

EXERCICE 1

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. a) Un réel λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda.I$ est non-inversible ; on échelonne donc la matrice $A - \lambda.I$:

$$\begin{aligned} A - \lambda.I &= \begin{pmatrix} 7-\lambda & 5 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 6 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_3} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{L_3 \leftarrow 6L_3 - (7-\lambda)L_1} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -16+11\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow 21L_3 - (23+\lambda)L_2} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -16+11\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où : $Q(\lambda) = -315 + 210\lambda - 21\lambda^2 + 368 + 16\lambda - 252\lambda - 11\lambda^2 + 23\lambda^2 + \lambda^3 = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53$.

La matrice $A - \lambda.I$ est bien non-inversible, et donc λ est valeur propre de A , si et seulement si

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0.$$

- b) La fonction $f : x \mapsto x^3 - 9x^2 - 27x + 53$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 18x - 27 = 3(x^2 - 6x - 9)$$

On calcule les racines du trinôme $x^2 - 6x - 9$: $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 36 + 36 = 72 > 0$, il y a donc deux racines distinctes :

$$r_1 = \frac{6 - \sqrt{72}}{2} = \frac{6 - 6\sqrt{2}}{2} = 3(1 - \sqrt{2}) \quad \text{et} \quad r_2 = 3(1 + \sqrt{2})$$

Comme $3 > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $x^2 - 6x - 9$, et f a pour tableau de variations :

x	$-\infty$	$3(1 - \sqrt{2})$	$3(1 + \sqrt{2})$	$+\infty$
$f(x)$		+	-	+
f	$-\infty$	M	m	$+\infty$

Les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction polynômiale f sont celles de son terme de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

- c) $f(0) = 53 > 0$ et $f(3) = 27 - 81 - 81 + 53 = -82 < 0$. Or puisque $1 < 2 < 4$, alors $1 < \sqrt{2} < 2$, donc $3(1 - \sqrt{2}) < 0$ et $3 < 3(1 + \sqrt{2})$.

Par décroissance stricte de f sur $[3(1 - \sqrt{2}), 3(1 + \sqrt{2})]$, on en déduit que :

$$f(3(1 - \sqrt{2})) > f(0) > 0 > f(3) > f(3(1 + \sqrt{2})) \implies M > 0 > m$$

- d) Au vu du tableau de variations de f , on comprend qu'on doit utiliser trois fois de suite le théorème de la bijection :

- Sur $] -\infty, 3(1 - \sqrt{2})]$, la fonction f est continue, strictement croissante, à valeurs dans $] -\infty; M]$ qui contient 0 puisque $M > 0$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution λ_1 sur $] -\infty, 3(1 - \sqrt{2})]$.

- Sur $]3(1 - \sqrt{2}), 3(1 + \sqrt{2})]$, la fonction f est continue, strictement décroissante, à valeurs dans $[m, M[$ qui contient 0 puisque $M > 0$ et $m < 0$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution λ_2 sur $]3(1 - \sqrt{2}), 3(1 + \sqrt{2})]$.

- Sur $]3(1 + \sqrt{2}), +\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante, à valeurs dans $]m; +\infty[$ qui contient 0 puisque $m < 0$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution λ_3 sur $]3(1 + \sqrt{2}), +\infty[$.

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, qui sont les trois valeurs propres de la matrice A .

- e) La matrice A , carrée d'ordre 3, admet donc trois valeurs propres distinctes : d'après le critère

suffisant, A est donc diagonalisable, semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ via une matrice

P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.

2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , c'est-à-dire qui vérifient $AM = MA$.

- a) On cherche ici les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telles que :

$$DM = MD \iff \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_1 & c\lambda_1 \\ d\lambda_2 & e\lambda_2 & f\lambda_2 \\ g\lambda_3 & h\lambda_3 & i\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 & c\lambda_3 \\ d\lambda_1 & e\lambda_2 & f\lambda_3 \\ g\lambda_1 & h\lambda_2 & i\lambda_3 \end{pmatrix}$$

On obtient, par identification des coefficients, un système de neuf équations dont trois sont toujours vraies : $a\lambda_1 = a\lambda_1$, $e\lambda_2 = e\lambda_2$, $i\lambda_3 = i\lambda_3$.

L'équation suivante est : $b\lambda_1 = b\lambda_2 \iff b(\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \iff b = 0$ car $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ puisque les trois valeurs propres sont distinctes. Le même principe s'applique aux cinq dernières équations, qui donnent :

$$DM = MD \iff b = c = d = f = g = h = 0 \iff \exists (a, e, i) \in \mathbb{R}^3; \quad D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Les matrices qui commutent avec D sont bien les matrices diagonales.

b) On montre l'équivalence demandée grâce à la formule de changement de base $A = PDP^{-1}$:

$$\begin{aligned} M \in E &\iff AM = MA \iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \iff DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \\ &\iff P^{-1}MP \text{ commute avec } D \end{aligned}$$

c) La combinaison des résultats des questions a) et b) permet d'écrire :

$$M \in E \iff \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \iff \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$$

soit :

$$\begin{aligned} E &= \left\{ P \left(a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) P^{-1} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ \underbrace{a \cdot P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}_{=U_1} + \underbrace{b \cdot P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}_{=U_2} + \underbrace{c \cdot P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}}_{=U_3} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \end{aligned}$$

D'où le résultat voulu, puisque cela signifie que $E = \text{Vect}(U_1, U_2, U_3)$.

d) L'ensemble E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en tant que sous-espace engendré par trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On étudie si cette famille génératrice (U_1, U_2, U_3) est libre en posant une combinaison linéaire nulle : soient a, b, c trois réels tels que

$$a.U_1 + b.U_2 + c.U_3 = 0_3 \iff P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1} = 0_3 \iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = P^{-1}0_3P = 0_3 \iff a = b = c = 0$$

La famille (U_1, U_2, U_3) est donc libre : c'est bien une base de E , et $\dim E = 3$.

e) On sait que la matrice A possède trois valeurs propres distinctes : tout polynôme annulateur de A doit donc admettre au moins les trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ pour racines distinctes. D'après les propriétés des polynômes, il faut bien qu'un tel polynôme annulateur soit de degré supérieur ou égal à 3. Il n'existe donc aucun polynôme annulateur de A de degré inférieur ou égal à 2.

Mais alors toute combinaison linéaire nulle de I, A, A^2 , de la forme : $\alpha.I + \beta.A + \gamma.A^2 = 0_3$ peut se traduire par le fait que $\alpha + \beta X + \gamma X^2$ est un polynôme annulateur de A . D'après ce qui précède, un tel polynôme non nul ne peut pas exister car il serait de degré inférieur ou égal à 2 ; la seule solution est donc qu'il s'agisse du polynôme nul, donc : $\alpha.I + \beta.A + \gamma.A^2 = 0_3$ implique $\alpha = \beta = \gamma = 0$, et la famille (I, A, A^2) est libre.

Il faut aussi (très important !) justifier qu'il s'agit de trois matrices de E : I commute évidemment avec A ($IA = AI = A$), de même que A elle-même, et A^2 aussi ($AA^2 = A^3 = A^2A$). On dispose donc d'une famille libre de 3 vecteurs de E , qui est de dimension 3 : c'est bien une base de E .

EXERCICE 2

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, comme inverse et composée de fonctions qui le sont, sachant que : $\forall t \in \mathbb{R}, t^2 + 1 \geq 1 > 0$. L'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$ est donc bien définie pour tout réel x , on la note $f(x)$, ce qui définit une fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout réel x : $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$, dans laquelle on pose le changement de variable affine : $u = -t$.

$$\star du = -dt, \text{ et } \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt = \frac{1}{\sqrt{(-u)^2+1}} (-du) = -\frac{1}{\sqrt{u^2+1}} du.$$

$\star$ quand $t = -x$, $u = x$ et quand $t = -2x$, $u = 2x$. Ainsi, par changement de variable :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} du = -f(x)$$

La fonction f est donc bien impaire.

3. a) La continuité de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$, assure que cette fonction possède des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit G l'une d'elles : en tant que telle, G est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Et comme : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left[G(t) \right]_x^{2x} = G(2x) - G(x)$, qui rend f elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme composée et différence de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) L'écriture précédente permet de calculer la dérivée de f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{2}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{2}{\sqrt{4x^2+4}}$$

Avec cette écriture :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 4x^2 + 1 < 4x^2 + 4 \iff \sqrt{4x^2 + 1} < \sqrt{4x^2 + 4} \iff \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}} > \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 4}} \iff f'(x) > 0$$

on a ici utilisé la stricte croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^+$ et la stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. a) La double inégalité évidente : $\forall t \in \mathbb{R}^+, t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + 2t + 1$ donne, toujours par stricte croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^+$, puis par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \sqrt{t^2} \leq \sqrt{t^2+1} \leq \sqrt{t^2+2t+1} \iff t \leq \sqrt{t^2+1} \leq t+1 \iff \frac{1}{t} \geq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \geq \frac{1}{t+1}$$

Les fonctions concernées par cette dernière double inégalité sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, et $x < 2x$ lorsque $x > 0$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt &\geq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \geq \int_x^{2x} \frac{1}{t+1} dt \iff \left[\ln(t) \right]_x^{2x} \geq f(x) \geq \left[\ln(t+1) \right]_x^{2x} \\ &\iff \ln(2x) - \ln(x) \geq f(x) \geq \ln(2x+1) - \ln(x+1) \iff \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln(2) \end{aligned}$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 2, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \ln(2) \text{ par continuité de } \ln \text{ en } 2.$$

Ainsi, l'encadrement obtenu en 4.a) et le théorème du même nom assurent que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(2)$$

- c) L'imparité de f donne pour finir : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\ln(2)$. On a aussi $f(0) = 0$, d'où le tableau de variation complet de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$-\ln(2)$	0	$\ln(2)$

- d) On a déjà vu que : $f(0) = 0$; la stricte croissance de f sur $\mathbb{R}$ assure alors que $x = 0$ est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$.
5. a) Remarquons d'emblée qu'il est évident que : pour tout $x \geq 0$, $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ puisque $x \geq 0$ et $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1 > 0$.
- Pour tout $x < 0$:
- $x^2 + 1 > x^2$ donc $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} \iff \sqrt{x^2 + 1} > |x| \iff \sqrt{x^2 + 1} > -x \iff x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$, et cette inégalité est bien vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- b) Au vu du résultat précédent, la fonction $h : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$; elle est également dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- c) La fonction h est ainsi une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$, et on en déduit une expression explicite de $f(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left[\ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \right]_x^{2x} = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

- a) Pour tout réel x strictement positif :

$$\begin{aligned} x - f(x) &= \int_x^{2x} 1 dt - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2 + 1} - 1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2 + 1} - 1}{\sqrt{t^2 + 1}} \times \frac{\sqrt{t^2 + 1} + 1}{\sqrt{t^2 + 1} + 1} dt \quad (\text{quantité conjuguée}) \\ &= \int_x^{2x} \frac{t^2 + 1 - 1}{\sqrt{t^2 + 1}(1 + \sqrt{t^2 + 1})} dt = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}(1 + \sqrt{t^2 + 1})} dt \end{aligned}$$

- b) Pour tout réel $x > 0$, et pour tout $t \in [x; 2x]$: $\frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}(1 + \sqrt{t^2 + 1})} \geq 0$;

par ailleurs, $\sqrt{t^2 + 1} \geq 1$ et $1 + \sqrt{t^2 + 1} \geq 2$ donc $\sqrt{t^2 + 1}(1 + \sqrt{t^2 + 1}) \geq 2$,

$$\text{donc } 0 \leq \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}(1 + \sqrt{t^2 + 1})} \leq \frac{t^2}{2}.$$

Les fonctions concernées par cette double inégalité sont continues sur $]0; +\infty[$, et $x < 2x$ lorsque $x > 0$, donc par positivité et croissance de l'intégrale :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}(1 + \sqrt{t^2 + 1})} dt \leq \int_x^{2x} \frac{t^2}{2} dt \iff 0 \leq x - f(x) \leq \left[\frac{t^3}{6} \right]_x^{2x} \iff 0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3$$

c) De l'encadrement précédent, on déduit :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad 0 \geq f(x) - x \geq -\frac{7}{6}x^3 \iff x \geq f(x) \geq x - \frac{7}{6}x^3 \iff 1 \geq \frac{f(x)}{x} \geq 1 - \frac{7}{6}x^2$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{7}{6}x^2 = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1$, alors d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{soit :} \quad f(x) \underset{0^+}{\sim} x$$

d) On utilise ici une dernière fois l'impairité de la fonction f sur $\mathbb{R}$: lorsque x tend vers 0^- , $-x$ tend vers 0^+ et :

$$f(-x) \underset{0^-}{\sim} -x \iff -f(x) \underset{0^-}{\sim} -x \iff f(x) \underset{0^-}{\sim} x$$

EXERCICE 3

1. Puisque $\theta > 0$, $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, et $\sum_{k \geq 0} u_k$ est une série géométrique de raison

$\frac{\theta}{1+\theta} \in]0, 1[$ puisque $0 < \theta < 1 + \theta$. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{1}{1+\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\theta}{1+\theta} \right)^k = \frac{1}{1+\theta} \times \frac{1}{1 - \frac{\theta}{1+\theta}} = \frac{1}{1+\theta} \times (1+\theta) = 1$$

ce qui achève de prouver que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit bien une loi de probabilité.

On considère alors une variable X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = u_k$.

2. a) Soit $Y = X + 1$, alors : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = k) = P(X + 1 = k) = P(X = k - 1) = u_{k-1} = \frac{1}{1+\theta} \left(\frac{\theta}{1+\theta} \right)^{k-1}$$

Comme $\frac{1}{1+\theta} = 1 - \frac{\theta}{1+\theta}$, on reconnaît la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{1+\theta}$, que suit donc Y .

D'après le cours, on a donc : $E(Y) = 1 + \theta$ et $V(Y) = \frac{\theta}{1+\theta} \times (1+\theta)^2 = \theta(1+\theta)$.

Mais comme $X = Y - 1$, alors par linéarité de l'espérance et propriété de la variance :

$$E(X) = E(Y) - 1 = \theta \quad \text{et} \quad V(X) = V(Y) = \theta(1+\theta).$$

b) Il s'agit dans un premier temps de simuler la loi géométrique suivie par Y en programmant le temps d'attente d'un premier succès de probabilité $\frac{1}{1+\theta}$, et de rendre $X = Y - 1$.

```

1  function r = X(theta)
2      Y=1
3      while (rand() > 1/(1+theta))
4          Y = Y+1
5      end
6      r = Y-1
7  endfunction

```

3. Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on introduit la fonction L , de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \quad L(\theta) = \prod_{k=1}^n P(X_k = x_k)$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.

- a) D'après les propriétés du logarithme, et étant donné que les X_k suivent tous la même loi que X :

$$\begin{aligned} \ln(L(\theta)) &= \sum_{k=1}^n \ln(P(X_k = x_k)) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{1}{1+\theta} \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n -\ln(1+\theta) + x_k \cdot [\ln(\theta) - \ln(1+\theta)] \\ &= -n \ln(1+\theta) + S_n \cdot [\ln(\theta) - \ln(1+\theta)] \end{aligned}$$

- b) On considère la fonction φ , définie par :

$$\forall \theta \in]0, +\infty[, \quad \varphi(\theta) = S_n \cdot \ln(\theta) - (S_n + n) \cdot \ln(1+\theta)$$

On aura reconnu bien sûr que : $\forall \theta \in]0, +\infty[, \varphi(\theta) = \ln(L(\theta))$.

La fonction φ de la variable θ , est bien de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ comme somme de telles fonctions, et :

$$\forall \theta \in]0, +\infty[, \quad \varphi'(\theta) = \frac{S_n}{\theta} - \frac{S_n + n}{1+\theta} = \frac{S_n(1+\theta) - (S_n + n)\theta}{\theta(1+\theta)} = \frac{S_n - n\theta}{\theta(1+\theta)}$$

Puisque $\theta > 0$, $\varphi'(\theta)$ est du signe du numérateur, or : $S_n - n\theta > 0 \iff \theta < \frac{S_n}{n}$.

On en déduit, en posant $\hat{\theta}_n$, que la fonction φ est strictement croissante sur $]0, \hat{\theta}_n]$, puis strictement décroissante sur $[\hat{\theta}_n, +\infty[$: elle admet donc bien un maximum en $\hat{\theta}_n = \frac{S_n}{n}$.

Ainsi :

$$\forall \theta \in]0, +\infty[, \varphi(\theta) \leq \varphi(\hat{\theta}_n) \iff \forall \theta \in]0, +\infty[, \ln(L(\theta)) \leq \ln(L(\hat{\theta}_n)) \iff \forall \theta \in]0, +\infty[, L(\theta) \leq L(\hat{\theta}_n)$$

par stricte croissance de $\ln$ sur $]0, +\infty[$. On en déduit que $\hat{\theta}_n = \frac{S_n}{n}$ est aussi le maximum de L sur $]0, +\infty[$.

On pose dorénavant : $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. La variable T_n est appelée **estimateur du maximum de vraisemblance** pour θ .

- c) La moyenne empirique de l'échantillon, ici appelée T_n , est toujours un estimateur sans biais de l'espérance théorique ; par linéarité de l'espérance :

$$E(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X) = \theta$$

Donc T_n est bien un estimateur sans biais de θ .

d) Puisque T_n est un estimateur sans biais de θ , alors son risque quadratique est égal à sa variance :

$$\begin{aligned} r_{T_n}(\theta) &= V(T_n) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) \quad \text{par indépendance des } X_k \\ &= \frac{1}{n^2} \times nV(X) \quad \text{car les } X_k \text{ ont même loi que } X \\ &= \frac{\theta(1+\theta)}{n} \end{aligned}$$

Il est alors évident que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{T_n}(\theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta(1+\theta)}{n} = 0$: l'estimateur T_n est convergent.

PROBLÈME

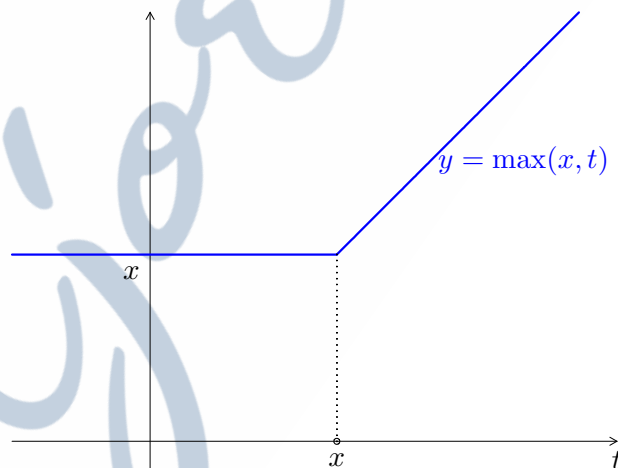
1. Soit x un réel quelconque.

a) Par définition du maximum de deux réels : $\forall t \in \mathbb{R}, \max(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } t < x \\ t & \text{si } t \geq x \end{cases}$.

Cette fonction est continue comme constante sur $] -\infty, x[$, et continue comme fonction affine sur $[x, +\infty[$.

$\lim_{t \rightarrow x^-} \max(x, t) = \lim_{t \rightarrow x^-} x = x$, et $\lim_{t \rightarrow x^+} \max(x, t) = \lim_{t \rightarrow x^+} t = x = \max(x, x)$, donc la fonction est également continue en $t = x$: finalement, cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

Il est ici très utile d'observer la représentation graphique de cette fonction, qui montre bien qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$:



On considère maintenant l'intégrale $y = \int_0^1 \max(x, t) dt$.

b) On calcule les valeurs possibles de y dans les trois cas suggérés par l'énoncé :

- Si $x \leq 0$: pour tout réel t de $[0, 1]$, $\max(x, t) = t$, donc $\int_0^1 \max(x, t) dt = \int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.
- Si $0 \leq x \leq 1$, d'après la relation de Chasles :

$$y = \int_0^x x dt + \int_x^1 t dt = x \times (x - 0) + \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1 = x^2 + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2 + 1}{2}$$

- Si $x > 1$: pour tout $t \in [0, 1]$, $\max(x, t) = x$, donc $y = \int_0^1 x dt = x$.

Dans la suite de ce problème, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On admet que l'on définit une variable aléatoire Y , elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, en posant

$$Y = \int_0^1 \max(X, t) dt, \text{ ce qui signifie que, pour tout } \omega \text{ de } \Omega, \text{ on a :}$$

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t) dt$$

On note F_Y la fonction de répartition de Y , et on se propose dans la suite de déterminer la loi de Y connaissant celle de X .

2. On suppose dans cette question que X suit la loi géométrique : dans ce cas $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, ce qui signifie que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq 1$, et alors : pour tout $t \in [0, 1]$, $\max(X(\omega), t) = X(\omega)$, donc $Y(\omega) = X(\omega)$ d'après 1.b), c'est-à-dire que les variables aléatoires X et Y sont identiques dans ce cas.
3. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que l'on a :

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}$$

- a) Puisque $([X = -1], [X = 0], [X = 1])$ forment un système complet d'événements, on a évidemment :

$$P(X = 0) = 1 - P(X = -1) - P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

- b) D'après 1.b) :

- Pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = -1$ ou $X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = \frac{1}{2}$.
- Pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = 1$, alors $Y(\omega) = \frac{X(\omega) + 1}{2} = 1$.

On a donc bien $Y(\Omega) = \{\frac{1}{2}, 1\}$, et :

$$P(Y = \frac{1}{2}) = P(X = -1) + P(X = 0) = \frac{3}{4}, \quad P(Y = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

- c) La fonction Scilab suivante simule la variable aléatoire Y :

```

1  function y = simul()
2      u = grand(1,1,'uin',1,4)
3      if u == 4 then
4          y = 1
5      else
6          y = 1/2
7      end
8  endfunction

```

En effet, u reçoit une valeur entière choisie parmi $\{1, 2, 3, 4\}$ avec équiprobabilité, donc vaut 4 avec la probabilité $\frac{1}{4} = P(Y = 1)$, auquel cas on peut considérer que $[Y = 1]$ est réalisé ; sinon, c'est l'événement contraire $[Y = \frac{1}{2}]$ qui l'est.

4. On suppose, dans cette question, que x suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, avec $X(\Omega) = [0, 1[$.

- a) D'après la première question : pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \in]0, 1[$, on a $Y(\omega) = \frac{X(\omega) + 1}{2}$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = 0$, $Y(\omega) = \frac{1}{2} = \frac{X(\omega) + 1}{2}$, donc on a bien l'égalité de variables aléatoires $Y = \frac{X^2 + 1}{2}$.

- b) Pour tout $\omega \in \Omega$, $0 \leq X(\omega) < 1 \iff \frac{1}{2} \leq \frac{X(\omega) + 1}{2} < 1 \iff \frac{1}{2} \leq Y(\omega) < 1$, et on a bien $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
- c) Pour tout réel x de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$:

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(\frac{X^2 + 1}{2} \leq x\right) = P(X^2 \leq 2x - 1) = P(X \leq \sqrt{2x - 1})$$

par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, et puisque X est à valeurs positives. Comme pour tout x de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $0 \leq 2x - 1 < 1$, la loi uniforme suivie par X donne bien :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad F_Y(x) = \sqrt{2x - 1}$$

- d) On a par ailleurs, vu l'univers-image de Y : $F_Y(x) = 0$ pour tout $x < \frac{1}{2}$, et $F_Y(x) = 1$ pour tout $x \geq 1$.

La fonction F_Y est ainsi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, \frac{1}{2}[$ et $]1, +\infty[$ comme fonction constante.

Elle est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, sachant que : $\frac{1}{2} < x < 1 \iff 0 < 2x - 1 < 1$. La fonction F_Y est donc continue sur chacun de ces intervalles.

Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow 1/2^+} F_Y(x) = \sqrt{2 \times \frac{1}{2} - 1} = 0 = \lim_{x \rightarrow 1/2^-} F_Y(x) = F_Y\left(\frac{1}{2}\right)$,

et $\lim_{x \rightarrow 1^-} F_Y(x) = \sqrt{2 \times 1 - 1} = 1 = F_Y(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F_Y(x)$, donc F_Y est aussi continue en $\frac{1}{2}$ et 1.

Finalement, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en $\frac{1}{2}$ et 1 : Y est bien une variable à densité.

- e) La variable aléatoire $Y = \frac{X^2 + 1}{2}$ admet une espérance parce que X admet un moment d'ordre 2 ; d'après le cours sur la loi uniforme, et par linéarité de l'espérance :

$$E(Y) = \frac{E(X^2) + 1}{2} = \frac{V(X) + E(X)^2 + 1}{2} = \frac{\frac{1}{12} + \frac{1}{4} + 1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1 + 3 + 12}{12} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

- f) La fonction Scilab suivante simule la variable aléatoire Y :

```
1 function y = simul2()
2     u = rand()
3     y = sqrt(2*u-1)
4 endfunction
```

5. On suppose, dans cette question, que X suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X .

- a) Pour tout ω tel que $X(\omega) \leq 0$, $Y(\omega) = \frac{1}{2}$. Pour tout ω tel que $0 < X(\omega) \leq 1$, $Y(\omega) = \frac{X(\omega)^2 + 1}{2}$ appartient à $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Enfin, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega) \geq 1$, $Y(\omega) = X(\omega) \in [1, +\infty[$.

La variable aléatoire Y a bien pour univers-image $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

- b) Comme on vient de le voir : $\left[Y = \frac{1}{2}\right] = [X \leq 0]$, donc $P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P(X \leq 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$ d'après les propriétés de la loi normale centrée réduite.

c) Soit x un réel quelconque ; d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $([X \leq 0], [0 < X \leq 1], [X > 1])$:

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P([X \leq 0] \cap [Y \leq x]) + P([0 < X \leq 1] \cap [Y \leq x]) + P([X > 1] \cap [Y \leq x])$$

On distingue alors les trois cas suggérés par l'énoncé :

- Si $x < \frac{1}{2}$: on sait que $Y(\Omega) = [\frac{1}{2}, +\infty[$, donc sans calcul, $F_Y(x) = 0$.

- Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$:

$$P([X \leq 0] \cap [Y \leq x]) = P([Y = \frac{1}{2}] \cap [Y \leq x]) = P(Y = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P([0 < X \leq 1] \cap [Y \leq x]) &= P([0 < X \leq 1] \cap [\frac{X^2 + 1}{2} \leq x]) = P([0 < X \leq 1] \cap [X \leq \sqrt{2x - 1}]) \\ &= P(0 < X \leq \sqrt{2x - 1}) = \Phi(\sqrt{2x - 1}) - \Phi(0) = \Phi(\sqrt{2x - 1}) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$P([X > 1] \cap [Y \leq x]) = P([X > 1] \cap [X \leq x]) = P(\emptyset) = 0, \text{ donc :}$$

$$\text{Si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad F_Y(x) = \frac{1}{2} + \Phi(\sqrt{2x - 1}) - \frac{1}{2} = \Phi(\sqrt{2x - 1})$$

- Si $x > 1$:

$$P([X \leq 0] \cap [Y \leq x]) = P([Y = \frac{1}{2}] \cap [Y \leq x]) = P(Y = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P([0 < X \leq 1] \cap [Y \leq x]) &= P([0 < X \leq 1] \cap [X \leq \sqrt{2x - 1}]) \\ &= P(0 < X \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(0) = \Phi(1) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$P([X > 1] \cap [Y \leq x]) = P([Y > 1] \cap [Y \leq x]) = P(1 < X \leq x) = \Phi(x) - \Phi(1), \text{ donc :}$$

$$F_Y(x) = \frac{1}{2} + \Phi(1) - \frac{1}{2} + \Phi(x) - \Phi(1) = \Phi(x)$$

On a bien démontré que pour tout réel x :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \Phi(\sqrt{2x - 1}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

d) La variable aléatoire Y n'est certainement pas discrète, puisque son univers-image $[\frac{1}{2}, +\infty[$ est un intervalle.

Par ailleurs : le simple fait que $P(Y = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \neq 0$ assure que Y n'est pas non plus une variable à densité (on devrait alors avoir $P(Y = \frac{1}{2}) = 0$).