MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2002

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

1. a) Le calcul matriciel, soigneusement réalisé, est sans appel : $K^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_4$! !

   b) La relation : $K^2 = -I_4$ se réécrit facilement : $-K^2 = I_4 \iff -K \times K = K \times (-K) = I_4$, ce qui permet directement de conclure que $\boxed{K \text{ est inversible et } K^{-1} = -K}$.

   c) La relation : $K^2 = -I_4$ s'écrit aussi : $K^2 + I_4 = 0$, et exprime que $P(X) = X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de K. D'après le cours, les valeurs propres *possibles* de K figurent donc toutes parmi les racines de P. Or... P n'a clairement aucune racine réelle ($x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1$) !
   On a donc affaire à une matrice K qui n'a aucune valeur propre réelle.

2. Soient a et b deux nombres réels. On note $M = a.I + b.K$.

   a) Surtout pas de calcul explicite avec des matrices 4×4 ici ! Mais un calcul littéral, en remarquant que puisque I commute avec K (en tant que matrice identité), l'identité remarquable est valable :

$$(a.I + b.K)^2 = a^2.I^2 + 2ab.IK + b^2.K^2 = a^2.I + 2ab.K - b^2.I$$
$$= (a^2 - b^2).I + 2a.(M - a.I) = (a^2 - b^2).I + 2a.M - 2a^2.I$$
$$= -(a^2 + b^2).I + 2a.M, \quad \text{CQFD}$$

   b) Si $(a, b) \neq (0, 0)$, c'est-à-dire si a et b ne sont pas simultanément nuls : alors $a^2 + b^2 > 0$, et la relation précédente se réécrit :

$$M^2 = -(a^2 + b^2).I + 2a.M \iff M^2 - 2a.M = -(a^2 + b^2).I \iff -\frac{1}{a^2 + b^2}.(M - 2a.I)M = I,$$

   ce qui prouve que M est inversible, d'inverse : $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}.(2a.I - M)}$.

   c) On remarque que la matrice proposée par l'énoncé, appelons-la M, s'écrit : $M = \sqrt{2}.I + K$, et qu'on est donc dans le cadre de l'étude précédente, avec : $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$.
   Comme on a bien $(a, b) \neq (0, 0)$, on peut donc conclure que M est inversible, d'inverse :

$$M^{-1} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2 + 1^2}.(2\sqrt{2}I - M) = \frac{1}{2+1}.(2\sqrt{2}.I - \sqrt{2}.I - K) = \frac{1}{3}.(\sqrt{2}.I - K)$$
$$= \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 + \sqrt{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à la matrice K relativement à la base $\mathcal{B}$. On considère les quatre éléments suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3)$$

a) La famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est déjà une famille libre de **quatre** vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ qui est de **dimension 4** : il *suffit* donc de prouver que $\mathcal{C}$ est libre, pour qu'elle soit une base de $\mathbb{R}^4$.

Il faut bien comprendre ici qu'on connaît explicitement les quatre vecteurs ! $v_1 = e_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $v_3 = e_3 = (0, 0, 1, 0)$ sont déjà deux vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$.

De plus, $v_2 = f(e_1)$ et $v_4 = f(e_3)$ sont leurs images respectives par f : ils se lisent directement dans les colonnes 1 et 3 de la matrice K qui représente f dans $\mathcal{B}$, et : $v_2 = (1, 1, 0, 1)$, tandis que $v_4 = (-1, 1, 0, 0)$.

Soient donc x, y, z, t quatre réels tels que :

$$x.v_1 + y.v_2 + z.v_3 + t.v_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} x + y - t = 0 \\ y + t = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

, dont il est clair qu'on obtient pour unique solution, dans l'ordre d'obtention des coefficients : $y = z = t = x = 0$.
La famille $\mathcal{C}$ est bien libre, et c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Par définition des vecteurs :
$\star$ $f(v_1) = f(e_1) = v_2$
$\star$ $f(v_2) = f(f(e_1)) = f \circ f(e_1)$. Or, puisque f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à K : l'endomorphisme $f \circ f$ est représenté, dans la base canonique, par $K^2 = -I$; on peut donc conclure que : $f \circ f = -Id_{\mathbb{R}^4}$, et par conséquent : $f(v_2) = f \circ f(e_1) = -e_1 = -v_1$.
$\star$ $f(v_3) = f(e_3) = v_4$, et enfin :
$\star$ $f(v_4) = f(f(e_3)) = -e_3 = -v_3$.

On en déduit immédiatement, et sans calcul supplémentaire, la matrice K' de f dans la base $\mathcal{C}$:

$$K' = Mat_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}$$

c) La matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ s'écrit très simplement en écrivant en colonnes les vecteurs de la *nouvelle* base $\mathcal{C}$, en fonction de ceux de l'*ancienne* base (ici $\mathcal{B}$, la base canonique) :

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

d) La *formule de changement de base* du cours donne : $K' = P^{-1}KP$.

Exercice 2

On considère dans cet exercice, pour tout entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynômiale $P_n : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel positif $x \in [0; +\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; la fonction P_n est bien sûr dérivable sur $[0;+\infty[$ comme fonction polynômiale, et par linéarité de la dérivation (la dérivée d'une somme, est la somme des dérivées) :

$$\forall x \in [0;+\infty[,\ P_n'(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k.k.x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k.x^{k-1} \overset{[i=k-1]}{=} \sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}.x^i = -\sum_{i=0}^{2n-1}(-x)^i$$
$$= -\frac{1-(-x)^{2n-1+1}}{1-(-x)} = -\frac{1-(-x)^{2n}}{1+x} = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$$

On a en effet reconnu une somme géométrique de raison $-x \neq 1$ (vu que x est positif), et on a pris en compte la parité de l'exposant pour dire : $(-x)^{2n} = x^{2n}$.

2. Les variations de P_n dépendent du signe de sa dérivée :
sur $[0;+\infty[$, $P_n'(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x+1} \geqslant 0 \iff x^{2n}-1 \geqslant 0 \iff x^{2n} \geqslant 1 \iff x \geqslant 1$ (on ne travaille qu'avec des réels positifs).
La fonction P_n est donc strictement décroissante sur $[0;1]$, puis strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

3. La stricte décroissance de P_n sur $[0;1]$ permet d'écrire : $P_n(1) < P_n(0)$, mais $P_n(0) = 0$... tout simplement !

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;+\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k.x^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k.x^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k.x^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1}.x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}.x^{2n+2}}{2n+2}$$
$$= P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = P_n(x) + x^{2n+1}.\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right)$$

b) On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(2) \geqslant 0$ grâce à une récurrence :

$\boxed{\text{I.}}$ $P_1(x) = -x + \dfrac{x^2}{2}$, et $P_1(2) = -2 + \dfrac{4}{2} = 0$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$:

On sait d'après a) que :

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1}.\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2}\right) = P_n(2) + 2^{2n+1}.\frac{-(2n+2)+2(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}$$
$$= P_n(2) + 2^{2n+1}.\frac{2n}{(2n+1)2n+2}$$

Puisque $P_n(2) \geqslant 2$, on a encore $P_{n+1}(2) \geqslant 0$ comme somme de deux réels positifs : $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: sur $[1;+\infty[$, la fonction P_n est continue (comme polynôme), strictement croissante, avec $P_n(1) < 0$ et $P_n(2) \geqslant 0$, donc P_n change de signe sur $[1;+\infty[$.
Le *théorème de la bijection* assure donc que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n sur $[1;+\infty[$, et plus précisément :
comme $P_n(1) < 0 = P_n(x_n) \leqslant P_n(2)$, on obtient bien, par croissance stricte de P_n sur $[1;+\infty[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 < x_n \leqslant 2$$

6. $P_2(x) = \sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^k.x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$.

On obtient une valeur approchée de x_2, l'unique solution de $P_2(x) = 0$ sur $[1; +\infty[$, par l'algorithme de dichotomie (une fois de plus...), l'intervalle de départ étant : $[1; 2]$ d'après la question précédente.

```
function y=P2(x)
    y = x^4/4-x^3/3+x^2/2-x
endfunction

a=1; b=2; n=0; prec = 1e-3;

while (b-a) > prec
    m = (a+b)/2
    if P2(a)*P2(m)< 0 then
        b = m
    else
        a = m
    end
    n = n+1
end
disp(a,b,n)
```

Remarque : on pouvait aussi, comme réponse finale, donner la valeur $\frac{a+b}{2}$ qui est une valeur approchée de x_2 encore plus précise que a et b, sauf qu'on ne peut plus dire si c'est une valeur approchée par défaut ou par excès...

II. Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. Le résultat de la question 1 de la partie I a ici une conséquence importante : la fonction P_n est une primitive de $x \mapsto \frac{x^{2n}-1}{x+1}$ sur $[0, +\infty[$! On peut donc écrire :

$$\forall x \in [0; +\infty[,\ \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t = [P_n(t)]_0^x = P_n(x) - P_n(0) = P_n(x) \text{ car } P_n(0) = 0$$

2. De la question précédente, on déduit : $\int_0^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t = P_n(x_n)$, qui vaut 0 par définition de x_n.

La relation de Chasles permet alors d'écrire :

$$\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t = 0 \iff \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1} = -\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t$$

(on a également utilisé la linéarité de l'intégrale dans le dernier calcul).

3. Encore et toujours, on démontre l'inégalité demandée en étudiant le signe de la fonction différence : soit la fonction $f :\ t \mapsto t^{2n} - 1 - n(t^2 - 1)$, bien définie et dérivable sur $[1; +\infty[$ comme fonction polynômiale.

$\forall t \geqslant 1 :\ f'(t) = 2n.t^{2n-1} - 2nt = 2n(t^{2n-1} - t)$.

Comme $t \geqslant 1$ et $2n - 1 \geqslant 1$ puisque $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall t \in [1, \infty[,\ t^{2n-1} \geqslant t$, ce qui implique :

$\forall t \in [1; +\infty[,\ f'(t) \geqslant 0$.

La fonction f est donc croissante sur $[1; +\infty[$, et par conséquent :

$$\forall t \in [1; +\infty[,\ f(t) \geqslant f(1) = 1^{2n} - 1 - n(1^2 - 1) = 0 \iff \forall t \in [1; +\infty[,\ t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1)$$

4. De l'inégalité démontrée précédemment on déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1;+\infty[$:
$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geqslant n\frac{t^2-1}{t+1} = n\frac{(t-1)(t+1)}{t+1} \iff \frac{t^{2n}-1}{t+1} \geqslant n(t-1)$$
selon l'identité remarquable bien connue (!).

Les deux fonctions concernées sont bien définies et continues sur l'intervalle $[1;x_n]$ et on sait depuis la partie I que $1 < x_n$, donc par *croissance de l'intégrale* :
$$\int_1^{x_n}\frac{t^{2n}-1}{t+1}\text{d}t \geqslant \int_1^{x_n} n(t-1)\text{d}t \iff \int_1^{x_n}\frac{t^{2n}-1}{t+1}\text{d}t \geqslant n\left[\frac{1}{2}(t-1)^2\right]_1^{x_n} = \frac{n}{2}(x_n-1)^2$$

Ensuite : on sait déjà que $x_n > 1 \iff x_n - 1 > 0$. Reste alors à montrer que :
$x_n - 1 \leqslant \dfrac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}} \iff (x_n-1)^2 \leqslant \dfrac{2\ln(2)}{n} \iff \dfrac{n}{2}(x_n-1)^2 \leqslant \ln(2)$ (les équivalences viennent du fait que les deux membres initiaux sont tous les deux positifs).

En reprenant l'inégalité précédemment démontrée, et le résultat de la question 2. de cette partie, on est amené à écrire :
$$\int_1^{x_n}\frac{t^{2n}-1}{t+1}\text{d}t = \int_0^1\frac{1}{1+t}\text{d}t - \int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t}\text{d}t = [\ln(|1+t|)]_1^{x_n} - I_n = \ln(2) - I_n$$
où $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t}\text{d}t$ est l'intégrale d'une fonction <u>continue</u>, <u>positive</u> sur $[0,1]$, où $0 < 1$ (bornes dans l'ordre croissant).

Ainsi, par *positivité de l'intégrale* : $I_n \geqslant 0$, ce qui implique bien :
$\displaystyle\int_1^{x_n}\frac{t^{2n}-1}{t+1}\text{d}t = \ln(2) - I_n \leqslant \ln(2)$, et donc $\dfrac{n}{2}(x_n-1)^2 \leqslant \ln(2)$ par transitivité de l'inégalité.

5. On conclut facilement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}} = 0$, donc d'après le <u>théorème d'encadrement</u> :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n - 1 = 0$, c'est-à-dire que :
$$\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge, et } \lim_{n\to+\infty} x_n = 1$$

Exercice 3

1. Étude préliminaire

On admet, pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0,1[$, que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}x^k$ est convergente et on note $s_k(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n$.

a) Pour tout réel $x \in [0,1[$: $\dbinom{n}{0}x^n = x^n$ est le terme général d'un série géométrique bien convergente, de somme totale $s_0(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$ en effet.

De même, toujours pour $x \in [0,1[$, $\dbinom{n}{1}x^n = n.x^n = x \times nx^{n-1}$ est, à un facteur près, le terme général d'une série géométrique dérivée convergente à nouveau, de somme totale :
$s_1(x) = x \times \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1} = x \times \frac{}{(1-x)^2}.$

b) La formule : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, valable pour tout couple d'entiers (n, k) tels que $k < n$, est tout simplement la *formule de Pascal*, qu'on doit pouvoir citer directement !
Si on veut vraiment tout redémontrer comme dans le cours, il suffit d'écrire les coefficients binomiaux avec des factorielles...

c) On revient ici aux sommes partielles de la série : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, et tout entier $N > k$:

$$\sum_{n=k+1}^{N} \binom{n}{k+1} x^n = \sum_{m=k}^{N-1} \binom{m+1}{k+1} x^{m+1} = x. \sum_{m=k}^{N-1} \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} \right] x^m$$

$$= x \sum_{m=k}^{N-1} \binom{m}{k} x^m + x \sum_{m=\cancel{k}\ k+1}^{N-1} \binom{m}{k+1} x^m \qquad \text{car } \binom{m}{m+1} = 0 \text{ puisque } m < m+1$$

Il suffit alors de passer à la limite dans la relation lorsque N tend vers $+\infty$ (ce qui est licite puisque toutes les séries convergent), pour obtenir :

$$\sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^m = x \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m}{k} x^m + x \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^m \iff s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x)$$

d) Démontrons alors par récurrence sur k, que la propriété $\mathcal{P}(k)$: "$\forall x \in [0, 1[, \quad s_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$".

$\boxed{\text{I.}}$ Les résultats de la question 1.a) prouvent que $\mathcal{P}(0)$ est vraie (et $\mathcal{P}(1)$ aussi, d'ailleurs).

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie à un certain rang $k \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie :

On sait d'après la question précédente que :
$\forall x \in [0, 1[,\ s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x) \iff (1-x) s_{k+1}(x) = x s_k(x)$
soit : $s_{k+1}(x) = \dfrac{x}{1-x} s_k(x)$, (licite car $x < 1$) ce qui donne bien, compte tenu de l'hypothèse de récurrence :
$s_{k+1}(x) = \dfrac{x}{1-x} . \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \dfrac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}}$, et $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

Remarque : Cette propriété s'appelle la **formule du binôme négatif**, qui permet de généraliser la notion de série géométrique dérivée.

2. Étude d'une expérience aléatoire

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
  On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
  On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

a) La variable aléatoire N représente le temps d'attente d'un premier succès : obtenir une première fois la boule noire, dans un processus de Bernoulli sans mémoire.

Donc N suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{5}$:

$$N(\Omega)=\mathbb{N}^*,\ \text{et}\ \forall k\geqslant 1,\ P(N=k)=\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}.\frac{1}{5}\qquad E(N)=5,\ \text{et}\ V(N)=\frac{4/5}{(1/5)^2}=20$$

b) Soit $k\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}^*$: si l'événement $[N=n]$ est réalisé, alors on sait qu'on a réalisé n tirages identiques et indépendants (car ils sont faits avec remise), où l'on peut là encore considérer le fait d'obtenir la boule noire comme le succès. On peut donc utiliser le modèle binomial pour cette probabilité conditionnelle :

$$P_{[N=n]}(X=k)=\begin{cases}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} & \text{si } 0\leqslant k\leqslant n\\ 0 & \text{si } k>n\end{cases}$$

c) La question précédente donne en particulier : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P_{[N=n]}(X=0)=\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

La formule des probabilités totales, écrite ici avec le système complet d'événements $([N=n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ donne :

$$\begin{aligned}P(X=0)&=\sum_{n=1}^{+\infty}P_{[N=n]}(X=0).P(N=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n.\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\frac{1}{5}\\&=\frac{4}{25}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{16}{25}\right)^{n-1}=\frac{4}{25}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{16}{25}\right)^j=\frac{4}{25}.\frac{1}{1-\frac{16}{25}}=\frac{4}{25}.\frac{25}{9}\\P(X=0)&=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

d) Plus généralement, et pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$, on peut écrire d'après la même formule :

$$\begin{aligned}P(X=k)&=\sum_{n=1}^{+\infty}P_{[N=n]}(X=k)P(N=n)=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}.\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\frac{1}{5}\\&=\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}\left(\frac{5}{4}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{16}{25}\right)^k\qquad\text{car }\binom{n}{k}=0\text{ si }n<k\\&=\frac{1}{4^{k+1}}.\frac{\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(\frac{9}{25}\right)^{k+1}}\qquad\text{d'après la formule du binôme négatif}\\&=\frac{1}{4^{k+1}}.\frac{4^{2k}}{25^k}.\frac{25^{k+1}}{9^{k+1}}=\frac{25}{36}.\left(\frac{4}{9}\right)^k\end{aligned}$$

e) L'univers-image $X(\Omega)$ est égal à $\mathbb{N}$ car le nombre de tirages nécessaires dans la première phase peut être aussi grand qu'on veut, donc le nombre de boules noires obtenues dans la deuxième phase aussi. L'espérance de X existe si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}kP(X=k)$ est absolument convergente ; c'est une série à termes positifs donc la convergence simple suffit, et :

$$\sum_{k=0}^{n}kP(X=k)=\frac{25}{36}.\frac{4}{9}.\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée de raison $\dfrac{4}{9}\in]0;1[$, donc convergente.

Ainsi, X admet une espérance qui vaut :

$$E(X) = \frac{25}{81}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{25}{81}.\frac{1}{\left(\frac{5}{9}\right)^2} = \frac{25}{81}.\frac{81}{25} = 1.$$

f) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$P(X \leqslant k) = \sum_{j=0}^{n} P(X=j) = P(X=0) + \sum_{j=1}^{n} P(X=j) = \frac{4}{9} + \frac{25}{36}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{25}{36}.\frac{4}{9}\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}} = \frac{4}{9} + \frac{25}{81}.\frac{9}{5}.\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right] = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} - \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^k$$

$$P(X \leqslant k) = 1 - \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^k$$

3. Étude d'une variable aléatoire à densité

On note $a = -\dfrac{\ln(9)-\ln(5)}{\ln(9)-\ln(4)}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a;+\infty[\\ F(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On rappelle : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(\dfrac{4}{9}\right) = e^{x\ln\left(\frac{4}{9}\right)}$ (*forme exponentielle* des puissances réelles).

a) Il faut ici procéder à l'ensemble des vérifications sur F :

- La fonction F étant nulle sur $]-\infty, a[$, elle est bien croissante (car constante) et de classe C^1 sur cet intervalle, et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
- Sur $]a,+\infty[$: $1-\dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^x = 1 - \dfrac{5}{9}.e^{x\ln(4/9)}$ est bien l'expression d'une fonction de classe C^1 sur cet intervalle comme composée de telles fonctions, avec :

  $\forall x \in]a,+\infty[,\ F'(x) = -\dfrac{5}{9}.\ln\left(\dfrac{4}{9}\right).e^{x\ln(4/9)} > 0$ puisque vu que $0 < \dfrac{4}{9} < 1$, alors $\ln\left(\dfrac{4}{9}\right) < 0$.

  La fonction F est donc également croissante sur $]a,+\infty[$, et de plus :

  $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{4}{9}\right) = -\infty$ puisque $\ln(4/9) < 0$, donc par composition avec : $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1 - 0 = 1$
- Enfin : $\lim\limits_{x\to a^-} F(x) = \lim\limits_{x\to a^-} 0 = 0$, et :

  $$\lim_{x\to a^+} F(x) = 1 - \frac{5}{9}.e^{a\ln(4/9)} = 1 - \frac{5}{9}.e^{-\ln(5/9)} = 1 - \frac{5}{9}.e^{\ln(9/5)} = 1 - \frac{5}{9}\times\frac{9}{5} = 0$$

  puisque $a = -\dfrac{\ln(9/5)}{\ln(9/4)} = -\dfrac{\ln(5/9)}{\ln(4/9)}$. La fonction F est donc continue en a.

Finalement : la fonction F est croissante et continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en a, ses limites ont bien les valeurs attendues en $-\infty$ et $+\infty$; donc F est bien la fonction de répartition d'une variable à densité, notons Y une telle variable aléatoire.

b) Une densité f de Y est obtenue par dérivation de sa fonction de répartition F là où elle est de classe C^1, on fixe ailleurs (ici en a) une valeur arbitraire positive (ici 0...) :

$$f: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \\ -\frac{5}{9}.\ln\left(\frac{4}{9}\right).\left(\frac{4}{9}\right)^x & \text{si } x > a \end{cases}$$

c) La fonction $g : \ x \mapsto xe^{x\ln(\frac{4}{9})}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, où elle admet donc des primitives. La primitive G de g qui s'annule en 0 (par exemple) a pour expression intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \int_0^x te^{t\ln(4/9)}\mathrm{d}t$$

forme nécessaire pour pouvoir procéder à une intégration par parties, en posant :

$$\begin{array}{lll} u(t) = t & \longrightarrow & u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{t\ln(4/9)} & \longrightarrow & v(t) = \dfrac{1}{\ln(4/9)}.e^{t\ln(4/9)} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ G(x) &= \left[\frac{te^{t\ln(4/9)}}{\ln(4/9)}\right]_0^x - \frac{1}{\ln(4/9)}\int_0^x e^{t\ln(4/9)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{x.(4/9)^x}{\ln(4/9)} - \frac{1}{\ln(4/9)}.\left[\frac{1}{\ln(4/9)}e^{x\ln(4/9)}\right]_0^x \\ &= \frac{x(4/9)^x}{\ln(4/9)} - \frac{(4/9)^x - 1}{[\ln(4/9)]^2} \end{aligned}$$

d) La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)\mathrm{d}t$, est absolument convergente.
Comme la fonction : $t \mapsto t.f(t)$ est nulle sur $]-\infty, a]$, cela revient à prouver la convergence simple de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t.f(t)\mathrm{d}t$ (sur $\mathbb{R}_+$ la fonction intégrée est positive), la convergence absolue de $\displaystyle\int_a^0 t.f(t)\mathrm{d}t$ est assurée par le fait qu'on intègre une fonction continue sur un segment. Bref, l'existence de $E(Y)$ revient en fait à prouver la convergence simple de $\displaystyle\int_a^{+\infty} t.f(t)\mathrm{d}t$.

D'après ce qui précède :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \int_a^A t.f(t)\mathrm{d}t = -\frac{5}{9}.\ln\left(\frac{4}{9}\right)\int_a^A t.e^{t\ln(4/9)}\mathrm{d}t = -\frac{5}{9}\ln\left(\frac{4}{9}\right).[G(A) - G(a)]$$

$0 < 4/9 < 1$, donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^A = 0 = \lim_{A\to+\infty} A\left(\frac{4}{9}\right)^A$ (par croissances comparées pour la deuxième), donc :

$$\begin{aligned} \lim_{A\to+\infty}\int_a^A t.f(t)\mathrm{d}t &= -\frac{5}{9}.\ln(4/9).\left[\frac{1}{[\ln(4/9)]^2} - \frac{a(4/9)^a}{\ln(4/9)} + \frac{(4/9)^a - 1}{[\ln(4/9)]^2}\right] \\ &= -\frac{5}{9}\times\frac{1}{\ln(4/9)} + \frac{5}{9}.a.\frac{9}{5} - \frac{5}{9}.\frac{9/5 - 1}{\ln(4/9)} \qquad \text{car : } (4/9)^a = e^{a\ln(4/9)} = e^{\ln(9/5)} = \frac{9}{5} \\ &= a - \frac{5}{9}.\frac{1}{\ln(4/9)} - \frac{5}{9}.\frac{4/5}{\ln(4/9)} \qquad \text{puisque } a = \frac{\ln(9/5)}{\ln(4/9)} \\ &= a - \frac{1}{\ln(4/9)} \end{aligned}$$

Ouf ! Ce calcul prouve donc que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)\mathrm{d}t$ est (absolument) convergente, donc Y admet une espérance qui vaut :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a} t.f(t)\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} t.f(t)\mathrm{d}t = a + \frac{1}{\ln(9/4)}$$