)\right]}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $g(x+h)$.
3. $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $g(x)$.

Ces trois points permettent alors de dire que :

1. $\int_0^{+\infty}\frac{th}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Donc $\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2})\,\mathrm{d}t$ converge également et $\int_0^{+\infty}\frac{th}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=h\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan\left[t(x+h)\right]}{1+t^2}-\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}-\frac{th}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=g(x+h)-g(x)-h\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(★★) permet alors d'écrire que $\left|g(x+h)-g(x)-h\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant 2h^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{4+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

> Soit h un élément de $\left]-\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right[$.
>
> 1. Les intégrales $\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{4+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.
> 2. $\left|g(x+h)-g(x)-h\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant 2h^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{4+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

e- x est toujours un réel strictement positif. Soit h un élément non nul de $\left]-\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right[$.

$\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h}-\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right|=\frac{1}{|h|}\left|g(x+h)-g(x)-h\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right|$.

$\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h}-\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{2h^2}{|h|}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{4+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=2|h|\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{4+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

$\forall h\in\left]-\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right[-\{0\},\ 0\leqslant\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h}-\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant 2|h|\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{4+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

De plus $\lim_{h\to 0}\left(2|h|\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{4+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)=0$.

Alors par encadrement : $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Donc g est dérivable en x et $g'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et pour tout réel } x \text{ strictement positif } g'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

f- Dans **10)** nous avons montré que g est impaire sur $\mathbb{R}$. En particulier $\forall x\in]-\infty,0[,\ g(x)=-g(-x)$.

$x\to -x$ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $\forall x\in]-\infty,0[, -x\in]0,+\infty[$. De plus g est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Alors par composition $x\to g(-x)$ est dérivable sur $]-\infty,0[$ donc $x\to -g(-x)$ est dérivable sur $]-\infty,0[$.

Ainsi g est dérivable sur $]-\infty,0[$.

De plus $\forall x\in]-\infty,0[,\ g'(x)=-\big(-g'(-x)\big)=g'(-x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\,(-x)^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur }]-\infty,0[\text{ et } \forall x\in]-\infty,0[,\ g'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\,x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

Exercice   Donner deux preuves de la croissance de g sur $\mathbb{R}$.

12) a- $g'(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2\times 1^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$. Soit C un réel strictement positif.

$$\int_0^{C}\frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{C}\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+t^2}\right]_0^C=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+C^2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+C^2}.$$

$$g'(1)=\lim_{C\to+\infty}\int_0^{C}\frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\lim_{C\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+C^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{g'(1)=\frac{1}{2}.}$$

b- Soit x un réel appartenant à $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Notons que x^2-1 n'est pas nul.

Observons que : $\forall t\in\mathbb{R},\ \displaystyle\frac{x^2}{1+t^2\,x^2}-\frac{1}{1+t^2}=\frac{x^2\,(1+t^2)-(1+t^2\,x^2)}{(1+t^2\,x^2)\,(1+t^2)}=\frac{x^2-1}{(1+t^2\,x^2)\,(1+t^2)}$.

Alors $\forall t\in\mathbb{R},\ \displaystyle\frac{1}{(1+t^2\,x^2)\,(1+t^2)}=\frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2}{1+t^2\,x^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)=\frac{x^2}{x^2-1}\,\frac{1}{1+t^2\,x^2}+\frac{1}{1-x^2}\,\frac{1}{1+t^2}$.

Ainsi $\forall t\in\mathbb{R},\ \displaystyle\frac{t}{(1+t^2\,x^2)\,(1+t^2)}=\frac{x^2}{x^2-1}\,\frac{t}{1+t^2\,x^2}+\frac{1}{1-x^2}\,\frac{t}{1+t^2}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } x \text{ est un réel de }]0,1[\cup]1,+\infty[, \text{ si } A(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1} \text{ et si } B(x)=\dfrac{1}{1-x^2} \text{ alors}\\[2mm] \forall t\in\mathbb{R},\ \dfrac{t}{(1+t^2\,x^2)\,(1+t^2)}=A(x)\,\dfrac{t}{1+t^2\,x^2}+B(x)\,\dfrac{t}{1+t^2}.\end{array}}$$

c- Soit x un réel appartenant à $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Soit C un réel strictement positif.

$\forall t\in\mathbb{R},\ \displaystyle\frac{t}{(1+t^2\,x^2)\,(1+t^2)}=\frac{x^2}{x^2-1}\,\frac{t}{1+t^2\,x^2}+\frac{1}{1-x^2}\,\frac{t}{1+t^2}=\frac{1}{2(x^2-1)}\left(\frac{2\,t\,x^2}{1+t^2\,x^2}-\frac{2t}{1+t^2}\right)$.

$$\int_0^{C}\frac{t}{(1+t^2\,x^2)\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2(x^2-1)}\int_0^{C}\left(\frac{2\,t\,x^2}{1+t^2\,x^2}-\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2(x^2-1)}\Big[\ln(1+t^2\,x^2)-\ln(1+t^2)\Big]_0^C.$$

$$\int_0^{C}\frac{t}{(1+t^2\,x^2)\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2(x^2-1)}\left[\ln\left(\frac{1+t^2\,x^2}{1+t^2}\right)\right]_0^C=\frac{1}{2(x^2-1)}\left[\ln\left(\frac{1+C^2\,x^2}{1+C^2}\right)-\ln\left(\frac{1+0^2\,x^2}{1+0^2}\right)\right].$$

$$\int_0^C \frac{t}{(1+t^2\,x^2)\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(x^2-1)}\,\ln\left(\frac{1+C^2\,x^2}{1+C^2}\right).$$

Comme x n'est pas nul : $\displaystyle\frac{1+C^2\,x^2}{1+C^2} \underset{C\to+\infty}{\sim} \frac{C^2\,x^2}{C^2} = x^2$ donc $\displaystyle\lim_{C\to+\infty} \frac{1+C^2\,x^2}{1+C^2} = x^2$.

Alors $\displaystyle\lim_{C\to+\infty} \ln\left(\frac{1+C^2\,x^2}{1+C^2}\right) = \ln x^2 = 2\,\ln x$ car x est strictement positif.

Ainsi $\displaystyle\lim_{C\to+\infty} \int_0^C \frac{t}{(1+t^2\,x^2)\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \lim_{C\to+\infty}\left(\frac{1}{2(x^2-1)}\,\ln\left(\frac{1+C^2\,x^2}{1+C^2}\right)\right) = \frac{1}{2(x^2-1)}\,(2\,\ln x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$.

Donc $\displaystyle g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2\,x^2)\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln x}{x^2-1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ dans }]0,1[\cup]1,+\infty[,\ g'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}.}$$

d- ln et $x \to \dfrac{1}{x^2-1}$ sont continues sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Par produit $x \to \dfrac{\ln x}{x^2-1}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

Ainsi g' est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

$\displaystyle\frac{\ln x}{x^2-1} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} = g'(1)$. Par conséquent g' est continue en 1.

Finalement g' est continue sur $]0,+\infty[$. Alors

$$\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

Exercice Q1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Q2. g est-elle dérivable en 0 ?

13) a- et b- Rappelons que g' est continue sur $]0,+\infty[$. Soit x un réel strictement positif.

$\forall \varepsilon \in]0,+\infty[,\ \displaystyle\int_\varepsilon^x g'(t)\,\mathrm{d}t = g(x) - g(\varepsilon)$.

g est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0 et $g(0)=0$. Alors $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^x g'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \big(g(x) - g(\varepsilon)\big) = g(x) - g(0) = g(x)$.

Donc $\displaystyle\int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $g(x)$ c'est à dire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Or $t \to \dfrac{\ln t}{t^2-1}$ coïncide avec g' sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. La restriction de g' à $]0,+\infty[$ est continue sur $]0,+\infty[$ et prolonge $t \to \dfrac{\ln t}{t^2-1}$ en 1.

Alors pour tout réel x strictement positif, $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t$ c'est à dire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif, } \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t.}$$

14) a- Soit x un réel strictement positif.

Notons que pour tout réel t strictement positif, tx est un réel strictement positif.

Alors $\forall t \in]0,+\infty[,\ \arctan\left(\dfrac{1}{tx}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(tx)$ d'après **5)**.

- $\forall t \in]0,+\infty[,\ \arctan\left(\dfrac{1}{tx}\right)\dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{1}{1+t^2} - \arctan(tx)\,\dfrac{1}{1+t^2}$.

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}\cdot$
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(tx)\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $g(x)$.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge comme combinaison linéaire de deux intégrales convergentes et vaut $\displaystyle\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^{+\infty}\arctan(tx)\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ donc $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 - g(x)$. Ainsi $\displaystyle g(x) = \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{\text{Si } x \text{ appartient à }]0,+\infty[\,:\ \int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge et } g(x) = \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

b- Soit x un réel strictement positif.

$\forall t \in]0,+\infty[,\ \arctan\left(\dfrac{1}{tx}\right)\dfrac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$

Alors $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

Donc $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\cdot$

Nous allons majorer successivement $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\cdot$

- $\forall t \in \left]0,\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right],\ 0 \leqslant \arctan\left(\dfrac{1}{tx}\right) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$. Donc $\forall t \in \left]0,\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right],\ \arctan\left(\dfrac{1}{tx}\right)\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{\pi}{2}\times 1 = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

Comme $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot$

Par conséquent : $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot}$

- $\forall t \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}},+\infty\right[,\ \arctan\left(\dfrac{1}{tx}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{tx}\right) - \arctan 0 \leqslant \left|\arctan\left(\dfrac{1}{tx}\right) - \arctan 0\right| \leqslant \left|\dfrac{1}{tx} - 0\right| = \left|\dfrac{1}{tx}\right| = \dfrac{1}{tx}$

d'après la question **4**.

$\forall t \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}},+\infty\right[,\ \arctan\left(\dfrac{1}{tx}\right) \leqslant \dfrac{1}{tx}$ et $\dfrac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ donc $\forall t \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}},+\infty\right[,\ \arctan\left(\dfrac{1}{tx}\right)\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{tx}\,\dfrac{1}{1+t^2}\cdot$

Finalement $\forall t \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}},+\infty\right[,\ \arctan\left(\dfrac{1}{tx}\right)\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{x}\,\dfrac{1}{t}\,\dfrac{1}{1+t^2}\cdot$

$\forall t \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}},+\infty\right[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \sqrt{x}$ et $\dfrac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ donc $\forall t \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}},+\infty\right[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{t}\,\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \sqrt{x}\,\dfrac{1}{1+t^2}\cdot$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\left(\sqrt{x}\,\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\frac{1}{t}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et est majorée par $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\left(\sqrt{x}\,\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$ donc par $\displaystyle\sqrt{x}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\cdot$

Rappelons que $\forall t \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}, +\infty\right[,\ \arctan\left(\dfrac{1}{tx}\right) \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{x}\,\dfrac{1}{t}\,\dfrac{1}{1+t^2}\cdot$

Alors $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{1}{t}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\sqrt{x}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\cdot$

$$\boxed{\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{1}{t}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\cdot}$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{1}{t}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\cdot$

Nous avons vu que : $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\cdot$

Alors : $\boxed{\displaystyle\left|\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{1}{t}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\cdot}$

$\dfrac{1}{\sqrt{x}} > 0$, $t \to \dfrac{1}{1+t^2}$ est positive sur $[0, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}\cdot$

Alors $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$. De plus $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \geqslant 0$ donc $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{\pi}{2}\cdot$ Par conséquent :

$$\left|\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{1}{t}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{x}}\cdot$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif, } \left|\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{1}{t}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{x}}\cdot}$$

c- $\forall x \in]0, +\infty[,\ 0 \leqslant \displaystyle\left|\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{\sqrt{x}} = 0$.

Donc par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

Or $\forall x \in]0, +\infty[, g(x) = \dfrac{\pi^2}{4} - \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{4}\cdot$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{4}\cdot}$$

15) a- Notons d'abord que $t \to \dfrac{\ln t}{t^2-1}$ est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Nous avons vu dans la question **13** que pour tout x dans $]0, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $g(x)$.

Ceci permet en particulier de dire que $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $g(2)$.

De plus $\forall x \in]2, +\infty[$, $\displaystyle\int_2^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t - \int_0^2 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = g(x) - g(2)$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\big(g(x) - g(2)\big) = \frac{\pi^2}{4} - g(2)$. Donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\pi^2}{4} - g(2)$.

Par conséquent $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\pi^2}{4} - g(2) + g(2)$ c'est à dire $\dfrac{\pi^2}{4}\cdot$ Alors :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } -\frac{\pi^2}{4}\cdot}$$

b- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$

$t \to \dfrac{1}{t}$ définit une bijection strictement décroissante de $]1,+\infty[$ sur $]0,1[$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.

Ceci autorise le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^0 \frac{\ln(1/u)}{1-(1/u)^2}\,(-1/u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{-\ln u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

c- Soit n dans $\mathbb{N}$.

- Comme nous l'avons déja vu $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

- Posons $\forall t \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ v_n(t) = \dfrac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}$. v_n est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

$v_n(t) \underset{t\to 0}{\sim} (\ln t)\, t^{2n+2}$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} v_n(t) = \lim_{t\to} \big((\ln t)\, t^{2n+2}\big) = 0$ par croissance comparée.

Ainsi v_n est prolongeable par continuité en 0.

$v_n(t) \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{t-1}{1-t^2} \times 1^{2n+2} = -\dfrac{1}{1+t}$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 1} v_n(t) = \lim_{t\to 1}\Big(-\frac{1}{1+t}\Big) = -\frac{1}{2}\cdot$

Ainsi v_n est prolongeable par continuité en 1.

Finalement v_n se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$ ce qui suffit largement pour dire que $\displaystyle\int_0^1 v_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

- Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Posons $\forall t \in]0,+\infty[,\ w_k(t) = t^{2k}\,\ln t$. w_k est continue sur $]0,+\infty[$.

Si k appartient à $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{t\to 0} w_k(t) = \lim_{t\to 0}(t^{2k}\,\ln t) = 0$ par croissance comparée ; w_k est alors prolongeable par continuité en 0 et $\displaystyle\int_0^1 w_k(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\big(\sqrt{t}\,|w_0(t)|\big) = \lim_{t\to 0}(\sqrt{t}\,|\ln t)| = 0$ par croissance comparée.

Alors $|w_0(t)| = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ au voisinage de 0, $\forall t \in]0,1], |w_0| \geqslant 0$, $\forall t \in]0,1]$, $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_0^1 |w_0(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

$\displaystyle\int_0^1 w_0(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

Finalement $\boxed{\text{pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^1 t^{2k}\,\ln t\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$

$\forall t \in]0,1[,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(t^{2k}\, \ln t\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\right) \ln t = \left(\sum_{k=0}^{n} \left(t^2\right)^k\right) \ln t = \frac{1-\left(t^2\right)^{n+1}}{1-t^2}\, \ln t = \frac{\ln t}{1-t^2} - \frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}.$

En intégrant entre 0 et 1 il vient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^{2k}\, \ln t \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\,\mathrm{d}t$ car toutes les intégrales convergent.

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^{2k}\, \ln t\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^{2k}\, \ln t\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\,\mathrm{d}t.}$$

d- Soit n un élément de $\mathbb{N}$. ln et $u_n : t \to \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$. $\forall t \in]0,1],\ \ln' t = \dfrac{1}{t}$ et $u_n'(t) = t^{2n}$.

Ceci justifie l'intégration par parties qui suit.

$\forall \varepsilon \in]0,1],\ \displaystyle\int_\varepsilon^1 t^{2n}\, \ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\, \ln t\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\, \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0 - \frac{\varepsilon^{2n+1}}{2n+1}\, \ln\varepsilon - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{2n}}{(2n+1)}\,\mathrm{d}t.$

$\forall \varepsilon \in]0,1],\ \displaystyle\int_\varepsilon^1 t^{2n}\, \ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{\varepsilon^{2n+1}}{2n+1}\, \ln\varepsilon - \left[\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right]_\varepsilon^1 = -\frac{\varepsilon^{2n+1}\, \ln\varepsilon}{2n+1} - \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{\varepsilon^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$

$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\varepsilon^{2n+1}\, \ln\varepsilon\right) = 0$ (par croissance comparée) et $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{2n+1} = 0.$

Alors $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 t^{2n}\, \ln t\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-\frac{\varepsilon^{2n+1}\, \ln\varepsilon}{2n+1} - \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{\varepsilon^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right) = -\frac{1}{(2n+1)^2}.$

Nous retrouvons ainsi l'existence de $\displaystyle\int_0^1 t^{2n}\, \ln t\,\mathrm{d}t$ et nous pouvons dire que cette intégrale vaut $-\dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ \int_0^1 t^{2n}\, \ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(2n+1)^2}.}$$

e- Nous avons vu dans **c-** que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $v_n : t \to \dfrac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

En particulier $v_0 : t \to \dfrac{\ln t}{1-t^2}\, t^2$ se prolonge en une fonction continue $\widehat{v_0}$ sur $[0, +\infty[$.

$|\widehat{v_0}|$ est continue sur le segment sur $[0,1]$ donc $|\widehat{v_0}|$ possède un maximum sur $[0,1]$ que nous noterons $\widehat{M}$.

Soit n dans $\mathbb{N}$. $\forall t \in]0,1[,\ \left|\dfrac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\right| = \left|v_0(t)\, t^{2n}\right| = |v_0(t)|\, t^{2n} = |\widehat{v_0}(t)|\, t^{2n} \leqslant \widehat{M}\, t^{2n}.$

De plus $\displaystyle\int_0^1 \left(\widehat{M}\, t^{2n}\right)\mathrm{d}t$ existe. Alors les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\right|\mathrm{d}t$ converge et est majorée par $\displaystyle\int_0^1 \left(\widehat{M}\, t^{2n}\right)\mathrm{d}t.$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\,\mathrm{d}t$ est alors absolument convergente et ainsi : $\displaystyle\left|\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\right|\mathrm{d}t.$

Donc $\displaystyle\left|\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left(M\, t^{2n}\right)\mathrm{d}t = M\, \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{M}{2n+1}.$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\left|\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M}{2n+1}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{2n+1} = 0.$

Alors par encadrement on obtient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = 0.$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = 0.}$$

f- Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 t^{2k}\,\ln t\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\,\mathrm{d}t.$

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{(2k+1)^2}\right) + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2} + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2} = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = 0.$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2} = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$

Finalement la série de terme général $\dfrac{1}{(2k+1)^2}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$

La question **15) a-** a donné $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi^2}{4}$ et **15) b-** a donné $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$

Alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi^2}{8}$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}\cdot$

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\cdot}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $2>1$. Posons $\displaystyle S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cdot$

$\forall r\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{2r}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{r}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{r-1}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{r}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{r-1}\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot$

En faisant tendre r vers $+\infty$ il vient : $S = \dfrac{1}{4}\,S + \dfrac{\pi^2}{8}\cdot$ Donc $\dfrac{3}{4}\,S = \dfrac{\pi^2}{8}\cdot$ $S = \dfrac{4}{3}\,\dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{\pi^2}{6}\cdot$

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{1}{n^2} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot}$$

Partie IV - Retour à l'étude de Φ.

16) • Soit f un élément de E_0 distinct de 0_{E_0}. Supposons que $N_0(f)=0$. Alors $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{z\in\mathbb{R}}|f(z)|=0$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant|f(x)|\leqslant\displaystyle\operatorname*{Sup}_{z\in\mathbb{R}}|f(z)|=0$. Alors $\forall x\in\mathbb{R},|f(x)|=0$ donc $\forall x\in\mathbb{R},f(x)=0$ et $f=0_{E_0}$!

Finalement $N_0(f)\neq 0$. Mieux $N_0(f)>0$. Or la question **8)** a montré que $N_0\big[\Phi(f)\big]\leqslant\dfrac{\pi^2}{4}\,N_0(f)$.

Donc en divisant par $N_0(f)$ qui est strictement positif on obtient : $\dfrac{N_0\big[\Phi(f)\big]}{N_0(f)}\leqslant\dfrac{\pi^2}{4}\cdot$

Par conséquent $\forall f\in E_0-\{0_{E_0}\},\ \dfrac{N_0\big[\Phi(f)\big]}{N_0(f)}\leqslant\dfrac{\pi^2}{4}\cdot$

• Reprenons la fonction g image par Φ de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constante égale à 1 , que nous noterons ici f_1.

Rappelons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=\frac{\pi^2}{4}\cdot$ Notons que f_1 appartient à $E_0-\{0_{E_0}\}$ et que $N_0(f_1)=\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}}|f_1(x)|=1$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ |g(x)|\leqslant N_0(g)$. En faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient $\left|\dfrac{\pi^2}{4}\right|\leqslant N_0(g)$. Alors $\dfrac{\pi^2}{4}\leqslant N_0(g)$.

Donc $\dfrac{\pi^2}{4}\leqslant N_0(g)=N_0\big[\Phi(f_1)\big]\leqslant\dfrac{\pi^2}{4}\,N_0(f_1)=\dfrac{\pi^2}{4}\times 1=\dfrac{\pi^2}{4}\cdot$

Alors $N_0\big[\Phi(f_1)\big]=\dfrac{\pi^2}{4}$ et $N_0(f_1)=1$. Donc $\dfrac{N_0\big[\Phi(f_1)\big]}{N_0(f_1)}=\dfrac{\pi^2}{4}\cdot$

Finalement f_1 appartient à $E_0-\{0_{E_0}\}$ et $\forall f\in E_0-\{0_{E_0}\},\ \dfrac{N_0\big[\Phi(f)\big]}{N_0(f)}\leqslant\dfrac{\pi^2}{4}=\dfrac{N_0\big[\Phi(f_1)\big]}{N_0(f_1)}\cdot$

$$\boxed{\text{Alors }\operatorname*{Sup}_{f\in E_0-\{0_{E_0}\}}\frac{N_0\big[\Phi(f)\big]}{N_0(f)}\text{ existe et vaut }\frac{\pi^2}{4}\cdot\text{ Mieux }\operatorname*{Max}_{f\in E_0-\{0_{E_0}\}}\frac{N_0\big[\Phi(f)\big]}{N_0(f)}\text{ existe et vaut }\frac{\pi^2}{4}\cdot}$$

► Remarques **1.** *Notons que dès la question* **8** *nous pouvions facilement montrer que les valeurs propres de Φ sont en valeur absolue inférieures ou égales à $\dfrac{\pi^2}{4}$ et cela rend la suite un peu déroutante dans ses objectifs.*

Soit μ une valeur propre de Φ. Soit f un vecteur propre associé. f n'est pas 0_{E_0} donc $N_0(f)>0$.

$N_0\big[\Phi(f)\big]\leqslant\dfrac{\pi^2}{4}N_0(f)$. *De plus* $N_0\big[\Phi(f)\big]=N_0\big[\mu\, f\big]=\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}}|(\mu\, f)(x)|=\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}}\big(|\mu|\,|f(x)|\big)=|\mu|\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|=|\mu|\,N_0(f)$.

Ainsi $|\mu|\,N_0(f)=N_0\big[\Phi(f)\big]\leqslant\dfrac{\pi^2}{4}N_0(f)$ *et* $N_0(f)>0$. *Alors en divisant par $N_0(f)$ on obtient* $|\mu|\leqslant\dfrac{\pi^2}{4}\cdot$

2. *Dans la suite λ est un réel tel que* $|\lambda|<\dfrac{4}{\pi^2}\cdot$

Comme $\gamma=\dfrac{\pi^2}{4}\,|\lambda|$, $\boxed{\gamma\text{ est un réel positif ou nul et strictement inférieur à 1.}}$

Φ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E_0. Donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, Φ^n est un endomorphisme de E_0.

Alors comme f appartient à E_0, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\Phi^n(f)$ est un élément de E_0 et λ^n est un réel.

Ainsi pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\lambda^n\,\Phi^n(f)$ est un élément de E_0. Finalement $\boxed{\text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ \varphi_n \text{ appartient à } E_0.}$

3. *Nous ne serons pas trop regardant sur le cas $n=0$ et $\lambda=0$... Dans ce cas nous confondrons $\lambda^n\Phi^n(f)$ et $\mathrm{Id}_{E_0}(f)$ donc φ_0 et f... Donc pour $n=0$ et $\lambda=0$ nous conviendrons que $\lambda^n=1$ et que de même $\gamma^n=1$.*

4. $\boxed{\forall \beta \in \mathbb{R},\ \forall h \in E_0,\ N_0(\beta\, h) = |\beta|\, N_0(h)}$ *comme nous l'avons implicitement vu dans la première remarque.*

5. $\forall h \in E_0,\ h \neq 0_{E_0} \Rightarrow N_0(h) > 0$ *comme nous l'avons vu dans la question* **16**.

De plus : $N_0(0_{E_0}) = \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} \left|0_{E_0}(x)\right| = 0$. *On peut maintenant affirmer que* $\boxed{\forall h \in E_0,\ N_0(h) = 0 \Longleftrightarrow h = 0_{E_0}.}$

6. *Terminons par une dernière petite propriété utile dans la suite. Soient* h_1 *et* h_2 *deux éléments de* E_0.

$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\big(h_1 + h_2\big)(x)\right| \leqslant |h_1(x)| + |h_2(x)| \leqslant N_0(h_1) + N_0(h_2)$. *Ainsi* $\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} \left|\big(h_1 + h_2\big)(x)\right| \leqslant N_0(h_1) + N_0(h_2)$.

Ce qui donne $N_0(h_1 + h_2) \leqslant N_0(h_1) + N_0(h_2)$. $\boxed{\forall (h_1, h_2) \in E_0^2,\ N_0(h_1 + h_2) \leqslant N_0(h_1) + N_0(h_2).}$

7. *Notons que les points 4, 5 et 6 montrent que* N_0 *est une norme sur* E_0. ◄

17) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\varphi_{n+1} = \lambda^{n+1}\, \Phi^{n+1}(f) = \lambda\, \lambda^n\, \Phi\big(\Phi^n(f)\big) = \lambda\, \Phi\big(\lambda^n\, \Phi^n(f)\big) = \lambda\, \Phi(\varphi_n)$. $\varphi_{n+1} = \lambda\, \Phi(\varphi_n)$.

$N_0(\varphi_{n+1}) = N_0\big(\lambda\, \Phi(\varphi_n)\big) = |\lambda|\, N_0\big[\Phi(\varphi_n)\big] \leqslant |\lambda|\, \dfrac{\pi^2}{4}\, N_0(\varphi_n) = \gamma\, N_0(\varphi_n)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ \varphi_{n+1} = \lambda\, \Phi(\varphi_n) \text{ et } N_0(\varphi_{n+1}) \leqslant \gamma\, N_0(\varphi_n).}$$

18) Supposons que $\lambda\, \Phi(f) = f$. Alors $\varphi_1 = \lambda\, \Phi(f) = f = \varphi_0$. Or $N_0(\varphi_1) \leqslant \gamma\, N_0(\varphi_0)$ donc $N_0(f) \leqslant \gamma\, N_0(f)$.

Or $f_0 \neq 0_{E_0}$ donc $N_0(f) > 0$. En divisant l'inégalité précédente par $N_0(f)$ qui est strictement positif on obtient :

$1 \leqslant \gamma = \dfrac{\pi^2}{4}\, |\lambda|$. Alors $\dfrac{4}{\pi^2} \leqslant |\lambda|$ ce qui contredit l'hypothèse $|\lambda| < \dfrac{4}{\pi^2}$.

$$\boxed{\text{On ne peut pas avoir } f \in E_0 - \{0_{E_0}\} \text{ et } \lambda\, \Phi(f) = f.}$$

On ne peut donc pas avoir $f \in E_0 - \{0_{E_0}\}$ et $(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\, \Phi)(f) = 0_{E_0}$. Alors le noyau de $\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\, \Phi$ est réduit à $\{0_{E_0}\}$.

$$\boxed{\text{Le noyau de } \mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\, \Phi \text{ est réduit à } \{0_{E_0}\} \text{ donc } \mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\, \Phi \text{ est un endomorphisme injectif de } E_0.}$$

19) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ N_0(\varphi_n) \leqslant \gamma^n\, M$.

- $N_0(\varphi_0) = N_0(f) = M = \gamma^0\, M \leqslant \gamma^0\, M$! La propriété est vraie pour $n = 0$.

- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n + 1$.

$N_0(\varphi_n) \leqslant \gamma^n\, M$ (d'après l'hypothèse de récurrence), $N_0(\varphi_{n+1}) \leqslant \gamma\, N_0(\varphi_n)$ (d'après la question **17**) et $\gamma \geqslant 0$.

Alors $N_0(\varphi_{n+1}) \leqslant \gamma\, N_0(\varphi_n) \leqslant \gamma\, \gamma^n\, M = \gamma^{n+1}\, M$. Ceci achève la récurrrence.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ N_0(\varphi_n) \leqslant \gamma^n\, M.}$$

- $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant N_0(\varphi_n) \leqslant \gamma^n\, M$.

- $\gamma \in [0, 1[$ donc $|\gamma| < 1$. Alors la série de terme général γ^n est convergente. Il en est de même pour la série de terme général $\gamma^n\, M$.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $N_0(\varphi_n)$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 0} N_0(\varphi_n) \text{ converge.}}$$

20) Soit x un réel.

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |\varphi_n(x)| \leqslant N_0(\varphi_n)$ et la série de terme général $N_0(\varphi_n)$ converge. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $|\varphi_n(x)|$ converge.

Ainsi la série de terme général $\varphi_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x\text{, la série } \sum_{n\geqslant 0} \varphi_n(x) \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$$

21) Soit x un réel.

Nous venons de voir que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \varphi_n(x)$ est absolument convergente donc $|\varphi(x)| = \left|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x)\right| \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \big|\varphi_n(x)\big|$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |\varphi_n(x)| \leqslant N_0(\varphi_n)$ et la série de terme général $N_0(\varphi_n)$ converge.

Alors $|\varphi(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \big|\varphi_n(x)\big| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n)$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n)$. Ceci permet de dire que :

$$\boxed{\varphi \text{ est bornée sur } \mathbb{R}.}$$

► *Remarque* $\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^n M = \frac{M}{1-\gamma}$ *car* $|\gamma| < 1$. $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \leqslant \frac{M}{1-\gamma}$.

Ce qui pourra donner $N_0(\varphi) \leqslant \dfrac{M}{1-\gamma}$ *lorsque nous aurons montré que* φ *appartient à* E_0... ◄

22) a- Soient n dans $\mathbb{N}$, x dans $\mathbb{R}$ et h dans $\mathbb{R}^*$.

- φ_n appartient à E_0 et $\varphi_{n+1} = \lambda\, \Phi(\varphi_n)$.
- $\big|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x+h)\big| = \big|\lambda\, \Phi(\varphi_n)(x+h) - \lambda\, \Phi(\varphi_n)(x)\big| = |\lambda|\, \big|\Phi(\varphi_n)(x+h) - \Phi(\varphi_n)(x)\big|$.
- Comme φ_n appartient à E_0 la question **9) c** donne :

$\Big|\Phi(\varphi_n)(x+h) - \Phi(\varphi_n)(x)\Big| \leqslant |h|\, \dfrac{N_0(\varphi_n)}{2}\, \ln\left(1 + \dfrac{1}{h^2}\right) + \pi\, N_0(\varphi_n) \arctan|h|$. Or $|\lambda| \geqslant 0$ donc :

$$\big|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)\big| = |\lambda|\, \big|\Phi(\varphi_n)(x+h) - \Phi(\varphi_n)(x)\big| \leqslant |\lambda| \left[|h|\, \frac{N_0(\varphi_n)}{2}\, \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) + \pi\, N_0(\varphi_n) \arctan|h|\right].$$

$$\big|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)\big| \leqslant |\lambda|\, N_0(\varphi_n) \left[\frac{|h|}{2}\, \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) + \pi \arctan|h|\right].$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R}^*,\ \big|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)\big| \leqslant |\lambda|\, N_0(\varphi_n) \left[\frac{|h|}{2}\, \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) + \pi \arctan|h|\right].}$$

b- Soient x dans $\mathbb{R}$ et h dans $\mathbb{R}^*$. Soit r un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\left|\sum_{n=0}^{r} \varphi_n(x+h) - \sum_{n=0}^{r} \varphi_n(x)\right| = \left|\sum_{n=0}^{r} \big(\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)\big)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{r} \big|\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)\big|.$$

$$\left|\sum_{n=0}^{r} \varphi_n(x+h) - \sum_{n=0}^{r} \varphi_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{r} \big|\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)\big| + \big|\varphi_0(x+h) - \varphi_0(x)\big|.$$

$$\left|\sum_{n=0}^{r} \varphi_n(x+h) - \sum_{n=0}^{r} \varphi_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{r-1} \big|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)\big| + \big|f(x+h) - f(x)\big|.$$

$$\left|\sum_{n=0}^{r} \varphi_n(x+h) - \sum_{n=0}^{r} \varphi_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{r-1} \left(|\lambda|\, N_0(\varphi_n)\ \left[\frac{|h|}{2}\ \ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) + \pi\ \arctan|h|\right]\right) + \big|f(x+h) - f(x)\big|.$$

$$\left|\sum_{n=0}^{r} \varphi_n(x+h) - \sum_{n=0}^{r} \varphi_n(x)\right| \leqslant |\lambda|\ \left(\sum_{n=0}^{r-1} N_0(\varphi_n)\right)\ \left[\frac{|h|}{2}\ \ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) + \pi\ \arctan|h|\right] + \big|f(x+h) - f(x)\big|.$$

Or les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \varphi_n(x+h)$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \varphi_n(x)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} N_0(\varphi_n)$ convergent donc en faisant tendre r vers $+\infty$ il vient :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x+h) - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x)\right| \leqslant |\lambda|\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n)\right)\ \left[\frac{|h|}{2}\ \ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) + \pi\ \arctan|h|\right] + \big|f(x+h) - f(x)\big|.\ \text{Donc :}$$

$$\big|\varphi(x+h) - \varphi(x)\big| \leqslant |\lambda|\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n)\right)\ \left[\frac{|h|}{2}\ \ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) + \pi\ \arctan|h|\right] + \big|f(x+h) - f(x)\big|.$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \forall h\in\mathbb{R}^*,\ \big|\varphi(x+h) - \varphi(x)\big| \leqslant |\lambda|\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n)\right)\ \left[\frac{|h|}{2}\ \ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) + \pi\ \arctan|h|\right] + \big|f(x+h) - f(x)\big|.}$$

c- Soit x un réel. Rappelons que dans **9) d-** nous avons posé $\forall h\in\mathbb{R},\ \psi(h) = \begin{cases} |h|\ \ln\left(1+\dfrac{1}{h^2}\right) & \text{si } h\neq 0 \\ 0 & \text{si } h = 0\end{cases}$ et montré que ψ est continue en 0.

Donc $\forall h\in\mathbb{R}^*,\ \big|\varphi(x+h) - \varphi(x)\big| \leqslant |\lambda|\ \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n)\right)\ \left[\dfrac{1}{2}\,\psi(h) + \pi\ \arctan|h|\right] + \big|f(x+h) - f(x)\big|$. Mieux :

$\forall h\in\mathbb{R},\ 0\leqslant \big|\varphi(x+h) - \varphi(x)\big| \leqslant |\lambda|\ \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n)\right)\ \left[\dfrac{1}{2}\,\psi(h) + \pi\ \arctan|h|\right] + \big|f(x+h) - f(x)\big|$ car $0\leqslant 0$!

Or $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(|\lambda|\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n)\right)\ \left[\frac{1}{2}\,\psi(h) + \pi\ \arctan|h|\right] + \big|f(x+h) - f(x)\big|\right) = |\lambda|\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n)\right)\ \left[\frac{1}{2}\times 0 + \pi\ \times 0\right] +$ $\big|f(x) - f(x)\big|$ car ψ, arctan et f sont continues en 0.

Donc $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(|\lambda|\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n)\right)\ \left[\frac{1}{2}\,\psi(h) + \pi\ \arctan|h|\right] + \big|f(x+h) - f(x)\big|\right) = 0.$

Il vient alors par encadrement $\displaystyle\lim_{h\to 0}\varphi(x+h) = \varphi(x)$. φ est continue en x.

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Rappelons que φ est bornée sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\boxed{\varphi \text{ appartient à } E_0.}$$

23) Application aux valeurs spectrales de Φ.

a- $\forall n\in\mathbb{N},\ \left(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi\right)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k - (\lambda\,\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) = \sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k - \sum_{k=0}^{n+1} \big(\lambda\,\Phi(\varphi_k)\big) = \sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k - \sum_{k=0}^{n+1} \varphi_{k+1}.$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \left(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi\right)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k - \sum_{k=1}^{n+2} \varphi_k = \varphi_0 - \varphi_{n+2} = f - \varphi_{n+2}.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \big(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi\big)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) = f - \varphi_{n+2}.}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ N_0\left[\big(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi\big)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) - f\right] = N_0\big(-\varphi_{n+2}\big) = |-1|\,N_0\big(\varphi_{n+2}\big) = N_0\big(\varphi_{n+2}\big).$$

Or la série de terme général $N(\varphi_n)$ converge donc $\lim\limits_{n\to+\infty} N_0(\varphi_n) = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} N_0(\varphi_{n+2}) = 0$ et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} N_0\left[\big(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi\big)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) - f\right] = 0.}$$

b- Montrons que $(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(\varphi) = f$ ou que $(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(\varphi) - f = 0_{E_0}$.

Pour cela et d'après la remarque 5 de la question 16 il suffit de montrer que $N_0\Big[(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(\varphi) - f\Big] = 0$.

Posons, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varphi_k$ et $R_n = \varphi - S_n$. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi = S_n + R_n$.

Notons que φ est un élément de E_0 et pour tout k dans $\mathbb{N}$, φ_k appartient également à E_0.

Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$, S_n et R_n sont des éléments de E_0 car E_0 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(\varphi) - f = (\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(S_{n+1}) - f + (\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(R_{n+1})$. La remarque 6 de la question 16 donne :

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant N_0\Big[(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(\varphi) - f\Big] \leqslant N_0\Big[(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(S_{n+1}) - f\Big] + N_0\Big[(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(R_{n+1})\Big]$ $\quad$ (**1**).

Dans **23) a-** nous avons montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_0\Big[(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(S_{n+1}) - f\Big] = 0$.

Si nous montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_0\Big[(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(R_{n+1})\Big] = 0$, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent nous obtiendrons successivement :

$0 \leqslant N_0\Big[(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(\varphi) - f\Big] \leqslant 0$, $N_0\Big[(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(\varphi) - f\Big] = 0$, $(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(\varphi) - f = 0_E$ et enfin $(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(\varphi) = f$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $N_0\Big[(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(R_{n+1})\Big] = N_0\Big[R_{n+1} - \lambda\,\Phi(R_{n+1})\Big] \leqslant N_0(R_{n+1}) + N_0\Big[-\lambda\,\Phi(R_{n+1})\Big]$.

Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_0\Big[(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(R_{n+1})\Big] = 0$

$N_0\Big[(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(R_{n+1})\Big] \leqslant N_0(R_{n+1}) + |-\lambda|\,N_0\Big[\Phi(R_{n+1})\Big] = N_0(R_{n+1}) + |\lambda|\,N_0\Big[\Phi(R_{n+1})\Big]$.

$N_0\Big[(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(R_{n+1})\Big] \leqslant N_0(R_{n+1}) + |\lambda|\,\dfrac{\pi^2}{4}\,N_0(R_{n+1}) \leqslant N_0(R_{n+1}) + \dfrac{4}{\pi^2}\,\dfrac{\pi^2}{4}\,N_0(R_{n+1}) = 2\,N_0(R_{n+1})$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant N_0\Big[(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(R_{n+1})\Big] \leqslant 2\,N_0(R_{n+1})$ $\quad$ (**2**).

Soit n dans $\mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ R_{n+1}(x) = \varphi(x) - S_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k(x) = \sum_{k=n+2}^{+\infty} \varphi_k(x)$.

Nous avons vu dans la question **17.** que, pour tout réel x, la série de terme général $\varphi_k(x)$ est absolument convergente et que la série de terme général $N_0(\varphi)$ converge.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \big|R_{n+1}(x)\big| = \left|\displaystyle\sum_{k=n+2}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+2}^{+\infty} |\varphi_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+2}^{+\infty} N_0(\varphi_k)$.

Donc $0 \leqslant N_0(R_{n+1}) = \operatorname*{Sup}\limits_{x\in\mathbb{R}} |R_{n+1}(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+2}^{+\infty} N_0(\varphi_k)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant N_0(R_{n+1}) \leqslant \sum_{k=n+2}^{+\infty} N_0(\varphi_k)$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=n+2}^{+\infty} N_0(\varphi_k) \right) = 0$ comme reste d'une série convergente.

Alors par encadrement $\lim_{n\to+\infty} N_0(R_{n+1}) = 0$.

Toujours par encadrement, (**2**) donne alors $\lim_{n\to+\infty} N_0\Big[(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(R_{n+1}) \Big] = 0$.

Alors le résultat de **23) a-** et (**1**) donnent en faisant tendre n vers $+\infty$: $0 \leqslant N_0\Big[(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(\varphi) - f \Big] \leqslant 0$.

Comme nous l'avons dit plus haut ceci donne successivement : $N_0\Big[(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(\varphi) - f \Big] = 0$, $(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(\varphi) - f = 0_E$ et enfin $(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(\varphi) = f$.

$$\boxed{(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(\varphi) = f.}$$

Nous venons de montrer que pour tout élément f de $E_0 - \{0_{E_0}\}$ il existe un élément φ de E_0 tel que $(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(\varphi) = f$.

Or $(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(0_{E_0}) = 0_{E_0}$. Donc pour tout élémen f de E_0 il existe un élément φ de E_0 tel que $(\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi)\,(\varphi) = f$.

Par conséquent

$$\boxed{\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi \text{ est un endomorphisme surjectif de } E_0.}$$

Rappelons que la question **18** a montré que $\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi$ est un injectif. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Id}_{E_0} - \lambda\,\Phi \text{ est un automorphisme de } E_0, \text{ ceci pour tout réel } \lambda \text{ tel que } |\lambda| < \frac{4}{\pi^2}\cdot}$$

c- Soit μ un élément de $\mathbb{R}^*$ tel que $\Phi - \mu\,\mathrm{Id}_{E_0}$ ne soit pas bijectif. Alors $-\dfrac{1}{\mu}\left(\Phi - \mu\,\mathrm{Id}_{E_0}\right)$ n'est pas bijectif.

Donc $\mathrm{Id}_{E_0} - \dfrac{1}{\mu}\Phi$ n'est pas bijectif. Alors d'après ce qui précède on a nécessairement $\left|\dfrac{1}{\mu}\right| \geqslant \dfrac{4}{\pi^2} > 0$. Ainsi $|\mu| \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\cdot$

$$\boxed{\text{Si } \mu \text{ est un élément de } \mathbb{R}^* \text{ tel que } \Phi - \mu\,\mathrm{Id}_{E_0} \text{ ne soit pas bijectif, } |\mu| \leqslant \frac{\pi^2}{4}\cdot}$$

Notons que si $\mu = 0 : |\mu| \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\cdot$! Alors

$$\boxed{\text{Si } \mu \text{ est un élément de } \mathbb{R} \text{ tel que } \Phi - \mu\,\mathrm{Id}_{E_0} \text{ ne soit pas bijectif, } |\mu| \leqslant \frac{\pi^2}{4}\cdot}$$

On a encore :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \mu \text{ est un élément de } \mathbb{R} \text{ tel que } \Phi - \mu\,\mathrm{Id}_{E_0} \text{ ne soit pas injectif, } |\mu| \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\cdot \\ \text{Ainsi si } \mu \text{ est une valeur propre de } \Phi,\ |\mu| \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\cdot \text{ Donc } \mathrm{Sp}\,\Phi \subset \left[-\dfrac{\pi^2}{4}, \dfrac{\pi^2}{4}\right]. \end{array}}$$
