MATHÉMATIQUES - Edhec E 2003

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\quad f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$.

1. a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, et pour tout réel $A \geqslant n$:

$$\int_n^A f(x)\mathrm{d}x = -\int_n^A (-\frac{1}{x^2})e^{1/x}\mathrm{d}x = -\left[e^{1/x}\right]_n^A = e^{1/n} - e^{1/A}$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} e^{1/A} = \lim\limits_{X\to 0^+} e^X = e^0 = 1$ par continuité de exp en 0.

Donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_n^A f(x)\mathrm{d}x = e^{1/n} - 1$, ce qui prouve que $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut $e^{1/n} - 1$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc selon l'équivalent classique : $e^x - 1\underset{0}{x}$, on a bien : $\quad I_n = e^{1/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = f(n) = \dfrac{e^{1/n}}{n^2}$ où : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} \leqslant 1 \Longrightarrow e^{1/n} \leqslant e$ par croissance de exp sur $\mathbb{R}$.

Ainsi : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < f(n) \leqslant \dfrac{e}{n^2}$.

La série de terme général $\dfrac{e}{n^2} = e \times \dfrac{1}{n^2}$ est convergente comme série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$ (à un facteur près).
Le théorème de comparaison des séries à termes positifs affirme alors que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3. a) L'idée dans cette question, est de faire le lien entre série et intégrale en découpant l'intégrale par segments de longueur 1.

Pour tout entier $N \geqslant n$, on peut écrire :

$$\int_n^N f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=n}^{N-1} \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{d'après la relation de Chasles.}$$

La fonction $f :\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2}.e^{1/x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3}.e^{1/x} + \frac{1}{x^2}.(-\frac{1}{x^2})e^{1/x} = (-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4})e^{1/x} < 0,$$

donc f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. Ainsi :

$\forall k \geqslant n,\ \forall x \in [k, k+1], \quad f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1)$, donc :

$\forall k \geqslant n, \quad f(k).(k+1-k) \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \geqslant f(k+1)(k+1-k)$ d'après l'inégalité de la moyenne,

f étant continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ (ou la croissance de l'intégrale, avec $k \leqslant k+1$).
Par passage à la somme pour k variant de n à $N-1$, pour tout entier $N > n$:

$$\sum_{k=n}^{N-1} f(k) \geqslant \sum_{k=n}^{N-1} \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=n}^{N-1} f(k+1)$$

$$\iff \sum_{k=n}^{N-1} u_k \geqslant \int_n^N f(x)\mathrm{d}x \geqslant \sum_{j=n+1}^{N} u_j$$

La série et l'intégrale convergent, on peut donc passer à la limite dans ces inégalités quand $N \to +\infty$, ce qui donne bien : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{1/n}}{n^2}$

b) La double inégalité précédente peut aussi s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n - \frac{e^{1/n}}{n^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n$$

L'équivalence : $I_n \sim \dfrac{1}{n}$ obtenue en 1.b), amène alors naturellement à montrer qu'il en est de même pour $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$; pour le voir, on divise les trois membres par $\dfrac{1}{n}$ (c'est-à-dire qu'on les multiplie par n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nI_n - \frac{e^{1/n}}{n} \leqslant n.\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant nI_n$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = 1$, et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1/n}}{n} = 0$ par quotient ($\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{1/n} = e^0 = 1$) :

le théorème d'encadrement affirme alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \times \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = 1$, soit : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice 2

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit f_n la fonction définie par : $\quad f_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   La fonction f_n est clairement positive sur $[0,1]$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et x est positif sur cet intervalle), donc sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est nulle ailleurs. Cette fonction est également continue sur $]0,1[$ comme fonction monôme, et sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$ comme fonction constante nulle ; finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points, à savoir 0 et 1. De plus :

$$\int_{\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_0^1 nx^{n-1}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} 0\mathrm{d}x = 0 + \Big[x^n\Big]_0^1 + 0 = 1$$

   donc f_n est bien une densité de probabilité.

2. On considère une variable aléatoire réelle X_n qui admet f_n pour densité : on dit alors que X_n suit la **loi monôme** d'ordre n.

a) Lorsque $n = 1$, $f_1 : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ correspond à la une densité de la **loi uniforme** sur $[0,1]$, que suit donc la v.a.r. X_1.

b) Soit un entier $n \geqslant 2$; la variable aléatoire X_n a pour univers-image $[0,1]$, donc on peut déjà déterminer que :

- $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_n(x) = 0$ et

- $\forall x \in [1, +\infty[$, $F_n(x) = 1$

- Pour tout $x \in [0,1]$: $\quad F_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} n.t^{n-1}\mathrm{d}t = 0 + \Big[t^n\Big]_0^x = x^n$

La variable aléatoire X_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x.f_n(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Comme f_n est positive sur $[0,1]$, et nulle en-dehors de cette intervalle, cela revient à calculer :

$$\int_0^1 x.nx^{n-1}\mathrm{d}x = n\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = n\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1,$$

donc X_n admet une espérance qui vaut : $\quad E(X_n) = \dfrac{n}{n+1}$.

De même, X_n admet un moment d'ordre 2 qui vaut :

$$E(X_n^2) = \int_0^1 x^2.nx^{n-1}\mathrm{d}x = n\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x = n\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{n}{n+2}$$

Pour finir, X_n admet donc une variance, donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}$$

3. On considère deux variables aléatoires U_n et V_n suivant la loi monôme d'ordre n ($n \geqslant 2$), indépendantes, c'est-à-dire qu'elles vérifient en particulier l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P\big([U_n \leqslant x] \cap [V_n \leqslant x]\big) = P(U_n \leqslant x) \times P(V_n \leqslant x).$$

On pose $M_n = \sup(U_n, V_n)$.

a) On sait classiquement écrire : $\quad \forall x \in \mathbb{R}$, $[M_n \leqslant x] = [U_n \leqslant x] \cap [V_n \leqslant x]$ puisque le maximum de deux réels est inférieur à x, si et seulement si *les deux* réels le sont.

b) Le fait que U_n et V_n soient indépendantes et de même loi monôme d'ordre n permet alors de finir le calcul de la fonction de répartition de M_n :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ F_{M_n}(x) &= P([U_n \leqslant x] \cap [V_n \leqslant x]) = P(U_n \leqslant x) \times P(V_n \leqslant x) \\
&= [F_n(x)]^2 \qquad \text{puisque } U_n \text{ et } V_n \text{ suivent la même loi} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ x^{2n} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}
\end{aligned}$$

On reconnaît ici la fonction de répartition d'une **loi monôme d'ordre** $2n$: c'est donc la loi suivie par M_n, qui est ainsi une variable aléatoire à densité.

Une densité de M_n est alors, sans calcul, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ 2nx^{2n-1} & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

On en déduit en particulier que : $\quad E(M_n) = \dfrac{2n}{2n+1}$.

c) On pose $T_n = \inf(U_n, V_n)$. Il est évident que : $\quad M_n + T_n = U_n + V_n$, la somme du plus grand et du plus petit de deux réels, est toujours égale à la simple somme de ces deux réels !

On en déduit : $\quad T_n = U_n + V_n - M_n$, donc par linéarité de l'espérance, T_n admet une espérance qui vaut

$$E(T_n) = E(U_n) + E(V_n) - E(M_n) = 2\frac{n}{n+1} - \frac{2n}{2n+1} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}$$

Exercice 3

1. La façon la plus simple de répondre à cette question est un tableau de signes : $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$, d'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{e^x-1}{x}$		$+$	$\|$	$+$	

Donc, en effet : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

On définit donc bien une fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

2. La fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ est continue sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, comme quotient de fonctions continues sur ces deux intervalles, où le dénominateur ne s'annule pas.

Le tableau de la question 1. montre de plus que, pour $x \in \mathbb{R}^*$, cette fonction est à valeurs dans $]0; +\infty[$, domaine où la fonction ln est continue : par composition de fonctions continues, la fonction f est donc continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Vérifions alors que f est continue en 0 : on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ (limite classique), et par continuité de ln en 1 : $\lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$, ce qui donne par composée : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, et prouve que la fonction f est continue en 0.

Finalement, la fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

3. Selon des arguments similaires, la fonction f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, comme composée de fonctions de classe C^1, et pour tout $x \neq 0$: $f'(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$,

donc : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{\dfrac{e^x.x - (e^x-1).1}{x^2}}{\dfrac{e^x-1}{x}} = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2} \times \dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$.

4. a) Le développement limité à l'ordre 2 de e^x en 0 : $\quad e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ redonne :

$e^x - 1 = x + o(x) \iff e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, donc $x(e^x-1) \underset{0}{\sim} x^2$, et aussi :

$xe^x - e^x + 1 = x\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) + 1 = \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, soit :

$xe^x - e^x + 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}x^2$, d'où : $\dfrac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x-1)} \underset{0}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$

par compatibilité de l'équivalence avec le quotient, ce qui se réécrit :

$$f'(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}, \text{ qui exprime bien que } \lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2}.$$

b) Le théorème employé ici n'est plus explicitement au programme de la section ECE...

On sait que f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{1}{2}$:

le *théorème de prolongement de la dérivée* assure alors que : f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, en particulier dérivable en 0 avec $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Dans l'esprit strict du nouveau programme, il faudrait d'abord montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ (ce qu'on obtiendrait assez facilement en écrivant un DL en 0 à l'ordre 1 de $f(x)$),

puis on vérifierait comme ci-dessus que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{1}{2} = f'(0)$, ce qui prouverait la continuité de f' en 0... Une étape de plus, donc !

5. a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad g(x) = xe^x - e^x + 1$.

C'est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^x + xe^x - e^x + 0 = xe^x$.

Comme $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x)$ est du signe de x, ce qui permet d'en déduire les variations de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(0) = 0$	$\nearrow$	

b) D'après les variations de g, cette fonction admet un minimum en $x = 0$ qui vaut

$g(0) = 0.e^0 - e^0 + 1 = -1 + 1 = 0$, donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geqslant 0$, et même : $g'(x) > 0$ pour $x \neq 0$.

Comme : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(e^x-1)}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x.(e^x - 1)$.

Or le tableau de signe de la question 1. où on aurait pu raisonner sur le produit plutôt que sur le quotient, montre que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ x(e^x-1) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Comme elle est continue sur $\mathbb{R}$, on peut même dire qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour $x > 0$: $\dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x}$, avec : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-1}{x} = +\infty$, et comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par composée de limites.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = 0 - 1 = -1$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-1}{x} = 0^+$. Comme $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ par composée.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On considère à présent la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $\quad u_{n+1} = f(u_n)$.

6. On raisonne par récurrence ; soit pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$u_n > 0$"

   $\boxed{\text{I.}}$ $\mathcal{P}(0)$ est vraie par définition de u_0.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$:

   $u_n > 0$, donc par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}$:

   $f(u_n) > f(0) \iff u_{n+1} > 0$, et la propriété est héréditaire.

   $\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

7. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(-x) = \ln\left(\frac{e^{-x} - 1}{-x}\right) = \ln\left(\frac{\dfrac{1}{e^x} - 1}{-x}\right) = \ln\left(\frac{\dfrac{1 - e^x}{e^x}}{-x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{e^x - 1}{xe^x}\right) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \ln(e^x)$$

   ce qui est bien : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \; f(-x) = f(x) - x$.

   Remarque : il faut aussi le vérifier pour $x = 0$! $f(0) - 0 = 0 = f(-0)$, donc la relation est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Attention à n'utiliser que des opérations licites, valables pour tout réel non nul x dans les calculs !

   b) D'après la relation précédente, le signe de $f(x) - x$ est donc, sur $\mathbb{R}_+^*$, celui de $f(-x)$.

   Comme $x > 0$: $-x < 0$ et $f(-x) < 0$ d'après le tableau des variations de f.

   Ainsi : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; f(x) - x < 0$.

   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. On sait que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \; u_n > 0$ (q.5.), donc vu le résultat précédent : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \; f(u_n) - u_n < 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} < u_n$,

   ce qui prouve que (u_n) est une suite (strictement) décroissante.

8. La suite (u_n) est donc strictement décroissante, et minorée par 0 : c'est une suite convergente de limite $\ell \geqslant 0$, d'après le théorème de la limite monotone.

   De plus, comme : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue sur $\mathbb{R}$, on sait que la limite ℓ de cette suite est un *point fixe* de f, solution de l'équation :

   $f(x) - x = 0 \iff f(-x) = 0 \iff -x = 0 \iff x = 0$, toujours d'après l'étude de f !

   Le seul point fixe (positif) de f étant 0, on peut conclure :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

9. L'algorithme est très classique, on définit préalablement la fonction f :

```
function y=f(x)
    if x==0 then
        y=0
    else
        y=log((exp(x)-1)/x)
    end
endfunction

u=1; n=0;
while u > 1e-3
    u = f(u)
    n = n+1
end
disp(n)
```

À l'exécution, l'algorithme rend : $n = 11$, première valeur de l'entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

PROBLÈME

Un joueur participe à un jeu se déroulant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- ⋆ s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- ⋆ s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- ⋆ s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- ⋆ s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « *le joueur gagne la n-ième partie* ». De plus, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \ ; \quad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \ ; \quad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \ ; \quad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}.$$

1. a) On utilise la formule des probabilités totales avec ce système complet, pour calculer :

$$P(E_{n+1}) = P(E_{n+1} \cap E_n) + P(E_{n+1} \cap F_n) + P(E_{n+1} \cap G_n) + P(E_{n+1} \cap H_n).$$

Or :

$$E_{n+1} \cap E_n = A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n-1} \cap A_n = E_n \cap A_{n+1},$$

$$E_{n+1} \cap F_n = A_n \cap A_{n+1} \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n = F_n \cap A_{n+1}$$

et E_{n+1} est clairement incompatible des événements H_n et G_n pour lesquels $\overline{A_n}$ doit être réalisé, d'où :

$$\begin{aligned} P(E_{n+1}) = P(E_n \cap A_{n+1}) + P(F_n \cap A_{n+1}) &= P(E_n) \times P_{E_n}(A_{n+1}) + P(F_n) \times P_{F_n}(A_{n+1}) \\ &= \frac{2}{3}.P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n) \end{aligned}$$

d'après les données de l'énoncé.

b) Avec le même système complet, on a aussi :

$$P(F_{n+1}) = P(F_{n+1} \cap E_n) + P(F_{n+1} \cap F_n) + P(F_{n+1} \cap G_n) + P(F_{n+1} \cap H_n)$$

où cette fois, $F_{n+1} = \overline{A_n} \cap A_{n+1}$ est incompatible avec E_n et F_n, et $F_{n+1} \cap G_n = G_n \cap A_{n+1}$, $F_{n+1} \cap H_n = H_n \cap A_{n+1}$, d'où :

$$P(F_{n+1}) = P(G_n) \times P_{G_n}(A_{n+1}) + P(H_n) \times P_{H_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}.P(G_n) + \frac{1}{3}.P(H_n)$$

$$P(G_{n+1}) = P(G_{n+1} \cap E_n) + P(G_{n+1} \cap F_n) + P(G_{n+1} \cap G_n) + P(G_{n+1} \cap H_n)$$

où $G_{n+1} = A_n \cap \overline{A_{n+1}}$ est incompatible avec G_n et H_n,
et $G_{n+1} \cap E_n = A_{n-1} \cap A_n \cap \overline{A_{n+1}} = E_n \cap \overline{A_{n+1}}$, $\quad G_{n+1} \cap F_n = F_n \cap \overline{A_{n+1}}$, et

$$\begin{aligned} P(G_{n+1}) &= P(E_n) \times P_{E_n}(\overline{A_{n+1}}) + P(F_n) \times P_{F_n}(\overline{A_{n+1}}) \\ &= P(E_n) \times (1 - P_{E_n}(A_{n+1})) + P(F_n) \times (1 - P_{F_n}(A_{n+1})) = \frac{1}{3}.P(E_n) + \frac{1}{2}.P(F_n) \end{aligned}$$

On obtient de même que :

$$P(H_{n+1}) = \frac{1}{2}.P(G_n) + \frac{2}{3}.P(H_n).$$

c) Les relations qu'on vient d'établir prouvent effectivement que :

$$\forall n \geqslant 2,\ U_{n+1} = \begin{pmatrix} P(E_{n+1}) \\ P(F_{n+1}) \\ P(G_{n+1}) \\ P(H_{n+1}) \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}, \text{soit } U_{n+1} = MU_n \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

2. a) Le calcul matriciel prouve qu'avec les matrices P et Q données par l'énoncé :

$PQ = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, soit : $PQ = 10.I_4 \iff P(\frac{1}{10}.Q) = I_4$, et on sait qu'une telle relation prouve que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{10}.Q$, sans calcul supplémentaire...

b) On note $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ les colonnes de la matrice P. Les calculs matriciels donnent :

$$MC_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}.C_1, \qquad MC_2 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/6 \\ -1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}.C_2$$

$$MC_3 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.C_3, \qquad MC_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = C_4$$

Tous ces calculs prouvent que les réels $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ et 1 sont valeurs propres de M, de vecteurs propres respectifs C_1, C_2, C_3 et C_4.

c) On dispose donc de 4 valeurs propres distinctes pour la matrice M d'ordre 4 : elle est donc diagonalisable, et les colonnes de P forment une base de vecteurs propres pour M, de sorte que la formule de changement de base donne :

$$M = PDP^{-1}, \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. a) Un grand classique : puisque $M = PDP^{-1}$, on prouve proprement que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}$$

en rédigeant une récurrence sur n.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 0$: $M^0 = I_4$ (et pas 1 !!!), et $PD^0P^{-1} = PI_4P^{-1} = PP^{-1} = I_4 = M^0$, donc la propriété est initialisée.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain entier n, et montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$:

---

on écrit :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \\ &= PD^n \times I_4 \times DP^{-1} = PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

ce qui est la relation attendue.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est donc initialisée à 0 et est héréditaire : d'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) On ne se lasse jamais de rédiger des grands classiques...

Prouvons par récurrence que : $\forall n \geqslant 2,\ U_n = M^{n-2}.U_2$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 2$: $M^{2-2}.U_2 = M^0.U_2 = I_4.U_2 = U_2$, donc la propriété est vraie au rang $n = 2$.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geqslant 2$. Prouvons alors qu'au rang suivant : $U_{n+1} = M^{n+1-2}.U_2 = M^{n-1}.U_2$.

On sait bien sur depuis 1.c) que : $U_{n+1} = MU_n$, donc $U_{n+1} = M \times M^{n-2}U_2 = M^{n-1}U_2$.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est donc initialisée à 2 et est héréditaire : d'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

c) Le calcul matriciel de $M^n = PD^nP^{-1}$ permet d'obtenir l'expression de M^n, puisque :

$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} (-1/3)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/6)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix}$, propriété des matrices <u>diagonales</u> à toujours rappeler ! De plus $P^{-1} = \frac{1}{10}Q$ et $M^n = \frac{1}{10}.PD^nQ$.

On obtient concrètement et après calculs : $M^n = \frac{1}{10}.\begin{pmatrix} -(-\frac{1}{3})^n + 2.(\frac{1}{6})^n + 6.(\frac{1}{2})^n + 3 & * & * & * \\ 2.(-\frac{1}{3})^n - 2.(\frac{1}{6})^n - 2.(\frac{1}{2})^n + 2 & * & * & * \\ -2.(-\frac{1}{3})^n - 2.(\frac{1}{6})^n + 2.(\frac{1}{2})^n + 2 & * & * & * \\ (-\frac{1}{3})^n + 2.(\frac{1}{6})^n - 6.(\frac{1}{2})^n + 3 & * & * & * \end{pmatrix}$

seule la première colonne est explicitée. Il est logique de ne pas calculer tous les autres coefficients, puisqu'on écrit maintenant :

$\forall n \geqslant 2,\ U_n = M^{n-2}.U_2$ où $U_2 = \begin{pmatrix} P(E_2) \\ P(F_2) \\ P(G_2) \\ P(H_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et le produit matriciel $M^{n-2}.U_2$ ne demande que la connaissance de cette première colonne.

En fait : $\forall n \geqslant 2, \begin{cases} P(E_n) & = \frac{1}{10}.\Big[-\big(-\frac{1}{3}\big)^{n-2} + 2.\big(\frac{1}{6}\big)^{n-2} + 6.\big(\frac{1}{2}\big)^{n-2} + 3\Big] \\ P(F_n) & = \frac{1}{10}.\big[2.(-\frac{1}{3})^{n-2} - 2.(-\frac{1}{6})^{n-2} - 2.(\frac{1}{2})^{n-2} + 2\big] \\ P(G_n) & = \frac{1}{10}.\big[-2.(-\frac{1}{3})^{n-2} - 2.(\frac{1}{6})^{n-2} + 2.(\frac{1}{2})^{n-2} + 2\big] \\ P(H_n) & = \frac{1}{10}.\big[(-\frac{1}{3})^{n-2} + 2.(\frac{1}{6})^{n-2} - 6.(\frac{1}{2})^{n-2} + 3\big] \end{cases}$

on se contente de reprendre la première colonne de M^{n-2} (attention donc au décalage d'indice dans l'exposant).

d) Comme $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$ sont des réels de l'intervalle $]-1;1[$, alors :
$\lim\limits_{n\to+\infty}\big(-\frac{1}{3}\big)^n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty}\big(-\frac{1}{3}\big)^{n-2}$, et de même : $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(\frac{1}{6}\big)^{n-2} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty}\big(\frac{1}{2}\big)^{n-2}$, comme limites de suites géométriques.
Les expressions obtenues à la question précédente donnent effectivement :

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{3}{10}\ ;\quad \lim_{n\to+\infty} P(F_n) = \frac{2}{10}\ ;\quad \lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \frac{2}{10}\ ;\quad \lim_{n\to+\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}.$$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la k^{e} partie, et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc des variables certaines).

a) Soit un entier $k \geqslant 2$: si on veut seulement que la k-ième partie soit gagnée (événement $A_k = [X_k = 1]$), la $k-1$-ième partie peut être gagnée ou perdue, c'est-à-dire que :

$$A_k = (A_{k-1} \cup \overline{A_{k-1}}) \cap A_k = (A_{k-1} \cap A_k) \cup (\overline{A_{k-1}} \cap A_k) = E_k \cup F_k.$$

b) Comme les événements E_k et F_k sont incompatibles :

$$\forall k \geqslant 2,\quad P(X_k = 1) = P(E_k \cup F_k) = P(E_k) + P(F_k) = \frac{1}{10}.\Big[\big(-\frac{1}{3}\big)^{k-2} + 4.\big(\frac{1}{2}\big)^{k-2} + 5\Big]$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{10}.\big(-\frac{1}{3}\big)^{k-2} + \frac{2}{5}.\big(\frac{1}{2}\big)^{k-2}$$

Et : $\quad P(X_k = 0) = 1 - P(X_k = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\big(-\frac{1}{3}\big)^{k-2} - \frac{2}{5}\big(\frac{1}{2}\big)^{k-2}$.

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

a) Pour $n = 2$ (deux parties en tout) :
$[S_2 = 2] = A_1 \cap A_2 = E_1$ qui est l'événement certain, donc $P(S_2 = 2) = 1$.
Pour $n = 3$:
$[S_3 = 2] = A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$ et $P(S_3 = 2) = P(A_1 \cap A_2).P_{A_1\cap A_2}(\overline{A_3}) = 1.(1 - P_{E_2}(A_3)) = \frac{1}{3}$.
Si $n > 3$, $[S_n = 2] = \underbrace{A_1 \cap A_2}_{=E_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$, et

$$P(S_n = 2) = P(E_2) \times P_{E_2}(\overline{A_3}) \times P_{A_1\cap A_2\cap\overline{A_3}}(\overline{A_4}) \cap \cdots \cap P_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap\overline{A_{n-2}}\cap\overline{A_{n-1}}}(\overline{A_n})$$
$$= 1 \times (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{3}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{6}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}$$

b) L'événement $[S_n = n]$ est réalisé si et seulement si les n parties jouées ont toutes été gagnées. Ainsi :
$[S_n = n] = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n$, et
$P(S_n = n) = P(A_1 \cap A_2) \times P_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

c) La relation qui lie le nombre de parties gagnées en n parties, et les variables de Bernoulli associées est :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

La linéarité de l'espérance donne :

$$\begin{aligned}
E(S_n) &= \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} P(X_k = 1) \\
&= P(A_1) + \sum_{k=2}^{n} P(A_k) \qquad \text{où } P(A_1) = 1 \text{ (puisque les deux premières parties jouées sont gagnées)} \\
&= 1 + \frac{1}{10}.\sum_{k=2}^{n}(-\frac{1}{3})^{k-2} + \frac{4}{10}.\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{2})^{k-2} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{10}.\sum_{j=0}^{n-2}(-\frac{1}{2})^{j} + \frac{2}{5}.\sum_{j=0}^{n-2}(\frac{1}{2})^{j} + (n-2+1).\frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{1}{10}.1.\frac{1-(-1/3)^{n-2+1}}{1-(-1/3)} + \frac{2}{5}.1.\frac{1-(1/2)^{n-2+1}}{1-(1/2)} + \frac{n-1}{2} \\
&= \frac{3}{40}.\left(1-(-\frac{1}{3})^{n-1}\right) + \frac{4}{5}.\left(1-(\frac{1}{2})^{n-1}\right) + \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$