MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2015

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. La question de cours qu'il est impossible de ne pas réussir ! Si X est une v.a.r. suivant la loi exponentielle de paramètre λ :
   - Un densité de X est la fonction $f:\ x \mapsto \begin{cases} \lambda.e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
   - La fonction de répartition de X est la fonction $F:\ x \mapsto \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
   - X admet une espérance et une variance qui valent : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.
2. Il s'agit bien sûr d'utiliser ici de façon intelligente les rappels faits ci-dessus !
   On remarque en effet que :
   - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}.\int_0^{+\infty} \lambda.e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$ puisque la densité f de la v.a.r. X précédente, est nulle sur $]-\infty, 0[$ et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ convergente et égale à 1.
   - de même : $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}.\int_0^{+\infty} x.\lambda.e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}.\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}.E(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, toujours parce que la densité de X est nulle sur $]-\infty, 0[$, la convergence (absolue) de l'intégrale sur $\mathbb{R}$ étant garantie par le fait que X admet une espérance d'après le cours.
3. a) L'une des questions les plus classiques sur les transferts de loi : soit U une loi uniforme sur $[0;1[$, admettant donc pour fonction de répartition $F_U:\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

   Puisque $U(\Omega) = [0, 1[$, pour tout ω de Ω, $1 \geqslant 1 - U(\Omega) > 0$ et $V(\omega) = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - U(\omega))$ est non seulement bien défini, mais aussi positif puisque $\lambda > 0$ et $\ln(1 - U(\omega)) \leqslant 0$ dans ces conditions.

   On peut donc déjà dire que : $\forall x \in \mathbb{R}^-,\ F_V(x) = P(V \leqslant x) = 0$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x) = P(\ln(1-U) \geqslant -\lambda x) \text{ car } \lambda > 0 \\ &= P(1-U \geqslant e^{-\lambda x}) \text{ par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &= P(U \leqslant 1 - e^{-\lambda x}) \\ F_V(x) &= 1 - e^{-\lambda x} \text{ car } -\lambda x < 0 \iff 0 < e^{-\lambda x} < 1 \end{aligned}$$

On en conclut : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_V(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ, loi que suit donc la v.a.r. V.

b) Le transfert précédent permet de comprendre qu'il suffit de simuler la loi uniforme sur $[0,1[$, ce que fait la fonction `rand()`, pour simuler la loi de V :

```
function v=simul(lambda)
    u=rand()
    v=-log(1-u)/lambda
endfunction
```

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ qui, à tout ω de Ω, associe le plus grand des réels $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. a) Une nouvelle question absolument incontournable du programme ECE2 : la v.a.r. T_n étant le maximum des n v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$, pour tout réel x :
$(T_n \leqslant x)$ est réalisé si et seulement si *tous* les événements $(X_k \leqslant x)$ sont réalisés, pour $k \in [\![1, n]\!]$.
En clair : $\forall x \in \mathbb{R},\ (T_n \leqslant x) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant x)$.
Le passage à la probabilité donne alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ P(T_n \leqslant x) &= \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leqslant x) \text{ par indépendance des } X_k \\ &= (P(X_1 \leqslant x))^n \text{ car toutes les v.a.r. } X_k \text{ suivent la même loi} \\ P(T_n \leqslant x) &= \begin{cases} (1-e^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ au vu de la loi commune des } X_k \end{aligned}$$

b) Il est ainsi clair que F_{T_n} est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ comme fonction constante nulle, et sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions de classe C^1.
Comme par ailleurs : $\lim\limits_{x\to 0^+} F_{T_n}(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (1-e^{-x})^n = (1-1)^n = 0 = F_{T_n}(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} F_{T_n}(x)$, la fonction F_{T_n} est donc continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.
La variable aléatoire T_n est donc à densité, et on obtient une telle densité f_n par dérivation de F_{T_n} sur $\mathbb{R}$, sauf en 0 où on définit une valeur arbitraire, par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n.f_{X_1}(x).(F_{X_1}(x))^{n-1} = ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et on reprend la première expression quand $x = 0$, ce qui correspondra à la définition de l'énoncé.

5. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: la v.a.r. T_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
Comme la fonction $x \mapsto x.f_n(x)$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et positive sur $[0, +\infty[$, cela revient à

prouver la convergence simple de $\quad n.\int_0^{+\infty} xe^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}\mathrm{d}x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $e^{-x} \in]0,1]$, donc $1-e^{-x} \in [0,1[$ et $0 \leqslant xe^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} \leqslant xe^{-x}$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x$ converge et est égale à 1 d'après ce qui a été rappelé à la question 2., en prenant ici $\lambda = 1$.

Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives permet de conclure que l'intégrale $\quad n.\int_0^{+\infty} xe^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}\mathrm{d}x$ est convergente, donc que T_n admet une espérance.

b) La v.a.r. T_1 est confondue avec la v.a.r. X_1 qui suit la loi $\mathcal{E}(1)$, donc $E(T_1) = 1$.

Ensuite : $E(T_2) = 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}(1-e^{-x})\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x - 2\int_0^{+\infty} x.e^{-2x}\mathrm{d}x$.

La convergence des deux intégrales issues de la linéarité utilisé ici, vient de celle de la deuxième intégrale calculée à la question 2 pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$, ce qui donne :

$$E(T_2) = 2.\frac{1}{1^2} - 2.\frac{1}{2^2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

6. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^n - ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} = e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}[(n+1)(1-e^{-x}) - n] \\ &= e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}[1-(n+1)e^{-x}] \end{aligned}$$

et :

$$f'_{n+1}(x) = -(n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^n + (n+1).e^{-x}.n.e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} = (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}[-(1-e^{-x}) + ne^{-x}]$$

soit : $f'_{n+1}(x) = -(n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}[1-(n+1)e^{-x}] = -(n+1)[f_{n+1}(x) - f_n(x)]$,
ce qui donne bien la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1}f'_{n+1}(x).$$

b) On réalise comme demandé, une intégration par parties, en se plaçant dans un premier temps sur un intervalle borné $[0, A]$ où $A > 0$: dans l'intégrale $\int_0^A x(f_{n+1}(x) - f_n(x))\mathrm{d}x$, on pose :

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) &=& x & \rightarrow & u'(x) &=& 1 \\ v'(x) &=& f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1}f'_{n+1}(x) & \rightarrow & v(x) &=& -\dfrac{1}{n+1}f_{n+1}(x) \end{array}$$

Les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \forall A > 0,\ \int_0^A x(f_{n+1}(x) - f_n(x))\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{n+1}xf_{n+1}(x)\right]_0^A + \frac{1}{n+1}\int_0^A f_{n+1}(x)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n+1}.A.f_{n+1}(A) + \frac{1}{n+1}\int_0^A f_{n+1}(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Lorsque A tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{A\to+\infty} Af_{n+1}(A) = 0$, comme conséquence de la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^A xf_{n+1}(x)\mathrm{d}x$ définissant $E(T_{n+1})$ (cf. question 5.a)).

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\mathrm{d}x$ étant également convergente (intégrale d'une densité), on en déduit bien par passage à la limite quand $A \to +\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x))\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\mathrm{d}x.$$

c) Les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf_{n+1}(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf_n(x)\mathrm{d}x$ sont, d'après la question 5.a), convergentes et valent respectivement $E(T_{n+1})$ et $E(T_n)$. L'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\mathrm{d}x$ vaut 1, comme intégrale d'une densité nulle sur $]-\infty,0[$. La linéarité de l'intégrale peut donc être utilisée à gauche, et donne la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(T_{n+1}) - E(T_n) = \frac{1}{n+1}$$

Un passage à la somme dans cette relation, réécrite sous la forme : $\forall k \geqslant 2,\ E(T_k) - E(T_{k-1}) = \dfrac{1}{k}$, donne :

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=2}^{n} E(T_k) - E(T_{k-1}) &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
\iff \sum_{k=2}^{n} E(T_k) - \sum_{j=1}^{n-1} E(T_j) &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \qquad [j = k-1] \\
\iff E(T_n) - E(T_1) &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
\iff E(T_n) &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Soit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(T_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, formule valable y compris pour $n = 1$.

Partie III : Loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.

On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. D'après la définition même de la variable aléatoire N : $(N = 0)$ est réalisé si et seulement si on ne trouve aucun entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X_n > a)$ soit réalisé, donc si *tous* les événements $(X_n \leqslant a)$ sont réalisés, ce qui et bien : $(N = 0) = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k \leqslant a)$.

   La *propriété de limite monotone* donne alors : $P(N = 0) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant a)\right)$, où :

   $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant a)\right) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} P(X_k \leqslant a) = (1 - e^{-a})^n$ puisque les $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont indépendantes et de même loi.
   Le réel a étant strictement positif : $e^{-a} \in]0,1[$, donc $1 - e^{-a} \in]0,1[$ également, et par conséquent, d'après le cours sur les suites géométriques :

$$P(N = 0) = \lim_{n\to+\infty} (1 - e^{-a})^n = 0$$

8. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$; par définition de N, l'événement $(N = n)$ est réalisé si et seulement si n est le *premier* entier tel que $X_n > a$, donc si et seulement si $(X_n > a)$ est réalisé ainsi que tous les événements $(X_k \leqslant a)$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.

En clair : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (N=n) = \bigcap_{k=1}^{n-1}(X_k \leqslant a) \cap (X_n > a)$.

Par indépendance des X_k, et vu que ces v.a.r. suivent toutes la même loi $\mathcal{E}(1)$, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(N=n) = \prod_{k=1}^{n-1} P(X_k \leqslant a).(1-P(X_n \leqslant a)) = (1-e^{-a})^{n-1}.e^{-a}$$

9. Au vu des deux questions précédentes, N prend presque sûrement ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et suit en fait la *loi géométrique* de paramètre $p = e^{-a}$... !
On peut donc directement conclure, d'après le cours sur cette loi, que :

$$E(N) = \frac{1}{e^{-a}} = e^a \text{ et } V(N) = \frac{1-e^{-a}}{(e^{-a})^2} = (1-e^{-a}).e^{2a} = e^{2a} - e^a$$

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z, définie pour tout ω de Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}.$$

10. Il faut essayer de bien comprendre ici la définition de la variable aléatoire Z : pour tout ω de Ω, $N(\omega) = n$ étant le premier entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n(\omega) > a$ (un tel entier existe presque sûrement d'après 7.), $X_{N(\omega)}(\omega) = X_n(\omega)$ est la valeur que prend effectivement cette v.a.r. qui est la première à "dépasser le seuil" a.
Ainsi, pour (presque)-tout ω de Ω : $Z(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$ est une valeur forcément supérieure à a par définition, sauf si $N(\omega) = 0$, donc :

$$P(Z \leqslant a) = P(N=0) = 0$$

11. Soit $x \in]a;+\infty[$.
    a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Distinguons le deux cas suggérés par l'énoncé :
    - Si $n = 1$: $((N=1) \cap (Z \leqslant x))$ est réalisé si et seulement si la première v.a.r. X_1 prend déjà une valeur supérieure à a (événement $(N=1)$), **et** aussi inférieure à x, puisque Z prend alors cette valeur de X_1, ce qui est bien :

    $$((N=1) \cap (Z \leqslant x)) = (a < X_1 \leqslant x)$$

    - Si $n \geqslant 2$: l'événement $((N=n) \cap (Z \leqslant x))$ est réalisé si et seulement si les $n-1$ premières v.a.r. $X_1, \ldots, X_{n-1}$ n'ont pas dépassé le seuil a, ce qui revient à dire que $T_{n-1} = \max(X_1, \ldots, X_{n-1})$ ne dépasse pas non plus le seuil a, tandis que X_n est la première à le faire, et donne donc sa valeur à Z qui doit aussi être inféreure ou égale à x. Tout ceci justifie en effet l'égalité d'événements :

    $$\forall n \geqslant 2,\ ((N=n) \cap (Z \leqslant x)) = (T_{n-1} \leqslant a) \cap (a < X_n \leqslant x)$$

    b) Il s'agit bien sûr d'utiliser ici, comme la question précédente nous y préparait, la *formule des probabilités totales* avec le s.c.e. $((N=n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ associé à la v.a.r. N, qui donne pour tout réel x :

$$\begin{aligned} P(Z \leqslant x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P\left((N=n) \cap (Z \leqslant x)\right) \\ &= P(a < X_1 \leqslant x) + \sum_{n=2}^{+\infty} P\left((T_{n-1} \leqslant a) \cap (a < X_n \leqslant x)\right) \\ &= F_{X_1}(x) - F_{X_1}(a) + \sum_{n=2}^{+\infty} P(T_{n-1} \leqslant a) \times \left(F_{X_n}(x) - F_{X_{n(a)}}\right) \qquad (1) \end{aligned}$$

$$= \left(e^{-a} - e^{-x}\right) \times \left[1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(1 - e^{-a}\right)^{n-1}\right] \qquad (2)$$
$$= \left(e^{-a} - e^{-x}\right) . \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - e^{-a}\right)^{k} \qquad (3)$$
$$= \left(e^{-a} - e^{-x}\right) . \frac{1}{1 - (1 - e^{-a})} = e^{a}(e^{-a} - e^{-x})$$
$$P(Z \leqslant x) = 1 - e^{a-x}$$

Justification des étapes aux numéros indiqués dans les lignes :

(1) Les v.a.r. $X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n$ étant mutuellement indépendantes, $T_{n-1} = \max(X_1, \ldots, X_{n-1})$ est indépendante de X_n d'après le lemme des coalitions.

(2) On réutilise ici le fait que la loi commune aux X_k est la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, la fonction de répartition de T_{n-1} provenant du calcul réalisé à la question 4.

(3) On a réalisé le changement d'indice $[k = n - 1]$ et réintégré au passage le terme $1 = (1 - e^{-a})^0$ à la somme. On obtient alors la somme totale d'une série géométrique de raison $1 - e^{-a} \in]0, 1[$.

12. a) Les questions 10. et 11. permettent de synthétiser la fonction de répartition de Z sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(Z \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \\ 1 - e^{a-x} & \text{si } x > a \end{cases}$$

Ainsi, $Z(\Omega) = [a; +\infty[$, et donc : $(Z - a)(\Omega) = [0, +\infty[$, donc $P(Z - a \leqslant z) = 0$ pour tout z négatif.
D'autre part : pour tout réel z strictement positif, on a alors $a + z > a$ et :

$$P(Z - a \leqslant z) = P(Z \leqslant a + z) = 1 - e^{a-(a+z)} = 1 - e^{-z}$$

On en conclut que :

$Z - a$ **suit la loi exponentielle de paramètre** 1

b) On sait donc que $Z - a$ admet une espérance et une variance valant : $E(Z - a) = V(Z - a) = 1$.
La linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance permettent d'en déduire que Z admet une espérance et une variance, qui valent :

$$E(Z) = E(Z - a + a) = E(Z - a) + a = 1 + a, \text{ et } V(Z) = V(Z - a) = 1.$$

Exercice 2

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 e^x - 1$.

1. L'application φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions de référence dérivables, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = x(x + 2)e^x.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc le signe de $\varphi'(x)$ est celui du trinôme $x^2 + 2x = x(x+2)$, dont les deux racines évidentes sont 0 et -2. Les règles de signe du trinôme permettent d'en déduire le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
φ	-1	$\nearrow$	$4e^{-2}-1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = -1$.
- $\varphi(0) = 0^2.e^0 - 1 = -1$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

2. Remarquons d'emblée que : $e^x = \dfrac{1}{x^2} \iff x^2e^x = 1 \iff \varphi(x) = 0$ pour $x \in]0, +\infty[$.
   Or sur $]0, +\infty[$: l'application φ est continue (car dérivable), strictement croissante, à valeurs dans $]-1, +\infty[$ qui contient 0.

   D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$, donc l'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$, admet une unique solution sur $]0, +\infty[$, qu'on note α.

   On calcule ensuite : $\varphi(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{4}e^{1/2} - 1$, où :

   $2 < e < 3$ donc $\sqrt{2} < e^{1/2} < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$, et : $\dfrac{1}{4}e^{1/2} < \dfrac{1}{2}$, donc $\varphi(\frac{1}{2}) < -\dfrac{1}{2} < 0$.

   $\varphi(1) = e - 1 > 0$.

   Ainsi : $\varphi(\frac{1}{2}) < 0 = \varphi(\alpha) < \varphi(1)$, ce qui implique bien : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$, par stricte croissance de la fonction φ sur $]0, +\infty[$.

On considère l'application $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = x^3e^x$,
et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\quad u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie II : Étude d'une suite

3. Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{u_n \geqslant 1}_{\mathcal{P}(n)}$.

   $\boxed{\text{I.}}$ Vu que $u_0 = 1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors :
   $\qquad u_{n+1} = u_n^3.e^{u_n} \geqslant 1$.

   On sait que $u_n \geqslant 1$ (H.R.), donc : $u_n^3 \geqslant 1$ et $e^{u_n} \geqslant e > 1$,
   donc par produit : $u_{n+1} \geqslant 1$, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.
   $\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.
4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
   $u_{n+1} - u_n = u_n^3.e^{u_n} - u_n = u_n(u_n^2.e^{u_n} - 1)$, où :

   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$ et $u_n^2.e^{u_n} \geqslant 1^2.e$, donc $u_n^2.e^{u_n} - 1 \geqslant e - 1 > 0$.

   Ainsi, par produit : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ; d'après le théorème de limite monotone, elle est convergente si et seulement si elle est majorée.
   Supposons que ce soit le cas, et notons ℓ la limite de la suite sous cette hypothèse, elle est positive

car (u_n) est une suite positive.
La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, on peut passer à la limite quand n tend vers $+\infty$, dans la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$, ce qui donne l'équation

$$\ell = f(\ell) \iff \ell - \ell^3.e^\ell \iff \ell(1 - \ell^2 e^\ell) = 0$$

La règle du produit nul donne : $\ell = 0$ ou $\ell^2 e^\ell - 1 = 0 \iff e^\ell = \dfrac{1}{\ell^2} \iff \ell = \alpha$.
Les deux seules solutions possibles sont strictement inférieures à 1, elles ne peuvent donc pas être la limite de la suite puisque $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante mais ne peut pas être majorée : on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Partie III : Étude d'une série

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{f(n)} = \dfrac{1}{n^3.e^n} \leqslant \dfrac{1}{n^3}$ puisque $e^n \geqslant 1$, et bien sûr $\dfrac{1}{f(n)} > 0$.

   Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^3}$ est convergente, comme série de Riemann de paramètre $3 > 1$; le *théorème de comparaison des séries à termes positifs* permet de conclure que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{f(n)}$ est elle-même convergente

   Remarque : On pouvait aussi utiliser l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \dfrac{1}{f(n)} \leqslant \dfrac{1}{e^n} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ pour conclure par le même théorème, en reconnaissant cette fois une série géométrique de raison $\dfrac{1}{e} = e^{-1} \in]0,1[$, bien convergente.

7. Une question très difficile à résoudre sans indication, pas vraiment dans l'esprit du programme ECE...
   La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{f(n)}$ est convergente de somme totale S, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $S - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{f(k)} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)}$ correspond au *reste* d'indice n de la série, qui vaut : $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{f(k)}$. C'est un réel positif comme somme de réels positifs, il est donc égal à sa valeur absolue.

   La majoration : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{f(k)} \leqslant \left(\dfrac{1}{e}\right)^k$ donne alors, vu que les deux séries correspondantes sont convergentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k \iff \left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leqslant \frac{(1/e)^{n+1}}{1 - 1/e}$$

   Vu que $\dfrac{(1/e)^{n+1}}{1-1/e} = \dfrac{1}{e^{n+1}}.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{e}} = \dfrac{1}{e^n(e-1)}$, on obtient bien la majoration demandée.

8. La somme totale d'une série convergente, est bien sûr approchée par ses sommes partielles ; ainsi, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)}$ sera une valeur approchée de S à 10^{-4} près dès que $\left| S - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)} \right| \leqslant 10^{-4}$, ce qui est le cas dès que $\dfrac{1}{e^n(e-1)} \leqslant 10^{-4}$ d'après ce qui précède.
   On peut alors rédiger deux scripts différents :
   - Le premier à l'aide d'une boucle `while` qui calcule les sommes partielles successives tant que la condition $\dfrac{1}{e^n(e-1)} > 10^{-4}$ est vraie :

```
n=1
S=1/exp(1) // la première somme partielle ne contient que le premier terme
while 1/(exp(n)*(exp(1)-1)) > 1e-4
    n=n+1
    S = S+1/(n^3*exp(n))
end
disp(S)
```

- On pouvait aussi résoudre l'inéquation :
  $\frac{1}{e^n(e-1)} \leqslant 10^{-4} \iff e^n(e-1) \geqslant 10^4 \iff n+\ln(e-1) \geqslant 4\ln(10) \iff n \geqslant 4\ln(10)-\ln(e-1)$.
  L'inégalité est donc vraie à partir du rang $N = \lfloor 4\ln(10)+\ln(e-1)\rfloor + 1$, on sait donc maintenant combien de termes il faut ajouter dans la somme, et on utilise une boucle `for` :

```
S=0 // cette fois on part d'une variable nulle
n = floor(4*log(10)-log(exp(1)-1))+1
for k=1:n
    S = S+1/(k^3*exp(k))
end
disp(S)
```

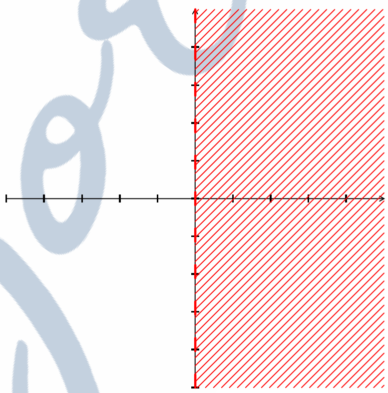
Dans les deux cas, la précision est atteinte à la somme partielle de rang 9...

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère l'ouvert $U =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application de classe C^2 suivante :

$$g:\ U \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto g(x,y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2e^y.$$

9. Le produit cartésien U est donc constitué de tous les couples (x,y) où y est un réel quelconque et x un réel strictement positif. La partie correspondante du plan est :



L'ouvert U correspond à la partie hachurée, les pointillés sur l'axe des ordonnées rappellent que ce dernier ne fait pas partie de U.

10. La fonction g est de classe C^1 sur l'ouvert U, et pour tout couple $(x,y) \in U$:

$$\partial_1(f)(x,y) = -\frac{1}{x^2} + e^x \text{ et } \partial_2(f)(x,y) = -2y.e^y - y^2.e^y = -(y^2+2y).e^y$$

11. Les points critiques de la fonction g de classe C^1, sont les couples (x,y) de U en lesquels le gradient de g est nul, soit les solutions du système :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) & = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^x = \dfrac{1}{x^2} \\ -(y^2+2y)e^y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha \\ y(y+2) = 0 \end{cases}$$

On a en effet reconnu l'équation de la question 2. en première ligne, et $e^y > 0$ pour tout réel y dans la deuxième ligne, dont les solutions évidentes sont 0 et -2.

La fonction g admet bien deux points critiques seulement, à savoir $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$.

12. La fonction g est de classe C^2 sur U, donc ses extrémums locaux possibles sont les points critiques. Les dérivées secondes sont définies sur U par :

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = \frac{2}{x^3} + e^x, \qquad \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 0 = \partial^2_{2,1}(f)(x,y)$$

$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = -(2y+2)e^y - (y^2+2y)e^y = -(y^2+4y+2)e^y$$

En $A = (\alpha, 0)$, la Hessienne de g est :

$$H_A = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice diagonale, dont les valeurs propres sont par conséquent ses éléments diagonaux. Comme $\alpha > 0$, $\dfrac{2}{\alpha^3} + e^\alpha > 0$, les valeurs propres sont de signes opposés, on peut donc conclure que g n'admet pas d'extrémum en A, mais un point-col.

13. Au deuxième point critique $B = (\alpha, -2)$, la Hessienne de g est :

$$H_B = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$$

Là encore, les valeurs propres de H_B sont ses éléments diagonaux, et ici les deux valeurs propres sont positives, ce qui permet de conclure qu'en $B = (\alpha, 0)$, g atteint un minimum local sur U.

14. Un extrémum global de g sur U, serait aussi un extrémum local. Le seul candidat possible est donc le point critique $B = (\alpha, -2)$, qui est un minimum local.
Il s'agit donc de savoir si on peut écrire : $\forall (x,y) \in U,\ g(x,y) \geqslant g(B)$.

Or il n'est pas difficile de voir qu'en fixant $x > 0$, par exemple $x = 1$:

$\forall y \in \mathbb{R},\ g(x,y) = 1 + e - y^2 e^y$ tendra vers $-\infty$ lorsque y tend lui-même vers $+\infty$.

Il est donc possible de trouver un couple de la forme $(1, y) \in U$ avec y assez grand tel que $g(x,y)$ soit aussi négatif qu'on veut, tel que $g(x,y) < g(B)$.
Le point B n'est donc pas un minimum *global* de g : la fonction g n'admet donc aucun minimum global sur U.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.

On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E :

$$i:\ E \to E,\ x \mapsto x \qquad \text{et} \qquad \theta:\ E \to E,\ x \mapsto 0_E.$$

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, \quad f^2 + i \neq \theta, \quad f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. a) La question est plus souvent posée sous l'angle matriciel, elle se rédige de la même façon depuis le point de vue des endomorphismes :

   Supposons par l'absurde que f soit bijective (c'est donc un automorphisme). Il existe donc un automorphisme réciproque f^{-1}, par lequel on compose à gauche la relation :
   $f \circ (f^2 + i) = \theta \Longrightarrow f^{-1} \circ f \circ (f^2 + i) = f^{-1} \circ \theta \Longrightarrow f^2 + i = \theta$, ce qui contredit la deuxième hypothèse faite sur f.

   b) L'endomorphisme $f = f - 0.i$ n'étant pas bijectif, on en déduit par définition que 0 est valeur propre de f. Il existe donc un vecteur propre u non nul de E, tel que : $f(u) = 0.u = 0_E$.

   Soit v_1 un tel vecteur de E, tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

2. Il s'agit ici de montrer que 0 est la seule valeur propre : or f vérifie $f \circ (f^2 + i) = 0$, ce qui signifie que $P(X) = X(X^2 + 1)$ est un *polynôme annulateur de* f.
   Les valeurs propres *possibles* de f sont donc les racines de P. Or :
   $x(x^2 + 1) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 = -1$; la deuxième équation n'a pas de solution, donc 0 est la seule valeur propre possible de f.
   Comme elle est bien valeur propre de f, 0 est la seule valeur propre de f et $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

3. On est dans le cas classique où f possède une seule valeur propre, nulle qui plus est. Si f était diagonalisable, il existerait une base de E dans laquelle la matrice de f serait diagonale, les éléments diagonaux étant ses valeurs propres, donc égaux à 0. En clair, f aurait pour matrice la matrice nulle, et on aurait $f = \theta$, ce qui exclu par hypothèse.
   L'endomorphisme f n'est donc pas diagonalisable.

4. De la même façon qu'à la question 1, on suppose que $f^2 + i$ est bijectif, on peut donc composer à droite cette fois par sa bijection réciproque, la relation :

$$f \circ (f^2 + i) = \theta \Longrightarrow f \circ (f^2 + i) \circ (f^2 + i)^{-1} = \theta \circ (f^2 + i)^{-1} \Longrightarrow f = \theta$$

   ce qui est à nouveau faux, au vu de l'hypothèse faite sur f.
   L'endomorphisme $f^2 + i$ n'est donc pas bijectif, en particulier non-injectif : il existe donc un vecteur non nul v de E, tel que :

$$(f^2 + i)(v) = 0_E \iff f^2(v) + v \iff f^2(v) = -v$$

   Soit donc v_2 un tel vecteur non nul de E, tel que $f^2(v_2) = -v_2$. On note : $v_3 = f(v_2)$.

5. Au vu des relations précédentes : $f(v_3) = f(f(v_2)) = f^2(v_2) = -v_2$.

6. a) La famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est constituée de 3 vecteurs dans un espace E de dimension 3, il suffit donc de démontrer que c'est une famille libre pour que ce soit une base de E.

   Posons donc une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs :

$$\text{Soient } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3;\ \lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 + \lambda_3.v_3 = 0_E. \quad (L_1)$$

   Comme on n'a pas d'expression explicite de ces trois vecteurs, on utilise plutôt leur propriétés précédemment obtenues en composant cette relation par f ; la linéarité de cette dernière donne :

$$\lambda_1.f(v_1) + \lambda_2.f(v_2).\lambda_3.f(v_3) = f(0_E) \iff \lambda_2.v_3 - \lambda_3.v_2 = 0_E. \quad (L_2)$$

   On peut appliquer une deuxième fois f à cette dernière relation, sa linéarité donne :

$$\lambda_2.f(v_3) - \lambda_3.f(v_2) = f(0_E) \iff -\lambda_2.v_2 - \lambda_3.v_3 = 0_E. \quad (L_3)$$

   On voit ainsi que la combinaison : $L_1 + L_3$ donne $\lambda_1.v_1 = 0_E \iff \lambda_1 = 0$, puique $v_1 \neq 0_E$.

   La combinaison $\lambda_3.L_2 + \lambda_2.L_3$ donne :

$$\lambda_2.\lambda_3.v_3 - \lambda_3^2.v_2 - \lambda_2^2.v_2 - \lambda_2.\lambda_3.v_3 = 0_E \iff -(\lambda_2^2 + \lambda_3^2).v_2 = 0_E \iff \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0$$

puisque $v_2 \neq 0_E$.
La somme de deux réels *positifs* est nulle si et seulement si les deux réels sont positifs, ce qui implique :

$$\lambda_2^2 = \lambda_3^2 = 0 \iff \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

On a finalement montré que :

$$\lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 + \lambda_3.v_3 = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

ce qui prouve que la famille $\mathcal{B}$ est libre, donc est une base de E.

b) Au vu des relations précédentes, on déduit la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} \\ C = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}$$

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et le sous-espace $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C), c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{aA + bB + cC;\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

7. Le sous-espace $\mathcal{F}$ étant engendré par la famille (A, B, C), on est naturellement amené à étudier le caractère libre de cette dernière, en posant une combinaison linéaire nulle :

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$; $a.A + b.B + c.C = 0$ (matrice nulle)

$$\iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} = 0 \iff a = b = c = 0 \text{ par identification des coefficients}$$

On en déduit que (A, B, C) est une famille libre et génératrice de $\mathcal{F}$: c'est donc une base de ce sous-espace, et $\boxed{\dim \mathcal{F} = 3}$.

8. On cherche à déterminer dans cette question toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ qui *commutent* avec C, telles que :

$$CM = MC \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g & -h & -i \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ 0 & f & -e \\ 0 & i & -h \end{pmatrix} \iff \begin{cases} c & = 0 \\ b & = 0 \\ g & = 0 \\ f & = -h \\ e & = i \end{cases}$$

L'ensemble de toutes les matrices qui commutent avec C est donc bien :

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & -h \\ 0 & h & e \end{pmatrix} ;\ (a, e, h) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \{a.A + e.B + h.C;\ (a, e, h) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(A, B, C) = \mathcal{F}$$

9. a) Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$:

$$(a.A+b.B+c.C)^2 = (a.A+b.B)^2+2(a.A+b.B).c.C+(c.C)^2 = a^2.A^2+2ab.AB+b^2.B^2+2ac.AC+2bc.BC+c^2.C^2$$

Les calculs matriciels donnent : $A^2 = A$ et $B^2 = B$ (calculées comme matrices diagonales), $AC = 0 = AB$, $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -B$, $BC = C$, donc :

$$(a.A+b.B+c.C)^2 = a^2.A+(b^2-c^2).B+2bc.C = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2-c^2 & -2bc \\ 0 & 2bc & b^2-c^2 \end{pmatrix}$$

b) On cherche une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

Si on la cherche plus spécifiquement dans $\mathcal{F}$, c'est-à-dire sous la forme $M = a.A+b.B+c.C$, l'identification des coefficients donne : $\begin{cases} a^2 & = 4 \\ b^2-c^2 & = 3 \\ 2bc & = 12 \end{cases}$.

On demande *une* solution, et pas l'ensemble de toutes les solutions ; après quelques essais, on voit que : $\begin{cases} a & = 2 \\ b & = 3 \\ c & = 2 \end{cases}$ est un exemple de solution, donnant la matrice : $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

10. On note $g = f^2 - i$. Pour montrer que g est bijectif, on peut passer par sa représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}$, où :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = C^2 - I_3 = -B - I - 3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice diagonale bien inversible, puisque tous ses coefficients diagonaux sont non-nuls : $C^2 - I_3$ est donc inversible, d'inverse

$$(C^2-I_3)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = -I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = -I_3 - \frac{1}{2}.C^2$$

La relation matricielle : $(C^2-I_3)^{-1} = -I_3 - \frac{1}{2}.C^2$ permet d'en déduire, par unicité de la représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}$:

$$g = f^2 - i \text{ est bijectif (automorphisme), de réciproque } g^{-1} = -i - \frac{1}{2}f^2$$