MATHÉMATIQUES - Edhec E 2004

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Le but de cet exercice est de calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$ et on a, en particulier, $u_0=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2+t}\mathrm{d}t$.

1. pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $t\mapsto\dfrac{1}{1+t+t^n}$ est bien définie et continue sur $[0;1]$, comme inverse d'une fonction polynôme qui ne s'annule pas sur cet intervalle.

   L'intégrale $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$ est donc toujours bien définie.

2. $u_0=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2+t}\mathrm{d}t=\Big[\ln|2+t|\Big]_0^1=\ln(3)-\ln(2)=\ln\big(\frac{3}{2}\big)$.

   $u_1=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2}{1+2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.\Big[\ln|1+2t|\Big]_0^1=\frac{1}{2}\ln(3)$.

3. a) On compare les deux intégrales u_n et u_{n+1} en comparant les fonctions intégrées sur $[0;1]$:

   Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, et pour tout réel $t\in[0;1]$: $t^{n+1}\leqslant t^n$, donc $0<1+t+t^{n+1}\leqslant 1+t+t^n$.

   Par inverse, on a donc : $\forall n\in N,\ \forall t\in[0;1],\ \dfrac{1}{1+t+t^{n+1}}\geqslant\dfrac{1}{1+t+t^n}$.

   Les fonctions concernées sont continues sur $[0;1]$, et $0<1$ (bornes dans l'ordre croissant), donc par *croissance de l'intégrale* :

   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_0^1\frac{1}{1+t+t^{n+1}}\mathrm{d}t\geqslant\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geqslant u_n$$

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante.

   b) Là encore, on majore l'intégrale u_n en majorant la fonction intégrée :

   pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ et tout réel $t\in[0;1]$: $1+t+t^n\geqslant 1+t>0$, donc $\dfrac{1}{1+t+t^n}\leqslant\dfrac{1}{1+t}$.

   Les fonctions intégrées sont continues sur $[0;1]$, $0<1$ donc par croissance de l'intégrale :

   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t\iff u_n\leqslant\Big[\ln|1+t|\Big]_0^1=\ln(2)$$

   c) La suite (u_n) est donc croissante, majorée par $\ln(2)$: elle est par conséquent convergente, d'après le théorème de limite monotone.

4. a) On reprend les calculs précédents :

   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad\ln(2)-u_n=\int_0^1\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1+t+t^n}\right)\mathrm{d}t$$

   par linéarité de l'intégrale.

© Major-Prépa

b) En examinant de plus près l'intégrale précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - \ln(2) = \int_0^1 \frac{1+t+t^n-1-t}{(1+t)(1+t+t^n)}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}\mathrm{d}t.$$

Le terme $\dfrac{1}{n+1}$ apparaîtra en primitivant t^n, il faut donc majorer le reste de la fonction intégrée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0;1],\ (1+t)(1+t+t^n) \geqslant 1, \quad \text{donc} \quad \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} \leqslant t^n.$$

Les fonctions concernées sont continues sur $[0;1]$, $0 < 1$ donc par croissance de l'intégrale, une fois encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \mathrm{d}t \iff \ln(2) - u_n \leqslant \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

c) Des questions précédentes, on déduit l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln(2) - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \lim_{n\to+\infty} 0$, donc par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(2) - u_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2).$$

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.

a) Soit $n \geqslant 2$; on sait qu'au voisinage de $+\infty$: $1+t+t^n \underset{t\to+\infty}{\sim} t^n$ (un polyôme est équivalent à son terme de plus haut degré en $+\infty$).

L'équivalence est compatible avec le passage à l'inverse, donc $\dfrac{1}{1+t+t^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^n}$.

Les fonctions concernées sont continues, positives sur $[1;+\infty[$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t$ converge, comme intégrale de Riemann de paramètre $n \geqslant 2 > 1$.

Le critère d'équivalence assure donc que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$ est de même nature, c'est-à-dire convergente.

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2 ; on utilise cette fois les inégalités :

$$\forall t \in [0;1], \quad 0 < t^n \leqslant 1+t+t^n, \quad \text{donc} \quad 0 < \frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{t^n}.$$

Les fonctions concernées sont continues, positives, d'intégrales convergentes sur $[1;+\infty[$.
La propriété de positivité et croissance de l'intégrale sous sa forme généralisée s'écrit :

$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t$$

où :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty} \left[\frac{1}{-n+1}t^{-n+1}\right]_1^X = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{X^{n-1}} - 1\right) = \frac{1}{n-1}$$

ce qui donne bien :

$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

© Major-Prépa

c) Le théorème d'encadrement donne naturellement, avec le résultat précédent : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Pour tout entier $n \geqslant 2$: l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$ est convergente, comme somme de deux intégrales convergentes.

Elle vaut d'ailleurs : $u_n + v_n$, et les résultats précédents permettent donc de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = \ln(2) + 0 = \ln(2)$$

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.

On note $e_0,\ e_1,\ e_2$ les fonctions définies, pour tout réel x par $e_0(x) = 1,\ e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$ et on rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.

Soit f l'application qui à toute fonction polynomiale P de E associe la fonction $Q = f(P)$, où Q est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2 - x)P(x)$.

1. a) Démontrons tout d'abord que f est une application linéaire ; il n'est pas forcément évident d'adopter des notations qui évitent les abus !

Pour tous polynômes P_1 et P_2 de E, et tout réel λ, en remarquant que l'application $x \mapsto x^2 - x$ est le polynôme $e_2 - e_1$:

$$\begin{aligned} f(P_1 + \lambda.P_2) &= \Big[(e_2 - e_1).(P_1 + \lambda.P_2)\Big]'' = \Big[(e_2 - e_1).P_1 + \lambda.(e_2 - e_1).P_2\Big]'' \\ &= \Big[(e_2 - e_1).P_1\Big]'' + \lambda.\Big[(e_2 - e_1).P_2]'' \qquad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= f(P_1) + \lambda.f(P_2) \end{aligned}$$

Donc f est bien une application linéaire. De plus : tout polynôme P de E est de degré inférieur ou égal à 2. Le produit $(e_2 - e_1).P$ est alors de degré inférieur ou égal à $2 + 2 = 4$, et sa dérivée seconde est à nouveau de degré inférieur ou égal à 2, ce qui prouve que :

$\forall P \in E,\ f(P) \in E$, et f est bien un endomorphisme de E.

b) On calcule les trois images des vecteurs de la base de E par φ :

- $f(e_0)$ est la dérivée seconde de l'application $x \mapsto (x^2 - x).1$,
  donc $f(e_0) :\ x \mapsto 2$, soit $f(e_0) = 2e_0$.

- $f(e_1)$ est la dérivée seconde de l'application $x \mapsto (x^2 - x).x = x^3 - x^2$,
  donc $f(e_1) :\ x \mapsto 6x - 2$, soit $f(e_1) = 6e_1 - 2e_0$.

- $f(e_2)$ est la dérivée seconde de l'application $x \mapsto (x^2 - x).x^2 = x^4 - x^3$,
  donc $f(e_2) :\ x \mapsto 12x^2 - 6x$, soit $f(e_2) = 12e_2 - 6e_1$.

c) Au vu des résultats précédents, la matrice A de f dans la base (e_0, e_1, e_2) est bien :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(e_0) & f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

© Major-Prépa

d) La matrice A qui représente f est ici triangulaire supérieure, et tous ses éléments diagonaux sont non-nuls. On en déduit que A est inversible, et donc que l'endomorphisme associé est bijectif, c'est-à-dire que f est un automorphisme de f.

2. a) La matrice A étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres, et donc celles de f, sont ses éléments diagonaux, c'est-à-dire :
$$\mathrm{Sp}(f) = \{2, 6, 12\}$$
La matrice A, carrée d'ordre 3, possède ainsi 3 valeurs propres distinctes : c'est un critère *suffisant* pour en déduire que f est diagonalisable.

b) Le critère précédent stiplue également que les trois sous-espaces propres de f sont chaucn de dimension 1. On résout le système : $(A - \lambda.I_3)X = 0_{3,1}$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, pour chacune des valeurs propres λ :

- $(A - 2I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2y & & & = & 0 \\ 4y & - & 6z & = & 0 \\ & & 10z & = & 0 \end{array} \right.$

  $\iff y = z = 0$

  Donc : $\quad E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, ce qui signifie :
$$E_2(f) = \mathrm{Vect}(e_0)$$

- $(A - 6I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrrcl} -4x & - & 2y & & = & 0 \\ & & & -6z & = & 0 \\ & & & 6z & = & 0 \end{array} \right.$

  $\iff \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}$

  Donc : $\quad E_6(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, ce qui signifie :
$$E_6(f) = \mathrm{Vect}(e_0 - e_1)$$

- $(A - 12I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} -10 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -10x & - & 2y & & & = & 0 \\ & & -6y & - & 6z & = & 0 \end{array} \right.$

  $\iff \begin{cases} y = -5x \\ z = -y = 5x \end{cases}$

  Donc : $\quad E_{12}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -5x \\ 5x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$, ce qui signifie :
$$E_{12}(f) = \mathrm{Vect}(e_0 - 5e_1 + 5e_2)$$

Dans les trois cas, on a trouvé une famille génératrice du sous-espace constituée d'un vecteur non-nul, qui constitue donc aussi une famille libre, donc une base du sous-espace propre concerné.

3. a) L'endomorphisme f est diagonalisable : dans une base formée de vecteurs propres, sa matrice représentative est diagonale. Concrètement, on obtient une base de vecteurs propres en réunissant des bases de chacun des sous-espaces précédemment calculés.

En choisissant à chaque fois, comme cela a été anticipé précédemment, un vecteur propre de

© Major-Prépa

première composante égale à 1, on obtient la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

et la formule de changement de base donne :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

b) La relation précédente conduit classiquement à la relation générale $\mathcal{P}(n)$: "$A^n = PD^nP^{-1}$", démontrée vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par une récurrence ultra-classique :

$\boxed{\text{I.}}$ $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie :

On suppose : $A^n = PD^nP^{-1}$, donc

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nI_3DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1},$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

4. a) On sait déjà que la matrice P est inversible. On calcule P^{-1} en résolvant le système $PX = Y$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et de second membre $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$PX = Y \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a \\ & & -2y & - & 5z & = & b \\ & & & & 5z & = & c \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{cases} x = a - y - z = a + b/2 + 3c/10 \\ y = (-5z - b)/2 = -b/2 - c/2 \\ z = c/5 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/10 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

b) La matrice D étant diagonale, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}$, et :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/10 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 6^n & 12^n \\ 0 & -2 \times 6^n & -5 \times 12^n \\ 0 & 0 & 5 \times 12^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/10 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & \frac{1}{2}(2^n - 6^n) & \frac{3}{10}.2^n - \frac{1}{2}.6^n + \frac{1}{5}.12^n \\ 0 & 6^n & 6^n - 12^n \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}$$

© Major-Prépa

c) On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M.

On pose $B = \dfrac{1}{12}.A$.

Alors : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ B^n = \dfrac{1}{12^n}.A^n = \begin{pmatrix} (\frac{1}{6})^n & \frac{1}{2}[(\frac{1}{6})^n - (\frac{1}{2})^n] & \frac{3}{10}.(\frac{1}{6})^n - (\frac{1}{2})^{n+1} + \frac{1}{5} \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & (\frac{1}{2})^n - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Puisque $0 < \dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{2} < 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$, et la suite de matrice $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien (coefficient par coefficient) vers la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour laquelle on vérifie sans peine que : $\quad J^2 = J$.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois une pièce équilibrée, les lancers étant supposés indépendants.

On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun "Pile" pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier "Pile".

1. a) Par définition de Z, on a déjà : $Z(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.

   Réciproquement, soit $k \in [\![0, n]\!]$: si $k \geqslant 1$, alors l'événement $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k$, de probabilité non nulle, réalise $[Z = k]$, et donc $k \in Z(\Omega)$. L'événement $F_1 \cap \cdots \cap F_n$ réalise $[Z = 0]$, donc $0 \in Z(\Omega)$.

   On a donc : $\quad Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

   b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $\quad P(Z = k) = P(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ par indépendance des lancers successifs.

   De même : $\quad P(Z = 0) = P(F_1 \cap \cdots \cap F_n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   c) On tient compte ici du fait que $P(Z = 0)$ est un cas particulier :

$$\sum_{k\in Z(\Omega)} P(Z = k) = P(Z = 0) + \sum_{k=1}^{n} P(Z = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}.\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

   d) Le code suivant doit prendre en compte le fait qu'on se donne un nombre maximum de n lancers pour obtenir un premier Pile.

© Major-Prépa

```
n = input("Donner le nombre de lancers : ")
k = 0 ; z = 0;
lancer = -1 // initialisation avant le 1er lancer
while (lancer < 1) & (k<n)   // & symbolise le "et"
    k = k+1; lancer = floor(2*rand())
    disp(lancer)
    if (lancer==1) then
        z = k
    end
end
disp(z)
```

On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \cdots, U_n$ telles que pour tout k de $\{0, 1, \cdots, n\}$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante : si après les lancers de la pièce décrite dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geqslant 1$), alors on tire une à une et avec remise, k boules dans l'urne U_k, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages. Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$: en effet, on obtient au minimum 0 boule blanche, et au maximum n boules blanches (si on a obtenu $Z = n$, on n'a tiré que des boules blanches), tous les résultats intermédiaires étant possibles (dès qu'on est amené à effectuer les tirages dans l'urne U_k).

3. a) D'après l'énoncé : si Z a pris la valeur 0, X prend la valeur 0. On a donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P_{[Z=0]}(X = i) = 0 \quad \text{et} \quad P_{[Z=0]}(X = 0) = 1.$$

b) Si $Z = n$, on effectue n tirages dans l'urne U_n qui contient n boules blanches et 0 boule noire. On a donc :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ P_{[Z=n]}(X = i) = 0; \quad P_{[Z=n]}(X = n) = 1.$$

c) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Si $k < i \leqslant n$, alors $P_{[Z=k]}(X = i) = 0$ puisqu'on ne peut pas obtenir plus de k boules blanches en k tirages.

Si $0 \leqslant i \leqslant k$, et sachant $[Z = k]$, $[X = i]$ est réalisé si et seulement si on obtient i succès lors de k épreuves identiques et indépendantes : chacune d'elles consiste à effectuer k tirages avec remise dans l'urne U_k qui contient n boules dont k sont blanches.
La probabilité de succès pour chaque épreuve étant alors $\frac{k}{n}$, on a :

$$\forall i \in [\![0, k]\!], \quad P_{[Z=k]}(X = i) = \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-i}.$$

Remarque : ceci signifie que la *loi conditionnelle* de X *sachant* $[Z = k]$ est la loi binomiale de paramètres $\left(k, \frac{k}{n}\right)$.

4. a) On invoque ici la formule des probabilités totales, avec le système complet $\big([Z = k]\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \sum_{k=0}^{n} P_{[Z=k]}(X = 0).P(Z = k) \\ &= P_{[Z=0]}(X = 0).P(Z = 0) + \sum_{k=1}^{n-1} P_{[Z=k]}(X = 0).P(Z = k) + P_{[Z=n]}(X = 0).P(Z = n) \end{aligned}$$

D'après les questions précédentes, en utilisant notamment la formule ci-dessus avec $i = 0$:

$$P(X = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k + 0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k.$$

© Major-Prépa

b) On utilise là encore la formule des probabilités totales, avec le même système complet d'événements.

La seule probabilité conditionnelle non nulle est ici $P_{[Z=n]}(X=n)=1$.

Comme $P(Z=n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, on a bien :

$$P(X=n)=0+P_{[Z=n]}(X=n).P(Z=n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

c) Encore et toujours la formule des probabilités totales ; pour $0\leqslant k<i$ et $k=n$, la question 3.c) donne pour $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$: $P_{[Z=k]}(X=i)=0$.

Il ne reste donc que les termes d'indices $k\in\{i,\ldots,n-1\}$ dans :

$$P(X=i)=\sum_{k=0}^{n}P_{[Z=k]}(X=i).P(Z=k)=\sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{k-i}.\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

5. Cette question va demander quelques compétences de calcul avec les sommes doubles :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}P(X=i)&=P(X=0)+\sum_{k=1}^{n-1}P(X=i)+P(X=n)\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{k=i}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\left(\frac{1}{2}\right)^n\\
&=\frac{2}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{k-i}\\
&=\frac{1}{2^{n-1}}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{k-i}
\end{aligned}$$

On a échangé l'ordre de sommation, on reconnaît dans la somme intérieure une formule du binôme à laquelle il manque seulement le terme pour $i=0$:

$$\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{k-i}=\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{k-i}=\left(\frac{k}{n}+1-\frac{k}{n}\right)^k-\left(1-\frac{k}{n}\right)^k=1-\left(\frac{n-k}{n}\right)^k$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}P(X=i)&=\frac{1}{2^{n-1}}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\left(1-\left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right)\\
&=\frac{1}{2^{n-1}}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\\
&=\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{n-1}}+1-\frac{1}{2^{n-1}}=1
\end{aligned}$$

Un point sur l'interversion des indices dans une somme double :

Le calcul précédent demande de comprendre comment on peut intervertir l'ordre des indices dans une somme double du type $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}a_{i,k}$, où les $a_{i,k}$ sont des réels doublement indicés, qu'on peut présenter sous la forme d'un tableau à double entrée :

© Major-Prépa

$i \backslash k$	1	2	3	$\cdots$	$n-1$
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$\cdots$	$a_{1,n-1}$
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$\cdots$	$a_{2,n-1}$
3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$\cdots$	$a_{3,n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$
$n-1$	$a_{n-1,1}$	$a_{n-1,2}$	$a_{n-1,3}$	$\cdots$	$a_{n-1,n-1}$

Les termes concernés par la somme double sont écrits en bleu dans le tableau ci-dessus.
La somme double $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{k=i}^{n-1} a_{i,k}\right)$ signifie qu'on a d'abord sommé, pour chaque ligne d'indice i, les éléments d'indice $k = i$ à $n-1$: il s'agit donc de tous les termes à partir de la diagonale jusqu'à la dernière colonne.
La deuxième somme indique qu'on a additionné toutes ces sommes par ligne, ce qui représente en définitive tous les éléments situés au-dessus de la diagonale du tableau.

La disposition des termes dans le tableau permet de comprendre qu'on peut aussi envisager la sommation par colonne de tous ces termes : pour une colonne donnée d'indice k, on additionne tous les termes d'indices i compris entre 1 et k pour atteindre la diagonale.
On additionne ensuite toutes ces sommes, pour k variant de 1 à $n-1$.

La somme double s'écrit cette fois : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{i,k}\right)$.

L'interversion des indices dans la somme double est ainsi résumée par la relation :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k} a_{i,k}$$

PROBLÈME

Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.
On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) On répond à la question par un calcul de limite :
   $\displaystyle\lim_{n\to 0^+} -\frac{n}{x} = -\infty$ car $n > 0$, et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc par composée : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{n}{x}} = 0$,
   et ainsi : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} xe^{-\frac{n}{x}} = 0 \times 0 = 0 = f_n(0)$; la fonction f_n est bien continue à droite en 0.

   b) On étudie la dérivabilité à droite via le taux d'accroissement de la fonction f_n en ce point :
   Pour x réel au voisinage de 0^+, $\dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = e^{-\frac{n}{x}}$ qui tend vers 0 comme on l'a déjà vu : ceci prouve que f_n est dérivable à droite en 0, avec $(f_n')_d(0) = 0$.
   La courbe C_n admet donc une demi-tangente horizontale en ce point.

© Major-Prépa

2. a) La fonction f_n est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ comme produit de la fonction $x\mapsto x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, par la composée : $\exp\circ(-n.i)$ où $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction inverse i étant bien dérivable sur les deux intervalles cités.

$$\forall x\in\mathbb{R}^* : \quad f_n'(x)=1.e^{-\frac{n}{x}}+x.(\frac{n}{x^2}).e^{-\frac{n}{x}}=\frac{x+n}{x}.e^{-\frac{n}{x}}$$

Comme $e^{-\frac{n}{x}}$ est strictement positif pour tout x non nul, alors le signe de x est celui de $\dfrac{n+x}{x}$.

L'étude de signe est résumée par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+n$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{n}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{n}{x}}=e^0=1$ par continuité de l'exponentielle en 0.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-\frac{n}{x}}=+\infty$.

Ensuite, $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{n}{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-\frac{n}{x}}=-\infty$ (" $-\infty\times+\infty$").

On peut ainsi dresser le tableau de variation complet de f_n :

x	$-\infty$	$-n$		0	$+\infty$
f_n	$-\infty$ $\nearrow$	$f_n(-n)$	$\searrow$ $-\infty$	$\|$ 0	$\nearrow$ $+\infty$

3. a) D'après le cours : $e^u=1+u+\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$ au voisinage de 0.

b) Lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$: $u=-\dfrac{n}{x}$ tend vers 0, donc :

$$e^{-\frac{n}{x}}=1-\frac{n}{x}+\frac{n^2}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2}) \implies f_n(x)=x.e^{-\frac{n}{x}}=x-n+\frac{n^2}{2x}+o(\frac{1}{x})$$

au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.

c) Le développement asymptotique donne :

$$f_n(x)-(x-n)=\frac{n^2}{2x}+o(\frac{1}{x})$$

soit :

$$f_n(x)-(x-n)\underset{x\to-\infty}{\sim}\frac{n^2}{2x}$$

et aussi

$$f_n(x)-(x-n)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{n^2}{2x}$$

Dans les deux cas, l'équivalence permet de calculer la limite :

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x)-(x-n)=\lim_{x\to-\infty}\frac{n^2}{2x}=0,\ \text{et de même}\ \lim_{x\to+\infty} f_n(x)-(x-n)=0$$

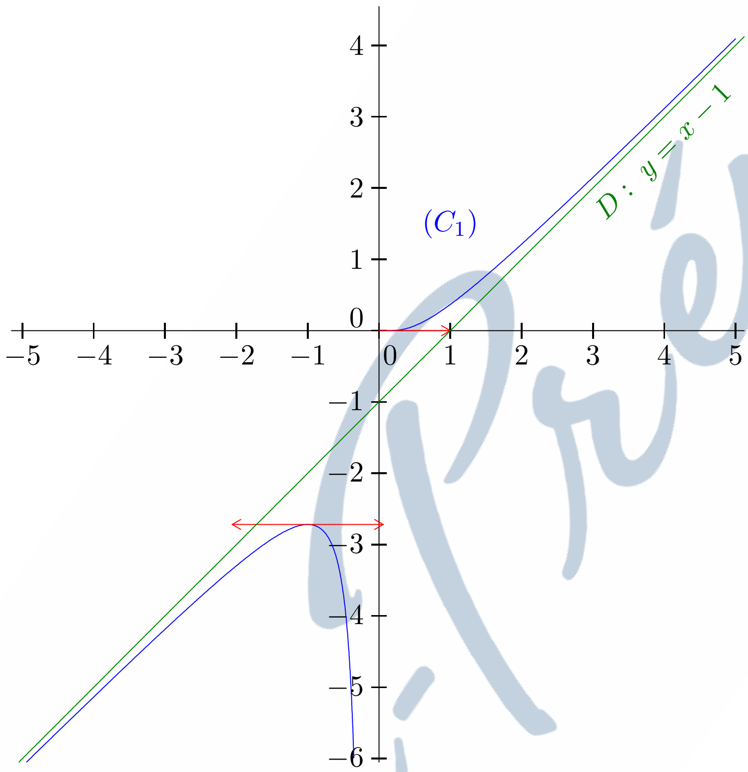
Ce qui prouve que la droite D_n d'équation : $y=x-n$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_n$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

L'équivalent précédent permet aussi de dire que les expressions $f_n(x)-(x-n)$ et $\dfrac{n^2}{2x}$ sont de même signe aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$. Ainsi :

© Major-Prépa

- Au voisinage de $+\infty$: $\dfrac{n^2}{2x} > 0$, donc $f_n(x) - (x-n) > 0$, et $\mathcal{C}_n$ est située au-dessus de son asymptote D_n.
- Au voisinage de $-\infty$: $\dfrac{n^2}{2x} < 0$, donc $f_n(x) - (x-n) < 0$ et $\mathcal{C}_n$ est située au-dessous de son asymptote D_n.

d) On trace l'allure de (C_1) en tenant compte de toutes les informations précédentes : tangentes, asymptotes, valeurs particulières, positions relatives.



4. a) • Sur l'intervalle $]-\infty; 0[$, la fonction f_n a pour maximum : $f_n(-n) = -n.e^1 < 0$, donc l'équation $f_n(x) = 1$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

• Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la fonction f_n est continue, strictement croissante sur $]0; +\infty[$, à valeurs dans $]0; +\infty[$ qui contient 1.

D'après le théorème de la bijection, il existe donc une unique solution à l'équation $f_n(x) = 1$ d'inconnue x, appartenant à $]0; +\infty[$ et qu'on note u_n.

C'est donc aussi l'unique solution sur $\mathbb{R}^*$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(1) = e^{-n} < 1$ car $n > 0$, donc $f_n(1) < f_n(u_n) = 1$, ce qui donne bien :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; 1 < u_n \text{ par stricte croissance de } f_n \text{ sur }]0; +\infty[.$$

De plus, u_n vérifie (et c'est le seul) la relation :
$$f_n(u_n) = 1 \iff u_n.e^{-\frac{n}{u_n}} = 1 \iff u_n = e^{\frac{n}{u_n}} \iff \ln(u_n) = \frac{n}{u_n} \iff u_n.\ln(u_n) = n.$$

c) La fonction $g : x \mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $[1; +\infty[$, de dérivée $g' : x \mapsto \ln(x) + 1$, strictement positive sur $[1; +\infty[$.

Ainsi, g est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$, avec $g(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$: elle réalise donc une bijection, d'après le théorème du même nom, de $[1; +\infty[$ dans $[0; +\infty[$.

Sa bijection réciproque g^{-1} est elle-même continue, strictement croissante de $[0; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$ et vérifie par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = +\infty$.

© Major-Prépa

Par bijectivité de g, la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \ln(u_n) = n \iff g(u_n) = n$ se réécrit :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = g^{-1}(n)$, et on a bien : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} g^{-1}(n) = +\infty$.

d) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 1$ et $u_n.\ln(u_n) = n$, on peut composer les deux membres par le logarithme, et on obtient effectivement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(u_n) + \ln\big(\ln(u_n)\big) = \ln(n)$$

Les croissances comparées donnent : $\ln(X) = o(X)$ au voisinage de $+\infty$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = +\infty$, donc $\ln\big(\ln(u_n)\big) = o\big(\ln(u_n)\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Ainsi : $\ln(n) = \ln(u_n) + o\big(\ln(u_n)\big)$, ce qui exprime bien l'équivalence :

$$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Il reste ici à bien prendre en compte le fait que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n.\ln(u_n) = n$,
donc : $\ln(u_n) = \dfrac{n}{u_n}$, et le résultat précédent se réécrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n.\dfrac{\ln(n)}{n} = 1$, ce qui fournit l'équivalence :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$$

5. a) Le plus efficace est ici de repartir de la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = g^{-1}(n)$, sachant que g^{-1} est strictement croissante sur $[0;+\infty[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n < n+1 \Longrightarrow g^{-1}(n) < g^{-1}(n+1) \iff u_n < u_{n+1},$$

et la suite (u_n) est bien strictement croissante.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; le réel u_{n+1} vérifie, pour sa part, la relation :

$$f_{n+1}(u_{n+1}) = 1 \iff u_{n+1}.e^{-\frac{n+1}{u_{n+1}}} = 1 \iff u_n.e^{-\frac{n}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_{n+1}}} = 1 \iff u_{n+1}.e^{-\frac{n}{u_{n+1}}} = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$$

ce qui est bien, d'après l'expression de f_n : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

6. On pose $I_n = \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)\mathrm{d}t$.

a) Comme la fonction f_n est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, elle l'est encore sur l'intervalle $[u_n;u_{n+1}] \subset \mathbb{R}^{+*}$, dont les bornes sont bien écrites dans l'ordre croissant ($u_n \leqslant u_{n+1}$) d'après la question précédente.
L'inégalité de la moyenne, appliquée à cette fonction continue sur ce segment, donne :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \min_{t\in[u_n,u_{n+1}]} f_n(t).(u_{n+1}-u_n) &\leqslant \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \max_{t\in[u_n;u_{n+1}]} f_n(t).(u_{n+1}-u_n)\\ \iff \underbrace{f_n(u_n)}_{=1}.(u_{n+1}-u_n) &\leqslant\ I_n \leqslant \underbrace{f_n(u_{n+1})}_{=e^{\frac{1}{u_{n+1}}}}.(u_{n+1}-u_n)\\ \iff 1 \leqslant \frac{I_n}{u_{n+1}-u_n} &\leqslant e^{\frac{1}{u_{n+1}}} \qquad \text{vu que } u_{n+1}-u_n > 0\end{aligned}$$

b) Vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = e^0 = 1$, donc le théorème d'encadrement s'applique à celui qui a été obtenu précédement, et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{u_n - u_{n+1}} = 1, \quad \text{soit} \quad I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1} - u_n.$$

© Major-Prépa

c) Comme $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les séries $\sum_{n\geqslant 1} I_n$ et $\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1} - u_n)$ sont à termes positifs et de même nature, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs.
Or la deuxième est une "série des écarts", qui converge si et seulement si la *suite* (u_n) converge [1].

Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$:

la série $\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1} - u_n)$ est divergente, et par conséquent la série $\sum_{n\geqslant 1} I_n$ également .

1. Ne pas hésiter en cas de doute, à écrire les sommes partielles de cette série télescopique pour retrouver ce résultat qu'on peut citer directement !

© Major-Prépa