MATHÉMATIQUES - Edhec E 2015

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. a) D'après la propriété de cours : puisque $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^5$, alors :

   $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4), f(e_5)\big) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5, e_1 + e_5)$, étant donné que les 4 dernières images sont toutes égales.

   L'image de f est donc engendrée par deux vecteurs clairement non colinéaires, qui forment donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ et : $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$.

   Par ailleurs, on ne change pas le sous-espace engendré par une famille de vecteurs en ajoutant à l'un des vecteurs de la famille, une combinaison linéaire des autres, et :

   $$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5, e_1 + e_5) \\ &= \mathrm{Vect}\big((e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) - (e_1 + e_5), e_1 + e_5\big) \\ &= \mathrm{Vect}(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5) \end{aligned}$$

   À nouveau, la famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ est constituée de deux vecteurs non colinéaires, et est donc une base de ce sous-espace.

   b) Comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^5$, le théorème du rang donne :

   $$\dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^5 \iff \dim \mathrm{Ker}(f) = 5 - 2 = 3$$

   Pour obtenir une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$, il suffit donc de trouver une famille libre de 3 vecteurs de ce sous-espace.

   Comme $f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = f(e_5)$, il est clair que : $e_2 - e_3,\ e_2 - e_4,\ e_2 - e_5$ sont trois vecteurs de $\mathrm{Ker}(f)$ dont on vérifie facilement qu'ils forment une famille libre, et donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$;

   Pour trois réels a, b, c :

   $$\begin{aligned} a.(e_2 - e_3) + b.(e_2 - e_4) + c.(e_2 - e_5) = 0_{\mathbb{R}^5} &\iff (0, a + b + c, -a, -b, -c) = (0, 0, 0, 0, 0) \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

2. On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.

   a) Par linéarité de f : $\begin{cases} f(u) = f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = 3.(e_1 + e_5) = 3.v \\ f(v) = f(e_1) + f(e_5) = 2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 2e_5 \end{cases}$,

   puis : $\begin{cases} f(u-v) & = f(u) - f(v) = e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 = -u + v = -(u-v) \\ f(u+3v) & = f(u) + 3.f(v) = 9e_1 + 3e_2 + 3e_3 + 3e_4 + 9e_5 = 3u + 9v = 3(u+3v) \end{cases}$.

   b) Les résultats précédents font apparaître que :
   - 0 est valeur propre de f, le sous-espace associé étant $E_0(f) = \text{Ker}(f)$, qui est de dimension 3
   - -1 est valeur propre de f, $u - v$ étant un vecteur propre associé.
   - 3 est aussi valeur propre de f, $u + 3v$ étant un vecteur propre associé

   Ainsi : $\dim E_0(f) + \dim E_{-1}(f) + \dim E_3(f) \geqslant 3 + 1 + 1 = 5$;
   comme par ailleurs le théorème spectral donne :
   $$\dim E_0(f) + \dim E_{-1}(f) + \dim E_3(f) \leqslant \dim \mathbb{R}^5 = 5,$$
   alors : $\dim E_0(f) + \dim E_{-1}(f) + \dim E_3(f) = 5$, ce qui prouve que :
   - Les valeurs propres de f sont $0, -1$ et 3, et il n'y en a pas d'autres.
   - $\dim E_{-1}(f) = \dim E_3(f) = 1$ et $(u-v)$, $(u+3v)$ constituent des bases respectives des sous-espaces propres $E_{-1}(f)$ et $E_3(f)$, puisque ce sont des vecteurs propres (donc non-nuls) appartenant à chaque fois à des sous-espaces vectoriels de dimension 1.

   c) Le résultat précédent établit également que f, et donc C, est diagonalisable, et plus précisément :
   $$C = RDR^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. a) Le produit matriciel : $D(D+I)(D-3I)$ est celui des trois matrices diagonales
   $$diag(0,0,0,-1,3) \times diag(1,1,1,0,4) \times diag(-3,-3,-3,-4,0)$$
   qui est bien la matrice nulle par produit termes à termes des éléments diagonaux.

   b) En développant la relation précédente, on obtient : $D^3 - 2D^2 - 3D = 0$, ce qui implique :
   $f^3 - 2f^2 - 3f = 0$ (endomorphisme nul) puisque D représente f dans la base de vecteurs propres représentés par les colonnes de la matrice P.
   Cela implique alors : $C^3 - 2C^2 - 3C = 0$ en revenant à la représentation dans la base canonique, relation qui exprime bien que $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de C.

4. On admet que (principe de la division euclidienne),pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique polynôme Q_n et trois réels a_n, b_n et c_n tels que :
   $$X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)Q_n(X) + a_nX^2 + b_nX + c_n \qquad (\star)$$

   a) Les racines de $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X = X(X+1)(X-3)$ sont $0, -1$ et 3 ; en évaluant la relation $(\star)$ successivement en ces trois valeurs, on obtient :
   $$\begin{cases} 0^n & = P(0).Q_n(0) + 0 + 0 + c_n \\ (-1)^n & = P(-1).Q_n(-1) + a_n - b_n + c_n \\ 3^n & = P(3).Q_n(3) + 9a_n + 3b_n + c_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ 9a_n + 3b_n + cn = 3^n \\ c_n = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_n - \;\; b_n &= (-1)^n \\ 9a_n + 3b_n &= 3^n \\ \quad c_n &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_n - b_n &= (-1)^n \\ 12a_n &= 3^n + 3(-1)^n \; L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ \quad c_n &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b_n = a_n - (-1)^n = \dfrac{1}{12}.3^n - \dfrac{3}{4}.(-1)^n \\ a_n = \dfrac{1}{12}.3^n + \dfrac{1}{4}.(-1)^n \\ c_n = 0 \end{cases}$$

b) Il reste à évaluer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression $(\star)$ en la matrice C, ce qui donne :

$$C^n = P(C) \times Q_n(C) + a_n.C^2 + b_n.C + c_n.I = \left[\frac{1}{12}.3^n + \frac{1}{4}.(-1)^n\right].C^2 + \left[\frac{1}{12}.3^n - \frac{3}{4}.(-1)^n\right].C$$

5. La commande `ones(1,5)` crée les lignes 1 et 5 de la matrice C. Il reste donc à créer les lignes $2, 3, 4$ de la matrice en deux blocs concaténés horizontalement :

```
C = [ones(1,5) ; ones(3,1), zeros(3,4) ; ones(1,5)]
```

Exercice 2

Trois personnes, notées A, B et C entrent simultanément dans une agence bancaire disposant de deux guichets. Les clients A et B occupent simultanément à l'instant 0 les deux guichets tandis que C attend que l'un des deux guichets se libère pour se faire servir.
On suppose que :

- Les durées de passage au guichet des trois personnes A, B et C sont mesurées en heures et on suppose que ce sont des variables aléatoires indépendantes, notées respectivement X, Y et Z, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1[$.
- La durée de changement de personne à un guichet est négligeable.

1. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$ et on admet que U et V sont des variables aléatoires.

a) Le calcul de la fonction de répartition de $U = \min(X, Y)$ passe par celui, pour tout réel x, de $P(U > x)$, sachant que : $[U > x] = [X > x] \cap [Y > x]$ (le minimum de deux valeurs est supérieur à x si et seulement si les deux valeurs sont supérieures à x) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(U > x) = P\big([X > x] \cap [Y > x]\big) = P\big(X > x\big) \times P(Y > x) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y$$

$$= \big(1 - F_X(x)\big) \times (1 - F_Y(x)) = \big(1 - F_X(x)\big)^2 \text{ puisque } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi}$$

Or, X suit la loi uniforme à densité : $\forall x \in \mathbb{R},\; F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x > 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(U > x) = \begin{cases} (1-0)^2 = 1 & \text{si } x < 0 \\ (1-x)^2 = x^2 - 2x + 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ (1-1)^2 = 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x) = 1 - P(U > x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) Il suffit ici de remarquer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = 1 - \big(1 - F_X(x)\big)^2$, pour pouvoir conclure que F_U est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ puisque c'est le cas de F_X.

La variable aléatoire U est donc à densité, et une densité f_U de U est obtenue par dérivation de F_U sauf en 0 et en 1, où on donne à f_U la valeur abitraire 0, de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 1 \\ 2 - 2x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

c) La densité de U est à support borné, donc U admet une espérance et une variance.
En restreignant d'emblée les intégrales au segment $[0,1]$, en-dehors duquel f_U est nulle :

$$E(U) = \int_0^1 x.f_U(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x - 2x^2)\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Le moment d'ordre 2 de U vaut :

$$E(U^2) = \int_0^1 x^2.f_U(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x^2 - 2x^3)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

La variance de U est alors donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

2. On note T le temps total passé par C dans l'agence bancaire.

a) Le client C passe au guichet dès que le premier des deux autres clients A ou B s'en va, au bout d'un temps aléatoire égal à U. Il faut aussi compter le temps que passe C au guichet, donc :

$$T = U + Z$$

b) Les variables U et Z admettent toutes deux une espérance aussi, donc T également par linéarité de l'espérance :

$$E(T) = E(U) + E(Z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Les variables aléatoires X, Y et Z étant mutuellement indépendantes : d'après le lemme des coalitions, $U = \min(X,Y)$ et Z sont indépendantes, et par conséquent :

$$V(T) = V(U) + V(Z) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{5}{36}$$

3. a) Si `a` et `b` sont deux vecteurs-lignes de taille n, les commandes `m=min(a,b)` et `M=max(a,b)` renvoient les vecteurs `m` et `M`, de même taille que `a` et `b`, et tels que, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on ait : `m(i) = min(a(i),b(i))` et `M(i) = max(a(i),b(i))`.

On rappelle également que `grand(1,n,'unf',0,1)` simule n variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Le script `Scilab` suivant permet de simuler n fois les variables aléatoires U, V et T, pour n entré par l'utilisateur :

```
n = input('entrez la valeur de n :')
x = grand(1,n,'unf',0,1)
y = grand(1,n,'unf',0,1)
z = grand(1,n,'unf',0,1)
u = min(x,y) ; disp(u, 'u = ')
v = max(x,y) ; disp(v, 'v = ')
t = u + z ; disp(t, 't = ')
```

b) L'événement $[T \geqslant V]$ est réalisé si et seulement si le temps de présence du client C dans l'agence est supérieur au temps passé au guichet par celui des deux clients A ou B qui a été le plus lent des deux ; c'est donc le cas si et seulement si le client C est le dernier des trois à partir de l'agence.

c) On souhaite déterminer une valeur approchée de la probabilité $p = P(T \geqslant V)$ en simulant un grand nombre de fois le passage des clients A, B et C aux guichets.

Les commandes `p = length(T(T>=V))/n ; disp(p, 'p = ')`, placées sous les commandes écrites à la question 3.a), ont l'effet suivant :

- Le test `T>=V`, appliquée aux vecteurs `T` et `V` de même taille n, crée un vecteur de taille n de booléens : le i^{e} élément contient la valeur *True* si et seulement si `T(i)` $\geqslant$ `V(i)`, et la valeur *False* sinon.

- La commande `T(T>=V)` a pour effet supplémentaire de sélectionner parmi les éléments de `T`, ceux pour lesquels le test précédent est vrai.

- Finalement, la commande `length(T(T>=V))` calcule le nombre de fois où, sur n simulations, l'événement $[T \geqslant V]$ est réalisé. En divisant ce nombre par n, on obtient la fréquence de réalisation de l'événement $[T \geqslant V]$, qui pour un échantillon de grande taille, est proche de la probabilité théorique $P(T \geqslant V)$.

Remarque : `Scilab` associe les deux booléens *True* et *False*, respectivement aux valeurs 1 et 0 : la commande `sum(T>=V)/n` a en fait le même effet que `length(T(T>=V))`.

d) Si lors de plusieurs essais des commandes ci-dessus, avec $n = 10000$, la réponse donnée par `Scilab` est comprise entre 0.66 et 0.67, on peut conjecturer que p est égale à $\dfrac{2}{3}$.

Exercice 3

1. Pour tout entier naturel k, on pose :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \mathrm{d}t$$

a) Optimisons ici le raisonnement en faisant le lien avec le cours de probabilité :

- L'intégrale $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ correspond à l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la densité d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$, qui est nulle sur $]-\infty, 0[$.
L'intégrale I_0 est donc convergente et : $I_0 = 1$.

- L'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ correspond à l'espérance $E(X)$ de cette même loi exponentielle ; l'intégrale est donc convergente, et : $I_1 = 1$.

- L'intégrale $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\mathrm{d}t$ correspond au moment d'ordre 2 de X ; l'intégrale I_2 est donc convergente, et la formule de Koenig-Huygens donne sa valeur :

$$I_2 = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1 + 1 = 2.$$

b) Pour tout réel positif a et tout entier naturel k, on pose : $I_k(a) = \displaystyle\int_0^a t^k e^{-t}\mathrm{d}t$.

On réalise une intégration par parties dans l'intégrale $I_{k+1}(a) = \displaystyle\int_0^a t^{k+1}e^{-t}\mathrm{d}t$ en posant :

$$u(t) = t^{k+1} \longrightarrow u'(t) = (k+1)t^k$$

$$v'(t) = e^{-t} \longrightarrow v(t) = -e^{-t}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, donc :

$$I_{k+1}(a) = \Big[-t^{k+1}e^{-t}\Big]_0^a + (k+1)\int_0^a t^k e^{-t}\mathrm{d}t$$

$$I_{k+1}(a) = -(k+1)a^{k+1} + (k+1)I_k(a) \qquad \text{CQFD}$$

c) La relation précédente, valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \geqslant 0$, donne en particulier :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \quad I_3(a) = 3I_2(a) - a^3e^{-a}$$

Comme l'intégrale I_2 est convergente, et puisque $\lim\limits_{a\to+\infty} a^3e^{-a} = 0$ par croissances comparées : l'intégrale I_3 est convergente, et vaut

$$I_3 = \lim_{a\to+\infty} I_3(a) = 3I_2 = 6$$

De même : $\forall a \in \mathbb{R}_+, \quad I_4(a) = 4I_3(a) - a^4e^{-a}$; la convergence de l'intégrale I_3 et le fait que $\lim\limits_{a\to+\infty} a^4e^{-a} = 0$ impliquent la convergence de I_4, et donne :

$$I_4 = \lim_{a\to+\infty} I_4(a) = 4I_3 = 24$$

2. Pour tout couple de réels (x, y) : la fonction $t \mapsto (y + xt + t^2)^2e^{-t}$ a pour expression développée :

$$(y^2 + x^2t^2 + t^4 + 2xyt + 2yt^2 + 2xt^3)e^{-t} = y^2e^{-t} + 2xyte^{-t} + (2y + x^2)t^2e^{-t} + 2xt^3e^{-t} + t^4e^{-t}$$

La convergence des intégrales I_k pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et la linéarité de l'intégrale assurent alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2e^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente.

On considère, pour toute la suite, la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2e^{-t}\mathrm{d}t$$

3. a) C'est la suite de la question précédente : l'intégrale convergente définissant $f(x, y)$ vaut :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2e^{-t}\mathrm{d}t &= y^2I_0 + 2xyI_1 + (2y + x^2)I_2 + 2xI_3 + I_4 \\ &= y^2 + 2xy + 4y + 2x^2 + 12x + 24 \qquad \text{CQFD}\end{aligned}$$

b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynômiale des deux variables x et y.

4. a) Calcul des dérivées partielles d'ordre 1 de f : pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$,

$$\partial_1(f)(x, y) = 4x + 2y + 12 \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x, y) = 2x + 2y + 4$$

Les points critiques de f sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x, y) &= 0 \\ \partial_2(f)(x, y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y &= -6 \\ x + y &= -2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x - 6 \\ x - 2x - 6 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 8 - 6 = 2 \\ -x = 4 \iff x = -4 \end{cases}$$

La fonction f admet donc l'unique point critique $(-4, 2)$.

b) Les dérivées partielles d'ordre 2 sont définies, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$\partial^2_{1,1}(f)(x, y) = 4, \quad \partial^2_{2,2}(f)(x, y) = 2, \quad \partial^2_{1,2}(f)(x, y) = \partial^2_{2,1}(f)(x, y) = 2$$

La Hessienne de f au point critique $(-4, 2)$ est donc :

$$\nabla^2(f)(-4, 2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Les valeurs propres de $\nabla^2(f)(-4, 2)$ sont les réels λ tels que :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \text{ est non-inversible } &\iff \det\left(\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0 \\ &\iff (4-\lambda)(2-\lambda) - 2 \times 2 = 0 \\ &\iff 8 - 6\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \iff \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \end{aligned}$$

Cette équation du second degré a pour discriminant : $\Delta = 36 - 16 = 20 > 0$, elle admet donc deux solutions distinctes :

$$\lambda_1 = \frac{6 - \sqrt{20}}{2} = 3 - \sqrt{5} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 3 + \sqrt{5}$$

Les deux valeurs propres de la hessienne sont strictement positives ($3+\sqrt{5} > 3-\sqrt{5} = \sqrt{9}-\sqrt{5} > 0$), donc f admet un minimum local en son seul point critique $(-4, 2)$, qui vaut :

$$f(-4, 2) = 32 + 4 - 48 + 8 - 16 + 24 = 4$$

5. Le but de cette question est de montrer qu'en fait cet extrémum est global.

a) Si on développe le carré de droite :

$$2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 = 2\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + 9 + xy + 3y + 6x\right) = 2x^2 + 2xy + 12x + \frac{y^2}{2} + 6y + 18$$

donc :

$$2x^2 + 2xy + 12x = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 - \left(\frac{y^2}{2} + 6y + 18\right)$$

b) De même : $\dfrac{1}{2}(y-2)^2 = \dfrac{1}{2}(y^2 - 4y + 4) = \dfrac{y^2}{2} - 2y + 2$, donc :

$$\frac{y^2}{2} - 2y + 6 = \frac{1}{2}(y-2)^2 + 4$$

c) Des deux questions précédentes : pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24 \\ &= 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)2 - \frac{y^2}{2} - 6y - 18 + y^2 + 4y + 24 \\ &= 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 + \frac{y^2}{2} - 2y + 6 \\ &= 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 + 4 \end{aligned}$$

Le carré d'un réel est toujours positif, donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 + 4 \geqslant 4$$

et il y a égalité si et seulement si :

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} + 3 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 1 + 3 = 0 \iff x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$$

ce qui prouve bien que f admet en fait un minimum global de valeur 4, atteint au point $(-4, 2)$.

PROBLÈME

Partie 1

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0, 1[$.

1. a) Petit encadrement classique d'une intégrale : pour tout réel x de $[0, 1[$ et tout réel $t \in [0, x]$:
$0 \leqslant t \leqslant x < 1$ donc $0 \leqslant t^2 \leqslant x^2 < 1$ par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$,
et $1 - t^2 \geqslant 1 - x^2 > 0$, donc : $0 < \dfrac{1}{1-t^2} \leqslant \dfrac{1}{1-x^2}$ par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par multiplication par $t^m \geqslant 0$, on déduit :

$$\forall x \in [0, 1[, \ \forall t \in [0, x] : \ 0 \leqslant \frac{t^m}{1-t^2} \leqslant \frac{t^m}{1-x^2}.$$

Les fonctions concernées (de la variable t) sont continues sur $[0, 1[$, et $0 \leqslant x$, donc par croissance et positivité de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-x^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x^2}.\left[\frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_0^x = \frac{1}{1-x^2} \times \frac{x^{m+1}}{m+1} \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$$

b) Puisque bien sûr, $\lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{1}{1-x^2} \times \dfrac{1}{m+1} = 0$, le théorème d'encadrement donne :

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\mathrm{d}t = 0.$$

2. a) Soit t un réel de $[0, 1[$ et k un entier de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \sum_{j=0}^{k-1} (t^2)^j = \frac{1-(t^2)^k}{1-t^2} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}$$

On a en effet reconnu une somme partielle géométrique, de raison $t^2 \in [0, 1[$.

b) Sous ses deux expressions possibles, la fonction polynômiale introduite à la question précédente est continue sur $[0, 1[$, donc sur $[0, x]$ pour tout x de $[0, 1[$ et en intégrant sur cet intervalle :

$$\int_0^x \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}\mathrm{d}t$$

$$\iff \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^x t^{2j}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$\iff \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{t^{2j+1}}{2j+1}\right]_0^x = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\mathrm{d}t$$

$$\iff \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\mathrm{d}t$$

c) Du résultat obtenu à la question 1. on déduit, puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} 2k = +\infty$:

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\mathrm{d}t = 0, \text{ donc } \lim_{k\to+\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t,$$

ce qui prouve que la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0}\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge, et a pour somme totale :

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t$$

d) La somme $\displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ est le *reste* d'ordre k de la série précédente, et vaut :

$$\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{x^{2j+1}}{2j+1} - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t - \left(\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\mathrm{d}t\right) = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

On admet sans démonstration (elle serait similaire) que l'on a aussi :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

Partie 2

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne "pile" avec la probabilité p $(0<p<1)$ et "face" avec la probabilité $q = 1-p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier "pile".
Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que ce joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur a gagné ».
On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

1. La variable aléatoire N correspond au *temps d'attente d'un premier succès* dans une répétition d'épreuves de Bernoulli *identiques et indépendantes*,le succès : "obtenir Pile", étant de probabilité p.

   La variable aléatoire N suit donc la loi géométrique de paramètre p :

$$N(\Omega) = \mathbb{N}^*,\ \forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(N=k) = q^{k-1}.p \text{ (où } q = 1-p)$$

2. a) • Si m est un entier naturel pair : il existe un entier $n\in\mathbb{N}$ tel que $m = 2n$, et dans ce cas : $m/2 = n\in\mathbb{N}$, donc $\lfloor m/2\rfloor = n$, donc $2\lfloor m/2\rfloor = 2n$ est bien égal à m.

   • Si par contre m est impair : il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $m = 2n+1$, et dans ce cas : $m/2 = n+1/2$, donc $\lfloor m/2\rfloor = n$ et $2\lfloor m/2\rfloor = 2n \neq 2n+1 = m$.

   Ceci justifie bien que la commande `Scilab` : `2*floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

   b) Le code complet est le suivant :

```
p = input('donner la valeur de p')
N = grand(1,1,'geom',p) // 'geom' désigne une loi géométrique
X = grand(1,1,'uin',1,N) // 'uin' désigne une loi uniforme discrète
if 2*floor(X/2) == X then disp('perdu'), else disp('gagné!'), end
```

Noter en particulier que la valeur maximale de X est aléatoire (c'est la valeur que prend N) : on dit que la *loi conditionnelle* de X *sachant* $[N=n]$, est la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

3. a) Évidemment, si $k \geqslant j$, $2k+1 \geqslant 2j+1 > 2j$, donc $P_{[N=2j]}(X=2k+1)=0$ puisque l'urne ne contient que les numéros compris entre 1 et $2j$ dans ce cas.

   b) De même, si $k \geqslant j+1$, $2k+1 \geqslant 2j+3 > 2j+1$, donc $P_{[N=2j+1]}(X=2k+1)=0$.

   c) Pour tout entier $k \in [\![0, j-1]\!]$: $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j-1 < 2j$, donc $P_{[N=2j]}(X=2k+1) = \dfrac{1}{2j}$ pusque les $2j$ numéros que contient alors l'urne, sont équiprobables.

   d) De même, pour tout entier $k \in [\![0, j]\!]$: $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j+1$, donc $P_{[N=2j+1]}(X=2k+1) = \dfrac{1}{2j+1}$ toujours par équiprobabilité.

4. a) La *formule des probabilités totales*, appliquée avec le système complet d'événements $([N=n])_{n\in\mathbb{N}^*}$, donne bien :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)P_{[N=n]}(X=2k+1)$$

   En admettant, comme le fait l'énoncé, que l'on peut scinder la somme précédente selon la partité de l'indice n, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=2k+1) &= \sum_{j=1}^{+\infty} P(N=2j).P_{[N=2j]}(X=2k+1) + \sum_{j=0}^{+\infty} P(N=2j+1).P_{[N=2j+1]}(X=2k+1)\\ &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j-1}p.\frac{1}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} pq^{2j}.\frac{1}{2j+1}\\ &= \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty}\frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)\end{aligned}$$

   En prenant en compte les valeurs des probabilités conditionnelles obtenues à la question 3., et notamment la nullité de certaines d'entre elles.

   b) La formule précédente se réécrit, grâce aux résultats de la partie 1. :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N},\quad P(X=2k+1) &= \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}\mathrm{d}t + \int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}\mathrm{d}t\right) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}+t^{2k+1}}{1-t^2}\mathrm{d}t \quad \text{(par linéarité)}\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}\cancel{(1+t)}}{(1-t)\cancel{(1+t)}}\mathrm{d}t = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

5. a) On suit ici une démarche tout à fait semblable à celle de la premère question de la partie 1. : Pour tout réel $q \in [0,1[$, et tout réel $t \in [0,q]$:

   $0 \leqslant t \leqslant q < 1$, donc $1-t \geqslant 1-q$ et $(1-t)^2 \geqslant (1-q)^2$, tandis que $1+t \geqslant 1$, d'où :

$$\forall t \in [0,q],\quad \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} \leqslant \frac{1}{(1-q)^2} \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} \leqslant \frac{1}{(1-q)^2}.t^{2n+2}$$

   Les fonctions concernées (de la variable t) sont continues sur $[0,q]$ et $0 \leqslant q$, donc par croissance et positivité de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(1-q)^2}\int_0^q t^{2n+2}\mathrm{d}t = \frac{1}{(1-q)^2}.\frac{q^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{(1-q)^2}\times\frac{1}{2n+3}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1-q)^2} \times \frac{1}{2n+3} = 0$, on en conclut par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\mathrm{d}t = 0$$

b) En reprenant le résultat de 4.b), et par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} P(X = 2k+1) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\mathrm{d}t = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{1-t} \sum_{k=0}^{n} t^{2k}\mathrm{d}t \\ &= \frac{p}{q}. \int_0^q \frac{1}{1-t}.\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{p}{q}. \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}\mathrm{d}t - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1-t^2)}\mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{p}{q}. \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\mathrm{d}t - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\mathrm{d}t \right)\end{aligned}$$

c) L'événement A est réalisé si et seulement si X prend une valeur impaire, c'est-à-dire que :

$$A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} [X = 2k+1].$$

S'agissant d'une réunion d'événements deux à deux incompatibles, on a donc par σ-additivité :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k+1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(X = 2k+1).$$

Les résultats des deux questions précédentes donnent bien :

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{p}{q}. \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\mathrm{d}t - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\mathrm{d}t \right) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\mathrm{d}t$$

6. a) On cherche ici trois constantes réelles a, b, c telle que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} \\ \iff & \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a(1-t)(1+t) + b(1-t)^2 + c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)} \\ \iff & \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{(-a+b)t^2 + (-2b+c)t + (a+b+c)}{(1-t)^2(1+t)}\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on obtient donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & & & = & 0 \\ & & -2b & + & c & = & 0 \\ a & + & b & + & c & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & & & = & 0 \\ & & -2b & + & c & = & 0 \\ & & 2b & + & c & = & 1 \ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & & & = & 0 \\ & & -2b & + & c & = & 0 \\ & & & & 2c & = & 1 \ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} a & = b = 1/4 \\ b & = c/2 = 1/4 \\ c & = 1/2 \end{array}\right.$$

b) La question précédente permet le calcul explicite de $P(A)$:

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\Big[-\ln(1-t)\Big]_0^q + \frac{1}{4}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^q + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-t}\right]_0^q\right)\\
&= \frac{p}{q}\left(-\frac{1}{4}\ln(1-q) + \frac{1}{4}\ln(1+q) + \frac{1}{2(1-q)} - \frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1-(1-q)}{2(1-q)}\right)\\
P(A) &= \frac{1-q}{4q}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

c) Il suffit pour conclure, de remarquer que puisque $q \in]0,1[$:

$\dfrac{1-q}{4q} > 0$ et $0 < 1-q < 1+q$ donc $\dfrac{1+q}{1-q} > 1$, et donc $\ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right) > 0$,

et ainsi $\dfrac{1-q}{4q}\ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right) > 0 \iff \boxed{P(A) > \dfrac{1}{2}}$.