MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2019

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie A : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V, et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V.

On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty; 0[$ et continues sur $[0; +\infty[$.

1. a) Il suffit ici de rappeler que, comme pour toute fonction de répartition :

$$\forall t \in [0; +\infty[,\ 0 \leqslant F_U(t) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f_V(t) \geqslant 0, \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant F_U(t) f_V(t) \leqslant f_V(t).$$

b) Les fonctions concernées par la double inégalité précédente sont continues et positives sur $[0; +\infty[$: en effet F_u l'est comme fonction de répartition d'une variable à densité, et f_V par hypothèse.

De plus, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1 puisque f_V est la densité d'une variable aléatoire, nulle sur $]-\infty; 0[$.

Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives assure alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\mathrm{d}t$ est elle-même convergente.

On admet le résultat suivant : $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\mathrm{d}t = \mathbb{P}\big([U \leqslant V]\big)$.

2. On remarque ici que :

$$\int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big) f_V(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \big(f_V(t) - F_U(t) f_V(t)\big)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_V(t)\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\mathrm{d}t$$

$$= 1 - \mathbb{P}\big([U \leqslant V]\big) = \mathbb{P}\big([U > V]\big)$$

La séparation en deux intégrales par la propriété de linéarité est ici rendue possible par le fait que les deux intégrales qui en résultent sont individuellement convergentes.

3. Exemple : Soient λ, $\mu \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ.

a) D'après le cours sur la loi exponentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad F_U(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{et} \quad f_V(t) = \mu . e^{-\mu t}$$

b) On en déduit :

$$\mathbb{P}([U>V]) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}.\mu.e^{-\mu t}\mathrm{d}t = \mu\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t}\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{A\to+\infty}\mu.\int_0^{A} e^{-(\lambda+\mu)t}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\mu.\Big[-\frac{1}{\lambda+\mu}.e^{-(\lambda+\mu)t}\Big]_0^A$$
$$= \lim_{A\to+\infty}\mu.\Big[-\frac{1}{\lambda+\mu}.e^{-(\lambda+\mu)A}+\frac{1}{\lambda+\mu}\Big] = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

En effet, puisque $\lambda+\mu>0$: $\lim\limits_{A\to+\infty} -(\lambda+\mu)A = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-(\lambda+\mu)A} = 0$.

Partie B : Une application

Soit $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$. On considère $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.
On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k\leqslant T_0$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n=\min\big(T_1,\dots,T_n\big)$.

a) Pour tout réel t de $\mathbb{R}^+$:

$$\mathbb{P}([M_n>t]) = \mathbb{P}\big(\min(T_1,\dots,T_n)>t\big) = \mathbb{P}\big([T_1>t]\cap\dots\cap[T_n>t]\big)$$
$$= \mathbb{P}(T_1>t)\times\dots\times\mathbb{P}(T_n>t) \qquad \text{par indépendance des v.a.r. } T_1,\dots,T_n$$
$$= \big(\mathbb{P}(T_1>t)\big)^n \qquad \text{car les } T_i \text{ suivent toutes la même loi}$$
$$= \big(1-F_{T_1}(t)\big)^n = \begin{cases}\big(e^{-\lambda t}\big)^n & \text{si } t\geqslant 0\\ 1^n & \text{si } t<0\end{cases} = \begin{cases} e^{-\lambda.nt} & \text{si } t\geqslant 0\\ 1 & \text{si } t<0\end{cases}$$

b) On en déduit que : $\forall t\in\mathbb{R},\ F_{M_n}(t) = 1-\mathbb{P}(M_n>t) = \begin{cases}1-e^{-\lambda.nt} & \text{si } t\geqslant 0\\ 0 & \text{si } t<0\end{cases}$.

On reconnaît ici la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda.n$, loi que suit donc M_n.

5. a) Il est clair que les événements $[N=1]$ et $[T_1\leqslant T_0]$ sont égaux.
D'après le résultat de la partie A :

$$\mathbb{P}([N=1]) = \mathbb{P}([T_1\leqslant T_0]) = 1-\mathbb{P}([T_1>T_0]) = 1-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$: l'événement $[N>n]$ est réalisé si et seulement si les n premières variables aléatoires $T_1,\dots,T_n$ ne suffisent pas pour trouver un premier indice k tel que $T_k\leqslant T_0$, donc celles-ci sont toutes supérieures à T_0 :

$$[N>n] = [T_1>T_0]\cap\dots\cap[T_n>T_0] = \big[\min(T_1,\dots,T_n)>T_0\big] = [M_n>T_0]$$

Comme M_n suit la loi exponentielle de paramètre $\mu=\lambda.n$, alors le résultat de la partie B s'applique à nouveau et :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}([N>n]) = \mathbb{P}([M_n>T_0]) = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda.n} = \frac{1}{n+1}$$

c) On utilise alors la relation classique entre événements : pour tout entier $n \geqslant 2$, $[N > n-1] = [N = n] \cup [N > n]$; l'union étant disjointe :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \mathbb{P}\big([N > n-1]\big) &= \mathbb{P}\big([N = n]\big) + \mathbb{P}\big([N > n]\big)\\ \Longleftrightarrow \mathbb{P}\big([N = n]\big) &= \mathbb{P}\big([N > n-1]\big) - \mathbb{P}\big([N > n]\big)\\ \Longleftrightarrow \mathbb{P}\big([N = n]\big) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}\end{aligned}$$

Remarquons ici que pour $n = 1$, $\dfrac{1}{1(1+1)} = \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}\big([N = 1]\big)$, donc la formule générale est vraie pour $n = 1$, et est ainsi vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) La variable aléatoire N est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc $\big([N = n]\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, et :

$$\mathbb{P}\big([N = 0]\big) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N = n]\big) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Il convient ici, pour calculer la somme de cette série, de réutiliser la relation $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ qui est naturellement apparue à la question précédente, et permet d'écrire pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \overset{[k=n+1]}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{N+1}$$

et ainsi : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N \to +\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$, donc $\mathbb{P}\big([N = 0]\big) = 1 - 1 = 0$.

Ce résultat signifie qu'il est presque certain que l'une des variables aléatoires T_k $(k \in \mathbb{N}^*)$ finira par prendre une valeur inférieure ou égale à celle de T_0.

6. La variable aléatoire N admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n\mathbb{P}\big([N = n]\big)$ est absolument convergente. Comme $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}\big([N = n]\big) \geqslant 0$ (c'est une probabilité), la série est à termes positifs et la convergence simple suffit.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}\big([N = n]\big) = \sum_{n=1}^{N} n.\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{j=2}^{N+1} \frac{1}{j}$.

On reconnaît la série harmonique qui diverge, donc N n'admet pas d'espérance.

Exercice 2

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsqu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que : $B = P^{-1}AP$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse.

Partie A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est triangulaire : ses valeurs propres sont donc ses éléments diagonaux, et ainsi :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\frac{1}{2}, 1, 2\}.$$

La valeur 0 ne figure pas dans cette liste, ce qui permet d'affirmer que A est inversible.

Par ailleurs, A est une matrice carrée d'ordre 3 possédant 3 valeurs propres distinctes : c'est un critère suffisant pour pouvoir affirmer que A est diagonalisable (et que ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1).

2. On cherche ici à calculer un vecteur propre pour chaque valeur propre. On considère pour cela un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, pour lequel on résout successivement :

- $(A - I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y + z & = 0 \\ -\frac{1}{2}y & = 0 \\ z & = 0 \end{cases} \iff y = z = 0.$

  Ainsi : $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

- $(A - \frac{1}{2}I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}x - y + z & = 0 \\ \frac{3}{2}z & = 0 \end{cases}$

  $\iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}.$

  Ainsi : $E_{1/2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

- Enfin : $(A - 2.I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x - y + z & = 0 \\ -\frac{3}{2}y & = 0 \end{cases}$

  $\iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}.$

  Ainsi : $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \middle| \, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

La diagonalisation de A est alors matérialisée par la relation : $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonale, et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage correspondante, obtenue en juxtaposant les vecteurs propres obtenus dans le même ordre que leurs valeurs propres associées dans D (qui sont dans l'ordre croissant comme demandé).

La matrice D est diagonale, bien inversible et d'inverse $D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

3. On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les calculs matriciels donnent :

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 1+0+0 \end{pmatrix} = I_3 \quad \text{donc } Q \text{ est inversible, d'inverse } Q^{-1} = Q$$

$$QD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad QDQ = \begin{pmatrix} 0+0+2 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 1/2+0+0 \end{pmatrix} = D^{-1}$$

4. La relation précédente se réécrit : $QDQ^{-1} = D^{-1}$, ce qui signifie que les matrices D et D^{-1} sont semblables. Il en est alors de même de A et A^{-1}, en effet :

$$A^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = PQDQ^{-1}P^{-1} = PQP^{-1}APQ^{-1}P^{-1}$$

$$A^{-1} = (PQP^{-1})A(PQP^{-1})^{-1}$$

La matrice PQP^{-1} étant inversible comme produit de matrices qui le sont, A et A^{-1} sont donc bien semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z)$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.

5. La matrice canoniquement associée à l'endomorphisme f est : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Un simple échange des lignes 2 et 3 donne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui est échelonnée avec 3 pivots non-nuls : la matrice M est donc de rang maximal 3, donc elle est inversible.

6. a) On vérifie directement que 1 est valeur propre et on calcule le sous-espace propre associé en résolvant le système : $(M - I_3)X = 0_{3,1}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, de sorte que :

$$(M-I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y-z & = 0 \\ y+z & = 0 \end{cases} \iff z = -y,$$

On trouve donc une infinité de solutions puisque x et y sont variables libres : 1 est bien valeur propre de M, de sous-espace propre associé :

$$E_1(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix} \;\middle|\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(u_1, u_2).$$

La famille (u_1, u_2) est une famille génératrice de $E_1(M)$ constituée de deux vecteur non colinéaires : c'est bien une base de ce sous-espace propre.

b) On cherche ic un vecteur u_3, de la forme $u_3 = (a, b, c)$, tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$, ce qui se traduit matriciellement par :

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -b-c & = 1 \\ b+c & = -1 \end{cases} \iff b = 1-c$$

On trouve une infinité de solutions : tous les vecteurs de la forme $u_3 = (a, 1-c, c)$ où a et c sont des réels quelconques. On choisit alors une valeur arbitraire pour a et c , par exemple : avec $a = c = 1$, $u_3 = (1, 0, 1)$ vérifie la relation étudiée $f(u_3) - u_3 = u_2$.

c) Montrons que la famille $\mathcal{B}_1 = \big(u_1, u_2, u_3\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme c'est une famille de trois vecteurs et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, il suffit donc de prouver que $\mathcal{B}_1$ est libre ; pour cela, on considère trois réels a, b, c tels que :

$$a.u_1 + b.u_2 + c.u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} a & & & + & c & = & 0 \\ & & b & & & = & 0 \\ & & -b & + & c & = & 0 \end{array} \right.$$

qui donne bien dans cet ordre : $b = 0$ (L_2), puis $c = 0$ (L_3), puis $a = 0$ (L_1).

La famille $\mathcal{B}_1$ est donc bien libre, et c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

7. a) D'après les calculs précédents, on sait que : $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$ puisque u_1 et u_2 engendrent le sous-espace propre de f pour la valeur popre 1.

Par construction de u_3 : $f(u_3) - u_3 = u_2 \iff f(u_3) = u_2 + u_3$. D'où la matrice représentative de f sur $\mathcal{B}_1$:

$$M_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}_2$ est construite de la même façon, il faut simplement remarquer et écrire que :

$f(-u_2) = -f(u_2) = -u_2$ par linéarité de f, et $f(u_3) = u_3 + u_2 = u_3 - (-u_2)$, donc :

$$M_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(-u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ -u_2 \\ u_3 \end{array}$$

b) Les deux matrices M_1 et M_2 représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes : elles sont donc semblables. Le produit matriciel donne par ailleurs :

$$M_1M_2 = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0-1+1 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

ce qui prouve que M_1 et M_2 sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

8. De ce qui précède, on déduit que M est semblable à M_1 via la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}_1$, et semblable à $M_2 = M_1^{-1}$ via la matrice de passage Q de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}_2$:

$$M = PM_1P^{-1} \quad \text{et} \quad M = QM_2Q^{-1}$$

On en déduit : $M_1 = P^{-1}MP$ et $M = QM_1^{-1}Q^{-1} = Q(P^{-1}MP)^{-1}Q^{-1} = QP^{-1}M^{-1}PQ^{-1}$, soit :

$$M = (QP^{-1})M^{-1}(QP^{-1})^{-1}$$

Toujours d'après les propriétés de l'inverse d'un produit matriciel ; M est ainsi bien sembable à M^{-1} via la matrice inversible PQ^{-1}.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose : $N = T - I_3$.

9. La matrice T est évidemment inversible comme matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont tous non nuls.

Toujours comme matrice triangulaire, T a pour valeurs propres ses éléments diagonaux, donc $\mathrm{Sp}(T) = \{1\}$ est réduit à la seule valeur propre 1.

Si T était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ses valeurs propres : il existerait donc P inversible telle que $T = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

Comme bien sûr, $T \neq I_3$, alors par l'absurde, T n'est pas diagonalisable.

10. a) Les calculs matriciels donnent :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+1+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on trouve aussi $N^3 = 0_3$ (matrice nulle) : N, comme son nom le suggère, est *nilpotente* d'ordre 3.

On en déduit, par calcul littéral cette fois :

$$(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I_3 + 0_3 = I_3$$

après simplifications.

b) Ce résultat prouve donc que $T = I_3 + N$ a pour inverse : $T^{-1} = I_3 - N + N^2$.

11. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.

a) Comme $N^2 \neq 0_3$, l'endomorphisme $g \circ g$ dont N^2 est la matrice représentative, est non nul ; il existe donc un vecteur u non nul tel que $g \circ g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Come $N^3 = 0_3$, alors $g \circ g \circ g$ est, lui, l'endomorphisme nul, et par conséquent $g \circ g \circ g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

b) Montrons que la famille $\mathcal{B}_3 = \big(g \circ g(u), g(u), u\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$: comme c'est une famille de trois vecteurs d'un espace de dimension 3, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre.

Soit donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\quad a.g \circ g(u) + b.g(u) + c.u = 0_{\mathbb{R}^3} \quad (1)$.

On ne connaît pas explicitement les trois vecteurs, et on a une relation pour 3 inconnues : si on compose les deux membres par l'application linéaire g, on obtient la nouvelle relation :

$$a.g \circ g \circ g(u) + b.g \circ g(u) + c.g(u) = g(0_{\mathbb{R}^3}) \iff b.g \circ g(u) + c.g(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \quad (2)$$

Et si on compose une deuxième fois par g, on obtient la troisième relation :

$$b.g \circ g \circ g(u) + c.g \circ g(u) = g(0_{\mathbb{R}^3}) \iff c.g \circ g(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \quad (3)$$

Comme $g \circ g(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors (3) donne : $\quad c = 0$.

Mais alors, (2) devient : $\quad b.g \circ g(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff b = 0$ à nouveau parce que $g \circ g(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

Ainsi, et pour finir, (1) devient : $\quad a.g \circ g(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff a = 0$.

La famille $\mathcal{B}_3$ est donc libre, et c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Les images des éléments de $\mathcal{B}_3$ par g sont dans cet ordre : $\quad g \circ g \circ g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}, g \circ g(u)$ et $g(u)$, donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Il se trouve que : $\quad N^2 - N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}(g)$.

Les matrices $N^2 - N$ et N représentent donc toutes les deux l'endomorphisme g dans des bases différentes : elles sont donc bien semblables.

12. Il existe donc une matrice de passage P telle que : $N^2 - N = PNP^{-1}$, et alors :

$$T^{-1} = I_3 - N + N^2 = I_3 + PNP^{-1} = PP^{-1} + PNP^{-1} = P\big(I_3 + N\big)P^{-1} = PTP^{-1}$$

Et T et T^{-1} sont bien semblables.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall t \in]0; +\infty[, \quad f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable.

1. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions de référence qui le sont, et :

$$\forall t \in]0; +\infty[, \quad f'(t) = 1 - \frac{t^2}{=}\frac{t^2 - 1}{t^2} = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2}$$

Sur $]0; +\infty[$, $t^2 > 0$ et $t + 1 > 0$, donc $f'(t)$ est du signe de $t - 1$, et :

$$f'(t) > 0 \iff t - 1 > 0 \iff t > 1.$$

On en déduit le tableau de variations :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t} = +\infty = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$ et $\lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{1}{t} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to +\infty} t + \dfrac{1}{t} = +\infty = \lim\limits_{t\to +\infty} f(t)$.

2. La fonction f est donc continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[1;+\infty[$: elle réalise donc, d'après le théorème éponyme, une bijection de $[1;+\infty[$ dans l'intervalle image $[2;+\infty[$.

On note $g :\ [2;+\infty[\to [1;+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1;+\infty[$.

3. a) Le théorème de la bijection nous apprend également que la bijection réciproque conserve le même sens de variation sur son intervalle de départ, que la fonction originelle.

Le tableau de g est directement le suivant :

y	2		$+\infty$
g	1	$\nearrow$	$+\infty$

b) Où l'on utilise (pour une fois !) le théorème de dérivabilité de la réciproque : la fonction f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $[2;+\infty[$, mais sa dérivée n'est strictement positive que sur $]1;+\infty[$: on en déduit, d'après le théorème évoqué ci-dessus, que la bijection réciproque g est dérivable sur tout l'intervalle-image de $]1;+\infty[$, à savoir $]1;+\infty[$. Elle ne l'est cependant pas au point d'abscisse 2, où la courbe de g admet en fait une (demi-)tangente verticale.

c) Soit $y \in [2;+\infty[$: on cherche à résoudre l'équation suivante, d'inconnue $t \in]0;+\infty[$:

$$f(t) = y \iff t + \frac{1}{t} = y \iff t^2 + 1 = y.t \iff t^2 - y.t + 1 = 0$$

On s'est bien ramené à une équation du second degré, de discriminant :
$\Delta = (-y)^2 - 4 = y^2 - 4 \geqslant 0$ puisque $y \geqslant 2$.

Lorsque $y = 2$, $\Delta = 0$ et l'équation a pour unique solution $t_0 = -\dfrac{-2}{2} = 1$.

Pour tout réel $y > 2$, $\Delta > 0$ et l'équation admet a deux solutions réelles :

$$t_1 = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

ce qui est cohérent avec le tableau de variations de f obtenu à la question 1.

Parmi ces deux solutions, t_2 est la plus grande, appartenant à $[1;+\infty[$ puisque $y^2 > 4$, ce qui permet de conclure que :

$$\forall y \in [2;+\infty[, \quad g(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

(la formule vaut y compris lorsque $y = 2$).

Partie B : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0;+\infty[\times]0;+\infty[$, définie par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad h(x,y) = \Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\Big)(1+x)(1+y).$$

4. Pour tout couple (x,y) de U :

$$\partial_1(h)(x,y) = (1+y).\Big(-\frac{1}{x^2}.(1+x) + \big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\big).1\Big) = (1+y).\Big(-\frac{1}{x^2} \cancel{-\frac{1}{x}} + \cancel{\frac{1}{x}} + \frac{1}{y}\Big) = (1+y).\Big(\frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}\Big)$$

$$\partial_2(h)(x,y) = (1+x).\Big(-\frac{1}{y^2}.(1+y) + \big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\big).1\Big) = (1+x).\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2}\Big)$$

5. Soit (x,y) in U. Comme $x>0$ et $y>0$, alors les facteurs $(1+x)$ et $(1+y)$ dans les dérivées partielles sont strictement positifs, donc d'après la règle du produit nul :

$$\begin{cases} \partial_1(h)(x,y) &= 0 \\ \partial_2(h)(x,y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x^2} &= 0 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y^2} &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x^2-y}{x^2y} &= 0 \\ \dfrac{y^2-x}{y^2x} &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

6. En substituant y par x^2 dans la deuxième ligne du système, on obtient l'équation vérifiée par x :

$$x = x^4 \iff 1 = x^3 \quad \text{puisque } x>0 \iff x = 1$$

D'après les propriétés de la fonction cube dont on connaît parfaitement la courbe représentative...
Comme $x=1$, alors $y = x^2 = 1$ aussi, ce qui permet de conclure que :

La fonction h admet un unique point critique sur U, à savoir le couple $(1,1)$.

7. a) Pour tout couple (x,y) de U :

$$2 + f(x) + f(y) + f\Big(\frac{x}{y}\Big) = 2 + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$\text{et } h(x,y) = \Big(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + \frac{x}{y}\Big)(1+y) = \frac{1}{x} + \frac{y}{x} + 1 + y + \frac{1}{y} + 1 + \frac{x}{y} + x$$

$$= 2 + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Donc les deux membres de la relation demandée sont bien égaux.

b) Comme on l'a vu, la fonction f est minorée par 2 sur $]0;+\infty[$. Pour tout couple (x,y) de U, $x>0$ et $y>0$ donc on peut écrire :

$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x) \geqslant 2,\ f(y) \geqslant 2,\ f\Big(\frac{x}{y}\Big) \geqslant 2 \quad \text{donc} \quad h(x,y) = 2 + f(x) + f(y) + f\Big(\frac{x}{y}\Big) \geqslant 8$$

Or : $h(1,1) = \Big(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1}\Big)(1+1)(1+1) = 2^3 = 8$, donc :

$\forall (x,y) \in U, \quad h(x,y) \geqslant h(1,1)$, ce qui prouve que h admet un minimum global en $(1,1)$.

Partie C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(nu_n).$$

8. Montrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$: "u_n existe et $u_n \geqslant 1$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{I.}}$ $\mathcal{P}(1)$ est vraie avec $u_1 = 1$ donné par l'énoncé.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et sous cette hypothèse, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, soit : u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geqslant 1$.

On sait (H.R.) que : $u_n \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, donc $\dfrac{1}{n^2 u_n}$ est bien défini et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^2 u_n}$ aussi.

De plus : $\dfrac{1}{n^2 u_n} > 0$, donc $u_{n+1} > u_n \overset{H.R.}{\geqslant} 1$: par transitivité de l'inégalité, $u_{n+1} \geqslant 1$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

9. La fonction `Scilab` suivante prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie la valeur de u_n :

```
function u = suite(n)
    u = 1
    for k = 1:(n-1)
        u = u + 1/(k^2*u)
    end
endfunction
```

Remarque : la gestion de l'indice de boucle k, dans la déclaration de la boucle `for` comme dans la relation de récurrence pour recalculer `u`, doit ici être très soigneuse : pour calculer u_n, il faut avoir calculé tous les termes $u_{k+1} = u_k + \dfrac{1}{k^2 u_k}$ pour tout k compris entre 1 (ce qui donne u_2) et $n-1$ (ce qui donne u_n).

Une autre version possible est la suivante :

```
function u = suite(n)
    u = 1
    for k = 2:n
        u = u + 1/((k-1)^2*u)
    end
endfunction
```

Où cette fois, `k` correspond bien à l'indice de chaque nouveau terme calculé, selon la relation de récurrence : $u_k = u_{k-1} + \dfrac{1}{(k-1)^2 u_{k-1}}$.

Une formulation différente de ces solutions a peu de chances d'être correcte !

10. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \dfrac{1}{n^2 u_n}$ où $u_n \geqslant 1 \iff n^2 u_n \geqslant n^2$.

Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc effectivement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < v_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

b) La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ étant convergente comme série de Riemann d'exposant $\alpha=2$, l'inégalité précédente et le théorème de comparaison des séries à termes positifs assurent que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente.

c) Pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{j=2}^{n} u_j - \sum_{k=1}^{n-1} u_k = u_n - u_1$$

Donc : $\quad \forall n \geqslant 2, \quad u_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1} v_k.\quad$ Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge, alors la suite (u_n) converge également, et a pour limite $\ell = 1+\sum_{k=1}^{+\infty} v_k$.

11. a) Soit k un entier supérieur ou égal à 2 : la fonction $t\mapsto \frac{1}{t^2}$ étant décroissante sur $]0;+\infty[$, on peut écrire :

$$\forall t \in [k-1;k], \quad \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}$$

La continuité de cette même fonction et l'inégalité de la moyenne permettent alors d'écrire, puisque $k-1<k$:

$$\frac{1}{k^2}.(k-(k-1)) \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}.(k-(k-1)) \Longrightarrow \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$$

b) Soient n et p deux entiers tels que $2 \leqslant p < n$: de la même façon qu'à la question 10.c), par télescopage :

$$\sum_{k=p}^{n-1} v_k = \sum_{k=p}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{j=p+1}^{n} u_j - \sum_{k=p}^{n-1} u_k = u_n - u_p$$

Les inégalités obtenues en 10.a) et 11.a) se combinent par ailleurs pour donner :

$$\forall k \geqslant 2, \quad 0 \leqslant v_k \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \Longrightarrow 0 \leqslant v_k \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$$

par transitivité de l'inégalité. On peut alors, passer à la somme dans la dernière double inégalité pour k variant de p à $n-1$:

$$0 \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} v_k \leqslant \sum_{k=p}^{n-1}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \iff 0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$$

d'après la relation de Chasles pour les intégrales.

c) Si on écrit le résultat précédent avec $n=2$, on obtient : pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$0 \leqslant u_n - u_2 \leqslant \int_{1}^{n-1}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \iff 0 \leqslant u_n - u_2 \leqslant \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{n-1} \Longrightarrow 0 \leqslant u_n - u_2 \leqslant 1-\frac{1}{n} < 1$$

Donc par transitivité : $\quad 0 \leqslant u_n - u_2 \leqslant 1 \iff u_2 \leqslant u_n \leqslant 1+u_2$. Or : $\quad u_2 = u_1 + \frac{1}{1^2.u_1} = 2$, donc : $\quad \forall n \geqslant 3,\ 2 \leqslant u_n \leqslant 3$.

Tous les termes de la suite (u_n) appartenant à l'intervalle fermé $[2;3]$ à partir du rang 3, il en est donc de même pour la limite ℓ de la suite.

d) De façon plus générale, la double inégalité de 11.b) se réécrit : pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$,

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \left[-\frac{1}{t} \right]_{p-1}^{n-1} \iff 0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1}$$

Comme la suite (u_n) converge, on peut passer à la limite dans cette double inégalité lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui donne :

$$\forall p \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}$$

e) Le terme u_p est par définition une valeur approchée de sa limite ℓ à 10^{-6} près dés que $0 \leqslant \ell - u_p \leqslant 10^{-4}$. D'après l'inégalité précédente, il suffit pour cela que :

$$\frac{1}{p-1} \leqslant 10^{-4} \iff p - 1 \geqslant 10^4 \iff p \geqslant 10^6 + 1$$

Il suffit donc de calculer, avec la fonction de la question 9., le terme de rang $10^4 + 1 = 10001$:

```
p = 10001
disp(u(p))
```