

Corrigé Maths HEC 2 ECS 2015

Partie I : Probabilité de surpassement et espérance

1.a. Nous savons que si X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, alors pour tout $x > 0$, $S_X(x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$. Ainsi pour $A > 0$,

$$\int_0^A S_X(x) dx = \int_0^A e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^A = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda A}}{\lambda} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda}.$$

Et donc
$$\int_0^{+\infty} S_X(x) dx = \frac{1}{\lambda} = E(X).$$

1.b. Rappelons que $S_X = 1 - F_X$. Alors $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ représente l'aire entre la droite d'équation $y = 1$ et la courbe représentative de F .

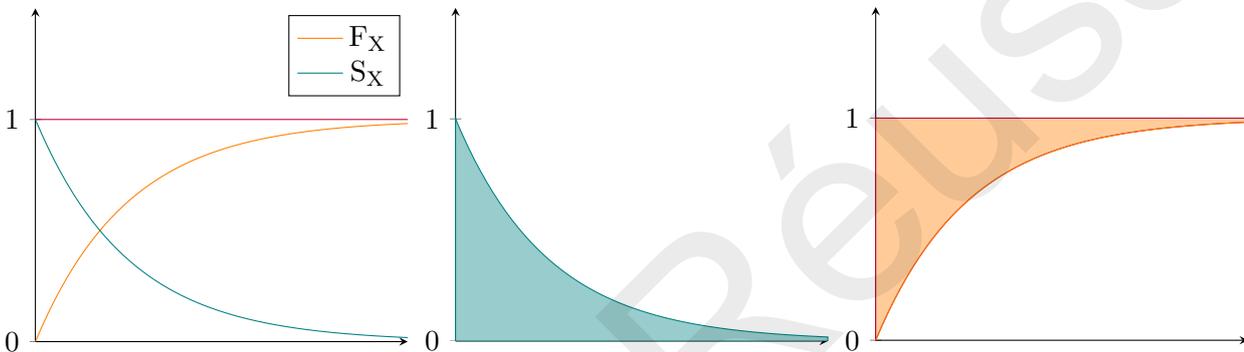


FIGURE 1 – Lien entre S_X et F_X . FIGURE 2 – L'intégrale de S_X . FIGURE 3 – $E(X)$ et F_X .

2.a. La fonction h est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a $h(x) \sim \frac{1}{x^2}$.

Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge (intégrale de Riemann), par critère de comparaison pour les fonctions positives,

il en est de même de $\int_1^{+\infty} h(x) dx$, et donc de $\int_0^{+\infty} h(x) dx$.

2.b. Supposons que deux tels réels c et d existent. Alors pour tout $x \geq 0$,

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2} \Rightarrow 1 = c(x+2) + d(x+1) = (c+d)x + (2c+d).$$

Deux fonctions polynomiales coïncident sur \mathbf{R}_+ si et seulement si elles ont les mêmes coefficients, donc

nécessairement $\begin{cases} c+d=0 \\ 2c+d=1 \end{cases}$. Après résolution, on obtient $\boxed{c=1, d=-1}$.

On en déduit qu'une primitive de $h(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ est $H : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x+2) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$.

2.c. La fonction f_0 est positive sur \mathbf{R} , et continue sauf éventuellement en 0.

De plus, pour $A > 0$, on a

$$\int_0^A f_0(x) dx = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^A h(x) dx = \frac{1}{\ln(2)} \left[\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \right]_0^A = \frac{1}{\ln(2)} \left(\ln\left(\frac{A+1}{A+2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right).$$

Lorsque $A \rightarrow +\infty$, alors $\frac{A+1}{A+2} \rightarrow 1$ et donc $\ln\left(\frac{A+1}{A+2}\right) \rightarrow 0$. On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) dx = \int_0^{+\infty} f_0(x) dx = -\frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 1.$$

Ainsi, f_0 est une densité de probabilité.

3.a. X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_0(x) dx$ converge absolument.

Or, au voisinage de $+\infty$, $x f_0(x) \sim \frac{1}{\ln(2)} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x \ln(2)}$.

Mais $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, et donc par critère de comparaison pour les fonctions positives, il en est de même de $\int_1^{+\infty} x f_0(x) dx$. Par conséquent, X n'admet pas d'espérance.

3.b. Par définition, on a $S_X(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} f_0(t) dt$.

Mais le même calcul que celui effectué à la question 2.c prouve que

$$S_X(x) = \int_x^{+\infty} f_0(t) dt = -\frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

Au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$ et $\frac{1}{x+1} \rightarrow 0$. Donc

$$S_X(x) = \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x \ln(2)}.$$

3.c. Nous savons que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, et donc par critère de comparaison pour les fonctions positives, il en

est de même de $\int_1^{+\infty} S_X(x) dx$, et donc $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ diverge.

4.a. Par définition de S_X , on a $S_X = 1 - F_X$.

Or, comme toute fonction de répartition, F_X est croissante de limite égale à 1 en $+\infty$, donc S_X est décroissante sur \mathbf{R} , de limite nulle en $+\infty$.

4.b. Nous savons que F_X , comme toute fonction de répartition, est continue à droite en tout point.

Donc $S_X = 1 - F_X$ est également continue à droite en tout point.

S_X est continue en 0 si et seulement si elle y est continue à gauche. Or, pour $x < 0$, on a $S_X(x) = 1$ car X est à valeurs dans \mathbf{R}_+ .

Donc S_X est continue à gauche en 0 si et seulement

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} S_X(x) = S_X(0).$$

Or, $S_X(0) = P(X > 0)$, et donc S_X est continue à gauche si et seulement si $P(X > 0) = 1$.

Mais $1 = P(X \geq 0) = P(X = 0) + P(X > 0)$, et donc S_X est continue à gauche si et seulement si $P(X = 0) = 0$.

5.a. Si X admet une densité, alors F_X est continue, et donc $S_X = 1 - F_X$ est également continue.

De plus, pour $x \geq 0$, on a

$$S_X(x) = 1 - F_X(x) = 1 - \int_{-\infty}^x f(t) dt = 1 - \int_0^x f(t) dt.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$, et donc S_X est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$. De plus, on a alors, pour $x > 0$, $S'_X(x) = -f(x)$.

5.b. Pour $x \in]0, 1]$, on a $0 \leq x f(x) \leq f(x)$.

Or f est une densité, de sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge, et donc il en est de même de $\int_0^1 f(x) dx$.

Par critère de comparaison pour les fonctions positives, il en est de même de $\int_0^1 x f(x) dx$.

5.c. Soit $\varepsilon \in]0, A]$. Alors sur le segment $[\varepsilon, A]$, les fonctions $u = S_X$ et $v = x$ sont de classe \mathcal{C}^1 : on peut donc procéder à une intégration par parties.

$$\int_{\varepsilon}^A S_X(x) dx = [x S_X(x)]_{\varepsilon}^A - \int_{\varepsilon}^A x S'_X(x) dx = A S_X(A) - \varepsilon S_X(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^A x f(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A S_X(A) + \int_0^A x f(x) dx.$$

En effet, la fonction S_X est continue, de sorte que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon S_X(\varepsilon) = 0 \times S_X(0) = 0$. Par conséquent, $\int_0^A S_X(x) dx$ converge et

$$\int_0^A S_X(x) dx = AS_X(A) + \int_0^A xf(x) dx.$$

5.d. Si $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ converge, alors la fonction S_X étant à valeurs positives, pour tout $A > 0$, $\int_0^A S(x) dx \leq \int_0^{+\infty} S_X(x) dx$. Et alors

$$\forall A > 0, \int_0^A xf(x) dx = \int_0^A S_X(x) dx - AS_X(A) \leq \int_0^A S_X(x) dx \leq \int_0^{+\infty} S_X(x) dx.$$

Puisque $x \mapsto xf(x)$ est positive sur \mathbf{R}_+ , la fonction $A \mapsto \int_0^A xf(x) dx$ est croissante sur \mathbf{R}_+^* , et nous venons de prouver qu'elle est majorée. Par conséquent, elle admet une limite finie en $+\infty$, et donc $\int_0^{+\infty} xf(x) dx$ converge (et donc converge absolument car il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive).

On en déduit que X admet une espérance.

5.e. Soit $A \geq 0$. Alors pour tout $x \in [A, +\infty[$, $xf(x) \geq Af(x)$, et alors par croissance de l'intégrale,

$$\int_A^{+\infty} xf(x) dx \geq \int_A^{+\infty} Af(x) dx = A \int_A^{+\infty} f(x) dx = AP(X > A) = AS_X(A).$$

5.f. Si X admet une espérance, alors $\int_A^{+\infty} xf(x) dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$ car il s'agit du reste d'une intégrale convergente.

Et alors par le théorème des gendarmes, $AS_X(A) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit que $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ converge et

$$\int_0^{+\infty} S_X(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A S_X(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} AS_X(A) + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A xf(x) dx = 0 + \int_0^{+\infty} xf(x) dx = E(X).$$

Inversement, si $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ converge, alors par 5.d, X admet une espérance, et donc nous venons de prouver que

$$\int_0^{+\infty} S_X(x) dx = E(X).$$

Par conséquent, X admet une espérance **si et seulement si** $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ converge et alors

$$\int_0^{+\infty} S_X(x) dx = E(X).$$

6.a. Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$S_X(k) = P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} P(X = i) = \sum_{i=k+1}^n P(X = i) + \sum_{i=n+1}^{+\infty} P(X = i) = \sum_{i=k+1}^n P(X = i) + P(X \geq n+1).$$

Alors il vient

$$\sum_{k=0}^n S_X(k) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=k+1}^n P(X = i) + P(X \geq n+1) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= (n+1)P(X \geq n+1) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n P(X=i) \\
 &\stackrel{i \geq k+1 \Leftrightarrow k \leq i-1}{=} (n+1)P(X \geq n+1) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} P(X=i) \\
 &= \boxed{(n+1)P(X \geq n+1) + \sum_{i=1}^n iP(X=i)}
 \end{aligned}$$

6.b. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a, d'après la question précédente,

$$\sum_{k=0}^n kP(X=k) \leq \sum_{k=0}^n S_X(k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} S_X(k).$$

Ainsi, la suite de terme général $\sum_{k=0}^n kP(X=k)$ est croissante et majorée, donc elle converge.

Par conséquent, la série de terme général $kP(X=k)$ converge, et étant à termes positifs, elle converge absolument. Donc X admet une espérance.

6.c. Pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$0 \leq (n+1)P(X \geq n+1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1)P(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k).$$

Or si X admet une espérance, la série de terme général $kP(X=k)$ converge, de sorte que la suite de ses restes tend vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k) = 0.$$

Et alors par le théorème des gendarmes, $(n+1)P(X \geq n+1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n S_X(k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)P(X \geq n+1) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n kP(X=k) = 0 + \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k) = E(X).$$

Inversement, si $\sum_k S_X(k)$ converge, alors X admet une espérance, et donc nous venons de prouver que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} S_X(k) = E(X).$$

Ainsi, $\sum_k S_X(k)$ converge si et seulement si X admet une espérance et alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} S_X(k) = E(X).}$$

6.d.i. Soit $x \in [0, N[$. Alors X étant à valeurs entières, en notant $k = \lfloor x \rfloor$, on a

$$S_X(x) = P(X > x) = P(X > k) = S_X(k).$$

Donc la fonction S_X vérifie $S_X(x) = S_X(\lfloor x \rfloor)$. Ou encore :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \forall x \in [k, k+1[, S_X(x) = S_X(k).$$

Ainsi, il vient

$$\int_0^N S_X(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} S_X(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} S_X(k)dx = \sum_{k=0}^{N-1} S_X(k)dx = \sum_{k=0}^{N-1} S_X(k).$$

Notons que ce résultat est encore valable pour $N = 0$.

6.d.ii. D'après ce qui précède, pour $A \geq 1$, on a

$$\int_0^A S_X(x)dx = \int_0^{[A]} S_X(x)dx + \int_{[A]}^A S_X(x)dx = \int_0^{[A]} S_X(x)dx + \int_{[A]}^A S_X([A])dx = \sum_{k=0}^{[A]-1} S_X(k) + (A - [A])S_X([A]).$$

Mais $0 \leq A - [A] \leq 1$, et $\lim_{A \rightarrow +\infty} S_X([A]) = 0$ (car la série de terme général $S_X(k)$ converge, et donc son terme général tend vers 0). On en déduit que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} (A - [A])S_X([A]) = 0.$$

Alors, en passant à la limite, il vient

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A S_X(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{[A]-1} S_X(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} S_X(k) = \boxed{E(X)}.$$

Partie II : Fonctions de distorsion et espérances corrigées : un exemple.

7. Exemple

7.a Φ est strictement croissante sur \mathbf{R} car sa dérivée φ y est strictement positive. De plus, Φ est continue et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = 1$, donc par le théorème de la bijection, Φ réalise une bijection de \mathbf{R} dans $]0, 1[$.

7.b w_α est continue sur $]0, 1[$ car composée de fonctions continues.

De plus, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Psi(x) - \Psi(\alpha) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} w_\alpha(x) = 0 = w_\alpha(0)$, de sorte que w_α est continue en 0.

De même, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \Psi(x) - \Psi(\alpha) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} w_\alpha(x) = 1 = w_\alpha(1)$. Ainsi w_α est continue en 1.

Par conséquent w_α est continue sur $[0, 1]$. Enfin, Ψ est dérivable sur $]0, 1[$ car il s'agit de la bijection réciproque d'une fonction dont la dérivée ne s'annule jamais. Par composition de fonctions dérivables, w_α est dérivable sur $]0, 1[$.

7.c D'après la formule de dérivation des fonctions composées,

$$\forall x \in]0, 1[, w'_\alpha(x) = \Psi'(x)\Phi'(\Psi(x) - \Psi(\alpha)) = \frac{1}{\varphi(\Psi(x))} \varphi(\Psi(x) - \Psi(\alpha)) = e^{\Psi(x)^2/2} e^{-(\Psi(x) - \Psi(\alpha))^2/2} = e^{\Psi(\alpha)\Psi(x) - \frac{\Psi(\alpha)^2}{2}}.$$

7.d L'équation de la tangente à la courbe représentative de w_α au point d'abscisse α est

$$y = w'_\alpha(\alpha)(x - \alpha) + w_\alpha(\alpha) = e^{\frac{\Psi(\alpha)^2}{2}}(x - \alpha) + \Phi(0) = e^{\frac{\Psi(\alpha)^2}{2}}(x - \alpha) + \frac{1}{2}.$$

7.e Nous avons déjà vérifié que w_α est continue sur $[0, 1]$, et nous avons trivialement $w_\alpha(0) = 0$ et $w_\alpha(1) = 1$. Par positivité de l'exponentielle, on a évidemment $w'_\alpha(x) > 0$ pour $x \in]0, 1[$, et donc w_α est strictement croissante sur $]0, 1[$. Étant continue, elle est alors croissante sur $[0, 1]$.

Puisque Ψ est la bijection réciproque d'une fonction strictement croissante, elle est strictement croissante. Or, $\Psi(\alpha) < 0$, de sorte que

$$x \mapsto \Psi(x)\Psi(\alpha) - \frac{\Psi(\alpha)^2}{2}$$

est décroissante.

Par croissance de l'exponentielle, w'_α est décroissante sur $]0, 1[$. On en déduit donc que w_α est concave sur $]0, 1[$.

Ceci signifie que $\forall (x, y) \in]0, 1[^2, \forall \lambda \in [0, 1], w_\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda w_\alpha(x) + (1 - \lambda)w_\alpha(y)$.

Par continuité de w_α , en fixant λ et en faisant tendre x vers 0, cette relation est toujours vérifiée pour $x = 0$ et $y \in]0, 1[$. Sur le même principe, on vérifie en fait qu'elle reste valable pour tous $(x, y) \in [0, 1]^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$.

Et donc w_α est bien concave sur $[0, 1]$.

En conclusion, w_α est bien une fonction de distorsion.

8.a D'après le théorème de transfert, X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2}} dt$ converge (absolument, mais il s'agit d'une fonction à valeurs positives).

Or, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$e^t e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2}} = e^{t - \frac{t^2}{2} + \mu t - \frac{\mu^2}{2}} = e^{-\frac{(t-(\mu+1))^2}{2} + \mu + \frac{1}{2}}.$$

Procédons alors au changement de variables $u = t - (\mu + 1)$, qui réalise une bijection \mathcal{C}^1 de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-(\mu+1))^2}{2} + \mu + \frac{1}{2}} dt \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{\mu + \frac{1}{2}} du$$

sont de même nature. Or, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{\mu + \frac{1}{2}} du = e^{\mu + \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ converge et vaut $e^{\mu + \frac{1}{2}}$.

Donc X admet une espérance et

$$E(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}}.$$

8.b Par définition de X , pour tout réel $x > 0$, on a (la fonction \ln étant croissante)

$$S_X(x) = P(X > x) = P(e^Y > x) = P(Y > \ln(x))$$

par croissance de la fonction \ln . Or, $P(Y > x) = 1 - \Phi(\ln x) = \Phi(-\ln x)$. Et alors

$$w_\alpha(S_X(x)) = \Phi(\Psi(\Phi(-\ln(x)))) - \Psi(\alpha) = \Phi(-\ln x - \Psi(\alpha)).$$

D'autre part, on a

$$P(Xe^{-\Psi(\alpha)} > x) = P(X > xe^{\Psi(\alpha)}) = P(Y > \ln(x) + \Psi(\alpha)) = 1 - \Phi(\ln(x) + \Psi(\alpha)) = \Phi(-\ln x - \Psi(\alpha)).$$

On a donc bien

$$\forall x > 0, w_\alpha(S_X(x)) = P(Xe^{-\Psi(\alpha)} > x).$$

8.c Par définition de l'espérance corrigée, sous réserve de convergence,

$$E_{w_\alpha}(X) = \int_0^{+\infty} w_\alpha(S_X(x)) dx = \int_0^{+\infty} P(Xe^{-\Psi(\alpha)} > x) dx = \int_0^{+\infty} P(X > e^{\Psi(\alpha)} x) dx = \int_0^{+\infty} S_X(e^{\Psi(\alpha)} x) dx.$$

Procédons au changement de variables $u = xe^{\Psi(\alpha)}$, qui réalise une bijection \mathcal{C}^1 de $[0, +\infty[$ sur lui-même. Alors les intégrales

$$\int_0^{+\infty} S_X(e^{\Psi(\alpha)} x) dx \text{ et } \int_0^{+\infty} S_X(u) e^{-\Psi(\alpha)} du$$

sont de même nature, et en cas de convergence sont égales.

Mais X admet une espérance d'après la question 8.a, de sorte que par la question 5.f, la seconde intégrale converge et vaut $e^{-\Psi(\alpha)} E(X)$. Ainsi, $E_{w_\alpha}(X)$ existe et vaut

$$E_{w_\alpha}(X) = e^{-\Psi(\alpha)} E(X) = e^{-\Psi(\alpha)} e^{\mu + \frac{1}{2}}.$$

Notons que puisque $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, alors $\Psi(\alpha) \leq 0$ et donc $e^{-\Psi(\alpha)} > 1$. Ceci est bien cohérent avec le résultat (à venir) de la question 11.a.

9.a \mathbf{p} et \mathbf{q} sont deux vecteurs lignes à 97 colonnes.

\mathbf{p} contient alors les $0.02 + 0.01 \times k, k \in \llbracket 0, 96 \rrbracket$. Et \mathbf{q} contient les $\Psi(0.02 + 0.01 \times k) - \Psi(\alpha), k \in \llbracket 0, 96 \rrbracket$.

9.b La ligne (4) peut être complétée en

`wa = cdfnor("PQ",q,0,1)`

9.c Si $\alpha < \alpha'$ sont deux réels de $]0, 1[$, alors par stricte croissance de Ψ , on a $\Psi(\alpha) < \Psi(\alpha')$. Et donc

$$\forall x \in]0, 1[, \Psi(x) - \Psi(\alpha') < \Psi(x) - \Psi(\alpha)$$

ce qui, par stricte croissance de Φ , implique que $w_{\alpha'}(x) < w_{\alpha}(x)$.

Par conséquent, la courbe du dessus correspond à $\alpha = 0.2$.

9.d Commençons par donner une méthode pour tracer *approximativement* ces tangentes avec **Scilab**.

En remplaçant la ligne (2) par $\mathbf{p} = [0.01:0.01:0.99]$, nous pouvons ajouter deux points à chacune des courbes, ceux d'abscisses respectives 0.01 et 0.99.

Ensuite, en traçant la droite passant par le point d'abscisse 0.01 et $(0,0)$, on obtient une corde de w_{α} , qui doit être une bonne approximation de la tangente en $(0,0)$ (rappelons que le coefficient directeur de la tangente est la limite du taux d'accroissement). On procède de même avec le point d'abscisse 0.99 et le point $(1,1)$.

Toutefois, ceci ne nous garantit pas une précision suffisante... La précision peut tout de même être améliorée en réduisant le pas, par exemple en passant de 0.01 à 0.005, voire moins.

Donnons à présent une justification mathématique.

• En $(0,0)$: d'après l'inégalité des pentes (la fonction w_{α} est concave sur $[0,1]$), on a, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\frac{w_{\alpha}(x) - w_{\alpha}(0)}{x} \geq \frac{w_{\alpha}(x) - w_{\alpha}(x/2)}{x/2} < 0.$$

Mais w_{α} étant de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$, on a (par décroissance et positivité de w'_{α})

$$\forall x \in]0, 1[, w_{\alpha}(x) - w_{\alpha}(x/2) = \int_{x/2}^x w'_{\alpha}(t) dt \geq w'_{\alpha}(x) \times \frac{x}{2}.$$

Et alors

$$\frac{w_{\alpha}(x) - w_{\alpha}(0)}{x} \geq w'_{\alpha}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

On en déduit que le taux d'accroissement de w_{α} en 0 tend vers $+\infty$, et donc w_{α} n'est pas dérivable en 0 et sa courbe représentative admet une tangente verticale au point de coordonnées $(0,0)$.

• En $(1,1)$ la fonction w_{α} est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. De plus, sur $[1-h, 1[$, sa dérivée est majorée par $w'_{\alpha}(1-h)$ car w'_{α} est décroissante. Donc par le théorème des accroissements finis, on a

$$\forall h \in]0, 1[, |w_{\alpha}(1-h) - w_{\alpha}(1)| \leq w'_{\alpha}(1-h)h.$$

Soit encore

$$\forall h \in]0, 1[, \left| \frac{w_{\alpha}(1-h) - w_{\alpha}(1)}{h} \right| \leq w'_{\alpha}(1-h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0.$$

Donc w_{α} est dérivable en 1, de dérivée égale à 0. La tangente de w_{α} en $(1,1)$ est alors la droite d'équation $y = 1$.

9.e Lorsque $\alpha \rightarrow 0$, $\Psi(\alpha) \rightarrow -\infty$. Et alors pour $x \in]0, 1[$, $w_{\alpha}(x) = \Phi(\Psi(x) - \Psi(\alpha)) \rightarrow 1$.

Ainsi, la courbe représentative de w_{α} «se rapproche» lorsque $\alpha \rightarrow 0$ de la courbe représentative de

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Partie III : Sous-additivité des espérances corrigées

10.a Il s'agit de la définition de la concavité : g est concave sur $[0, 1]$ si et seulement si pour tous $a, b \in [0, 1]^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$g(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda g(a) + (1 - \lambda)g(b).$$

En prenant $a = 1 - \frac{1}{n}$, $b = \frac{1}{n}$ et $\lambda = x$, on obtient

$$g\left(x\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1 - x)\frac{1}{n}\right) \geq xg\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1 - x)g\left(\frac{1}{n}\right).$$

10.b Par définition d'une fonction de distorsion, g est continue sur $[0, 1]$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(1 - \frac{1}{n}\right) = g(1) = 1$.

Et de même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) = g(0) = 0$.

Enfin, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(x\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1 - x)\frac{1}{n}\right) = g(x).$$

Donc en passant à la limite dans l'inégalité de la question précédente, il vient $g(x) \geq x$.

10.c Posons $\lambda = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + b - a}$. Alors il est évident que $\lambda \in [0, 1]$ car $b - a \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. De plus, on a alors

$$\lambda a + (1 - \lambda)(b - \varepsilon) = \frac{a\varepsilon}{\varepsilon + b - a} + (b - a)\frac{\varepsilon + b - a}{(b + \varepsilon)} = \frac{b^2 - ab + b\varepsilon}{\varepsilon + b - a} = b\frac{\varepsilon + b - a}{\varepsilon + b - a}.$$

Et de même, on a

$$(1 - \lambda)a + \lambda(b + \varepsilon) = a\frac{b - a}{\varepsilon + b - a} + \frac{\varepsilon(b + \varepsilon)}{\varepsilon + b - a} = \frac{ab - a^2 + \varepsilon b + \varepsilon^2}{\varepsilon + b - a} = (a + \varepsilon)\frac{\varepsilon + b - a}{\varepsilon + b - a} = a + \varepsilon.$$

Donc il existe bien un réel $\lambda \in [0, 1]$ vérifiant les deux conditions requises.

En appliquant deux fois la définition de la concavité de g telle que rappelée dans la question 10.a, il vient

$$g(b) \geq \lambda g(a) + (1 - \lambda)g(b + \varepsilon) \text{ et } g(a + \varepsilon) \geq (1 - \lambda)g(a) + \lambda g(b + \varepsilon).$$

En ajoutant ces deux inégalités, on obtient

$$g(b) + g(a + \varepsilon) \geq g(a) + g(b + \varepsilon)$$

soit encore

$$g(b + \varepsilon) - g(a + \varepsilon) \leq g(b) - g(a).$$

11.a Pour $x \in \mathbf{R}$, d'après la question 10.b, on a $0 \leq S_X(x) \leq g(S_X(x))$.

Or puisque nous avons fait l'hypothèse que $E_g(X)$ existe, c'est donc que $\int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx$ converge. Alors

par critère de comparaison pour les fonctions positives, $\int_0^{+\infty} S_X(x)dx$ converge et

$$\int_0^{+\infty} S_X(x)dx \leq \int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx.$$

Mais par la question 5.f, X admet alors une espérance et

$$E(X) = \int_0^{+\infty} S_X(x)dx \leq \int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx = E_g(X).$$

11.b Si X est la variable aléatoire certaine égale à $a \geq 0$, alors $S_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < a \\ 0 & \text{si } x \geq a \end{cases}$

Et alors $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ converge et

$$E_g(X) = \int_0^{+\infty} g(S_X(x)) dx = \int_0^a g(S_X(x)) dx = \int_0^a 1 dx = a = E(X).$$

11.c Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$S_{rX+s}(x) = P(rX + s > x) = P\left(X > \frac{x-s}{r}\right) = S_X\left(\frac{x-s}{r}\right).$$

Le changement de variables $u = \frac{x-s}{r}$ réalise une bijection \mathcal{C}^1 de $[0; +\infty[$ sur $[-\frac{s}{r}, +\infty[$ avec $rdu = dx$. Ainsi, les intégrales $\int_0^{+\infty} g\left(S_X\left(\frac{x-s}{r}\right)\right) dx$ et $r \int_{-\frac{s}{r}}^{+\infty} g(S_X(u)) du$ sont de même nature.

Mais puisque $E_g(X)$ existe par hypothèse, alors $\int_0^{+\infty} g(S_X(x)) dx$ converge.

De plus, la fonction S_X est constante égale à 1 sur $[-\frac{s}{r}, 0]$, de même que la fonction $g \circ S_X$. Donc $\int_{-\frac{s}{r}}^0 g(S_X(u)) du$ converge et vaut $\frac{s}{r}$. Ceci prouve que $\int_{-\frac{s}{r}}^{+\infty} g(S_X(x)) dx$ converge et alors

$$\begin{aligned} E_g(rX + s) &= \int_0^{+\infty} g(S_{rX+s}(x)) dx = \int_0^{+\infty} g\left(S_X\left(\frac{x-s}{r}\right)\right) dx \\ &= r \int_{-\frac{s}{r}}^{+\infty} g(S_X(u)) du = r \left(-\frac{s}{r} + \int_0^{+\infty} g(S_X(u)) du\right) = rE_g(X) + s. \end{aligned}$$

11.d Si $P(0 \leq T \leq W) = 1$, alors pour tout x réel, on a $P(T \geq x) \leq P(W \geq x)$.

En effet, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[0 \leq T \leq W], \overline{[0 \leq T \leq W]}\}$, on obtient

$$P(T > x) = P([T > x] \cap [0 \leq T \leq W]) + P([T > x] \cap \overline{[0 \leq T \leq W]}).$$

Or, $P([T > x] \cap \overline{[0 \leq T \leq W]}) \leq P(\overline{[0 \leq T \leq W]}) = 0$ et $[T > x] \cap [0 \leq T \leq W] \subset [W > x]$ donc $P([T > x] \cap [0 \leq T \leq W]) \geq P(W > x)$.

Et alors par croissance de g , pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(S_T(x)) \leq g(S_W(x))$.

Ainsi, si $E_g(T)$ et $E_g(W)$ existent, il vient (par croissance de l'intégrale)

$$E_g(T) = \int_0^{+\infty} g(S_T(x)) dx \leq \int_0^{+\infty} g(S_W(x)) dx = E_g(W).$$

12. Par hypothèse, Y est presque sûrement inférieure à B . Et donc pour $x \leq B$, alors $S_X(x) = P(X > x) \leq 1$ et pour $x \geq B$, $S_X(x) = P(X > x) = 0$.

Pour être tout à fait rigoureux, il aurait fallu, comme à la question 11.d, utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[0 \leq Y \leq B], \overline{[0 \leq Y \leq B]}\}$, mais nous ne le ferons pas afin de ne pas alourdir la rédaction et admettrons directement ce résultat.

Ainsi, si f désigne la fonction définie sur \mathbf{R}_+^* par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, B] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors pour tout $x > 0, 0 \leq S_X(x) \leq f(x)$. Et donc par croissance de $g, \forall x > 0, 0 \leq g(S_X(x)) \leq g(f(x))$.

Mais $g(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, B] \\ 0 & \text{si } x > B \end{cases}$. Il est alors évident que $\int_0^{+\infty} g(f(x))dx = B$. Par domination,

$\int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx$ existe et de plus

$$E_g(X) = \int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx \leq \int_0^{+\infty} g(f(x))dx = B.$$

Si $X + Y > x$, alors $X > x - Y \geq x - B$. Donc $[X + Y > x] \subset [X > x - B]$, et par croissance de P , il vient alors $0 \leq S_{X+Y}(x) \leq S_X(x - B)$.

Et donc $\forall x \in \mathbf{R}, 0 \leq g(S_{X+Y}(x)) \leq g(S_X(x - B))$.

Par définition, $E_g(X + Y)$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} g(S_{X+Y}(x))dx$ converge.

Mais en procédant au changement de variables $u = x - B$, qui réalise une bijection \mathcal{C}^1 de $]0, +\infty[$ sur $] - B, +\infty[$, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} g(S_X(x - B))dx \text{ et } \int_{-B}^{+\infty} g(S_X(u))du$$

sont de même nature, et en cas de convergence sont égales. Or

$$\int_{-B}^{+\infty} g(S_X(u))du = \int_{-B}^0 g(S_X(u))du + \int_0^{+\infty} g(S_X(u))du = \int_{-B}^0 1du + E_g(X) = E_g(X) + B.$$

Donc $\int_0^{+\infty} g(S_X(x - B))dx$ converge et vaut $E_g(X) + B$.

Alors $\int_0^{+\infty} g(S_{X+Y}(x))dx$ converge et

$$E_g(X + Y) = \int_0^{+\infty} g(S_{X+Y}(x))dx \leq \int_0^{+\infty} g(S_X(x - B))dx = \boxed{E_g(X) + B}.$$

13.a. Pour $n = 0$, on a $E(Y) = 0$ car Y est presque sûrement constante, égale à 0. Donc, d'après 11.b, $E_g(Y) = 0$.

Et alors nous avons prouvé à la question 12 que

$$E_g(X + Y) \leq E_g(X) + 0 = E_g(X) + E_g(Y).$$

13.b.i. Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $[Z = 0], [Z > 0]$ (qui est bien un système (quasi)-complet d'événements car Z est une variable aléatoire à valeurs (presque sûrement) positives. Alors pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} S_{X+Z}(x) &= P(X + Z > x) = P(X + Z > x | Z = 0)P(Z = 0) + P(X + Z > x | Z > 0)P(Z > 0) = \\ &= (1 - p)P(X > x | Z = 0) + pP_{[Z > 0]}(X + Z > x) = pP_{[Z = 0]}(X > x) + pS_{X+Z}^*(x). \end{aligned}$$

13.b.ii. Toujours avec la formule des probabilités totales appliquée avec le même système complet d'événements, on obtient :

$$S_X(x) = P(X > x | Z = 0)P(Z = 0) + P(X > x | Z > 0)P(Z > 0) = (1 - p)P_{[Z = 0]}(X > x) + pS_X^*(x).$$

$$S_Z(x) = \underbrace{P(Z > x | Z = 0)}_{=0} P(Z = 0) + P(Z > x | Z > 0)P(Z > 0) = pS_Z^*(x).$$

13.b.iii. Notons que par la question précédente, $g(S_Z(x)) = g(pS_Z^*(x))$, et donc il s'agit de prouver que

$$g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) \leq g(pS_{X+Z}^*(x)) - g(pS_X^*(x)).$$

Soit $b = pS_{X+Z}^*(x) \in]0, 1]$. D'après la question 13.b.i, on a $b < S_{X+Z}(x)$. Soit alors $\varepsilon = (1-p)P_{[Z=0]}(X > x)$, de telle sorte que $b + \varepsilon = S_{X+Z}(x)$.

Posons $a = pS_X^*(x)$. Alors $a + \varepsilon = pS_X^*(x) + (1-p)P_{[Z=0]}(X > x) = S_X(x)$ (d'après la question 13.b.ii). Le résultat de la question 10.c nous permet alors d'affirmer que

$$g(b + \varepsilon) - g(a + \varepsilon) \leq g(b) - g(a) \Leftrightarrow g(S_{X+Y}(x)) - g(S_X(x)) \leq g(pS_{X+Y}^*(x)) - g(pS_X^*(x)).$$

En retranchant $g(S_Z(x)) = g(pS_Z^*(x))$ aux deux membres, on obtient

$$g(S_{X+Y}(x)) - g(S_X(x)) - g(S_Z(x)) \leq g(pS_{X+Y}^*(x)) - g(pS_X^*(x)) - g(pS_Z^*(x)).$$

13.c. Il est évident que h est continue et croissante sur $[0, 1]$ car g l'est.

De plus, $h(0) = \frac{g(0)}{g(p)} = 0$ et $h(1) = \frac{g(p)}{g(p)} = 1$.

Enfin, pour $(a, b) \in [0, 1]^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a $pa \in [0, 1]$ et $pb \in [0, 1]$, de sorte que par concavité de g ,

$$g(\lambda pa + (1-\lambda)pb) \geq \lambda g(pa) + (1-\lambda)g(pb)$$

ce qui après division par $g(p)$ nous donne

$$h(\lambda a + (1-\lambda)b) = \frac{g(p(\lambda a + (1-\lambda)b))}{g(p)} \geq \lambda \frac{g(pa)}{g(p)} + (1-\lambda) \frac{g(pb)}{g(p)} = \lambda h(a) + (1-\lambda)h(b).$$

Ainsi la fonction h est concave sur $[0, 1]$. Par conséquent, h est une fonction de distorsion.

L'hypothèse de récurrence est très claire : on suppose que le résultat est vrai pour toute probabilité P sur (Ω, \mathcal{A}) . En particulier, il est vrai pour la probabilité P^ .*

Pour la probabilité P^* , la variable Z est presque sûrement à valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. En effet, par définition,

$$P^*(Z \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket) = \frac{P(Z \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \cap [Z > 0])}{P(Z > 0)}$$

Mais $P(Z > 0) = P([Z > 0] \cap [Z \in [0, n+1]]) + \underbrace{P([Z > 0] \cap [Z \notin [0, n+1]])}_{=0} = P([Z > 0] \cap [Z \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket]) =$

$P([Z > 0] \cap [Z \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket])$. Ainsi $P^*(Z \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket) = \frac{P(Z > 0)}{P(Z > 0)} = 1$.

Alors $Z - 1$ est presque sûrement (toujours pour la probabilité P^*) à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

Notons E_h^* l'espérance corrigée (lorsqu'elle existe) pour la probabilité P^* . Autrement dit, pour toute variable aléatoire V pour laquelle l'intégrale suivante converge,

$$E_h^*(V) = \int_0^{+\infty} h(S_V^*(x)) dx.$$

Alors par hypothèse de récurrence, $E_h^*(X + (Z - 1)) \leq E_h^*(X) + E_h^*(Z - 1)$.

Mais nous avons prouvé à la question 11.c que $E_h^*(Z - 1) = E_h^*(Z) - 1$, et de même

$E_h^*(X + Z - 1) = E_h^*(X + Z) - 1$.

Donc $E_h^*(X + Z) \leq E_h^*(X) + E_h^*(Z)$. Soit encore

$$\int_0^{+\infty} h(S_{X+Z}^*(x)) dx \leq \int_0^{+\infty} h(S_X^*(x)) dx + \int_0^{+\infty} h(S_Z^*(x)) dx.$$

13.d. Le résultat de la question précédente est équivalent (après multiplication par $g(p)$) à :

$$\int_0^{+\infty} (g(pS_{X+Z}^*(x)) - g(pS_X^*(x)) - g(pS_Z^*(x))) dx \leq 0.$$

D'après la question 12, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} g(S_{X+Z}(x))dx, \int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx \text{ et } \int_0^{+\infty} g(S_Z(x))dx$$

convergent, de sorte que $\int_0^{+\infty} (g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) - g(S_Z(x))) dx$ converge.

Alors en intégrant l'inégalité de la question 13.b.iii, il vient

$$\int_0^{+\infty} (g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) - g(S_Z(x))) dx \leq \int_0^{+\infty} (g(pS_{X+Z}^*(x)) - g(pS_X^*(x)) - g(pS_Z^*(x))) dx \leq 0.$$

Et donc

$$\int_0^{+\infty} g(S_{X+Z}(x))dx \leq \int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx + \int_0^{+\infty} g(S_Z(x))dx$$

ce qui nous donne bien

$$\boxed{E_g(X + Z) \leq E_g(X) + E_g(Z)}.$$

Ainsi, l'hypothèse de récurrence est bien vérifiée au rang $n + 1$.

Par le principe de récurrence, pour tout entier n , pour toute probabilité P sur (Ω, \mathcal{A}) et toute variable aléatoire U telle que $P(U \in \llbracket 0, n \rrbracket) = 1$, on a

$$E_g(X + U) \leq E_g(X) + E_g(U).$$

14.a Pour tout $\omega \in \Omega$, $0 \leq \lfloor nY(\omega) \rfloor \leq nY(\omega)$ et donc $0 \leq Y_n(\omega) \leq Y(\omega)$.

En particulier, $P(Y_n \in [0, B]) \geq P(Y \in [0, B]) = 1$ et donc, une probabilité étant inférieure ou égale à 1, $P(Y_n \in [0, B]) = 1$.

D'après le résultat de la question 12, $E_g(Y_n)$ existe, de même que $E_g(X + Y_n)$.

La variable nY_n est à valeurs entières, et prend presque sûrement ses valeurs dans $\llbracket 0, \lfloor nB \rfloor \rrbracket$.

Il est alors possible d'appliquer le résultat de la question 13 aux variables nX (qui admet une espérance corrigée d'après 11.c) et nY_n . On a alors

$$E_g(nX + nY_n) \leq E_g(nX) + E_g(nY_n).$$

Mais, toujours par la question 11.c, $E_g(nX + nY_n) = nE_g(X + Y_n)$, $E_g(nX) = nE_g(X)$ et $E_g(nY_n) = nE_g(Y_n)$. Donc $\boxed{E_g(X + Y_n) \leq E_g(X) + E_g(Y_n)}$.

14.b Soit $\omega \in \Omega$ tel que $Y_n(\omega) > x$. Puisque $Y_n(\omega) \leq Y(\omega)$, nécessairement $Y(\omega) > x$. Autrement dit, on a l'inclusion d'événements $\lfloor Y_n > x \rfloor \subset \lfloor Y > x \rfloor$.

Par conséquent, pour $x > 0$, $S_{Y_n}(x) = P(Y_n > x) \leq P(Y > x) = S_Y(x)$.

Par croissance de g , il vient $\forall x > 0, g(S_{Y_n}(x)) \leq g(S_Y(x))$ et par croissance de l'intégrale,

$$E_g(Y_n) = \int_0^{+\infty} g(S_{Y_n}(x))dx \leq \int_0^{+\infty} g(S_Y(x))dx = E_g(Y).$$

14.c Le changement de variables $u = x + \frac{1}{n}$ réalise une bijection \mathcal{C}^1 de $]0, +\infty[$ sur $]\frac{1}{n}, +\infty[$, et donc les intégrales

$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} g(S_{X+Y}(u))du \text{ et } \int_0^{+\infty} g\left(S_{X+Y}\left(x + \frac{1}{n}\right)\right) dx$$

sont toutes deux convergentes (car la première l'est par la question 14.a) et sont égales.

Par définition de la partie entière, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\lfloor nY(\omega) \rfloor \leq nY(\omega) < \lfloor nY(\omega) \rfloor + 1.$$

Soit $\forall \omega \in \Omega, 0 \leq Y(\omega) - Y_n(\omega) < \frac{1}{n}$.

Soit donc $x > 0$ et $\omega \in \Omega$ tels que $X + Y > x + \frac{1}{n}$. Alors

$$(X + Y_n)(\omega) = (X + Y)(\omega) - (Y - Y_n)(\omega) > x + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = x.$$

Autrement dit, on a l'inclusion d'événements

$$\left[X + Y > x + \frac{1}{n} \right] \subset [X + Y_n > x].$$

Et donc en passant aux probabilités :

$$0 \leq S_{X+Y} \left(x + \frac{1}{n} \right) \leq S_{X+Y_n}(x).$$

Comme dans les questions précédentes, par croissance de g , puis par croissance de l'intégrale (les intégrales en question existent), il vient

$$\int_0^{+\infty} g \left(S_{X+Y} \left(x + \frac{1}{n} \right) \right) dx \leq \int_0^{+\infty} g(S_{X+Y_n}(x)) dx = E_g(X + Y_n).$$

14.d En utilisant successivement les résultats des questions 14.c, 14.a et 14.b, il vient

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} g(S_{X+Y}(x)) dx \leq E_g(X + Y_n) \leq E_g(X) + E_g(Y_n) \leq E_g(X) + E_g(Y).$$

En passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient alors

$$\int_0^{+\infty} g(S_{X+Y}(x)) dx \leq E_g(X) + E_g(Y).$$

Soit encore $E_g(X + Y) \leq E_g(X) + E_g(Y)$.