PARTIE I

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $E(X)$ et $E(Y)$ et des variances $V(X)$ et $V(Y)$ et on suppose $V(X) > 0$ (on rappelle que $V(X) = 0$ si et seulement si, avec une probabilité égale à 1, X est constante). La covariance des deux variables aléatoires X et Y (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par :

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))], \text{ ou encore } E(XY) - E(X)E(Y).$$

1. **Covariance des variables aléatoires X et Y**

 a) Pour tout X ayant une variance on a : $Cov\,(X,X) = E\,(X^2) - E\,(X)^2 = V\,(X)$
 donc $Cov(\lambda X + Y, \lambda X + Y) = V(\lambda X + Y)$ et

$$\begin{aligned}
V\,(\lambda X + Y) &= E\left((\lambda X + Y)^2\right) - E\,(\lambda X + Y)^2 \\
&= E\left(\lambda^2 X^2 + 2\lambda XY + Y^2\right) - [\lambda E\,(X) + E\,(Y)]^2 \\
&= \lambda^2 E\left(X^2\right) + 2\lambda E\,(XY) + E\left(Y^2\right) \\
&\quad -\lambda^2 E\,(X)^2 - 2\lambda E\,(X)\,E\,(Y) - E\,(Y)^2 \\
&= \lambda^2 V\,(X) + 2\lambda \text{Cov}\,(X,Y) + V\,(Y)
\end{aligned}$$

 b) Comme une variance est positive ou nulle, le polyôme du second degré $P\,(\lambda) = \lambda^2 V\,(X) + 2\lambda \text{Cov}\,(X,Y) + V\,(Y)$ a un discriminant négatif ou nul.

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4\text{Cov}\,(X,Y)^2 - 4V\,(X)\,V\,(Y) \\
&= 4\left[\text{Cov}\,(X,Y)^2 - V\,(X)\,V\,(Y)\right] \leq 0
\end{aligned}$$

 Donc $\text{Cov}\,(X,Y)^2 \leq V\,(X)\,V\,(Y)$
 On a égalité si et seulement si $\Delta = 0$ donc si le polynôme s'anulle, i.e. s'il existe Λ tel que $V\,(\lambda X + Y) = 0$
 Or (c'est le rappel de début) cela équivaut à $\lambda X + Y$ constante presque surement.
 Conclusion : $\boxed{\text{Il y a égalité} \iff \text{il esxiste } \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } Y = \lambda X + \mu \text{ presque surement}}$

2. **Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y.**
 On suppose dans cette question les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de X et Y strictement positives.

 a) Le coefficient de corrrélationlinéaire est $\rho = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.
 Et comme $\text{Cov}\,(X,Y)^2 \leq V\,(X)\,V\,(Y)$ alors $\frac{\text{Cov}(X,Y)^2}{V(X)V(Y)} \leq 1$ et en prenant la racine, $\left|\frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\right| \leq 1$ (la covariance peut être négative !)
 Conclusion : $\boxed{\rho \in [-1,1]}$
 Et l'on a $\rho = \pm 1 \iff \rho^2 = 1 \iff \text{Cov}\,(X,Y)^2 = V\,(X)\,V\,(Y)$ donc à la conditionnécessaire et suffisante qu'il existe une constante μ telle que $Y = \lambda X + \mu$ presque surement.

 b) Si X et Y sont indépendante, $\text{Cov}\,(X,Y) = 0$ et odn $\rho = 0$.

c) On suppose enfin que X suit une loi normale centrée réduite $N(0,1)$ et $Y = X^2$.
On a $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$
Comme $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ alors $E(X^2) = 1$ donc $E(Y) = 1$.
Enfin, pour $E(Y^2) = E(X^4)$, par le théorème de transfert, on test la convergence absolue (=cv simple car tout est positif) de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^4\varphi(t)\,dt$:

$$\int_0^M t^4\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^M t^4 e^{-t^2/2}dt$$

par intégration par parties : $u(t) = t^3$: $u'(t) = 3t^2$: $v'(t) = te^{-t^2/2}$: $v(t) = -e^{-t^2/2}$ avec u et v de classse C^1

$$\begin{aligned}
\int_0^M t^4 e^{-t^2/2}dt &= \left[-t^3e^{-t^2/2}\right]_0^M - \int_0^M -3t^2e^{-t^2/2}dt \\
&= 0 + M^3e^{-M^2/2} + 3\int_0^M t^2e^{-t^2/2}dt \\
&\to 3\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2/2}dt \text{ qui converge donc} \\
\int_0^{+\infty} t^4\varphi(t)\,dt &= 3\int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)\,dt
\end{aligned}$$

et de même en $-\infty$:

$$\int_{-\infty}^0 t^4\varphi(t)\,dt = 3\int_{-\infty}^0 t^2\varphi(t)\,dt$$

Avec $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\varphi(t)\,dt = E(X^2) = 1$ on trouve alors

$$E\left(Y^2\right) = 3$$

D'où $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 3 - 1 = 2$
On a également

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= E\left(X^3\right) - E(X)E\left(X^2\right)
\end{aligned}$$

et comme $\int_{-\infty}^{+\infty} t^3\varphi(t)\,dt$ converge et est nulle (fonction impaire) alors $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$ et $\rho(X,Y) = 0$.
Conclusion : $\boxed{\text{réciproque fausse : } X \text{ et } X^2 \text{ ne sont pas indépendantes bien que } \rho(X,X^2) \text{ soit nul.}}$
Non indépendantes : $(X^2 \leq 1) = (-1 \leq X \leq 1)$ et donc
$\mathrm{P}\left[(X^2 \leq 1) \cap (-1 \leq X \leq 1)\right] = \mathrm{P}(X^2 \leq 1) \neq \mathrm{P}(X^2 \leq 1)\,\mathrm{P}(-1 \leq X \leq 1)$

PARTIE II

1. **Calculs préliminaires**

a) Pour $n = q$ on a :

$$\sum_{k=q}^{q}\binom{k}{q} = \binom{q}{q} = 1 = \binom{q+1}{q+1}$$

Soit $n \geq q$ tel que $\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$ alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=q}^{n+1} \binom{k}{q} &= \sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} + \binom{n+1}{q} \\
&= \binom{n+1}{q+1} + \binom{n+1}{q} \\
&= \binom{n+2}{q+1} \text{ (triangle de Pascal)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour } n \geq q : \sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}}$

b) En faisant $q = 1$, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)\,n}{2}$$

pour $q = 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{k\,(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3 \cdot 2} \text{ et} \\
\sum_{k=2}^{n} k\,(k-1) &= \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3}
\end{aligned}$$

enfin pour $q = 3$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n} \binom{k}{3} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{k\,(k-1)\,(k-2)}{3 \cdot 2} = \binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{4 \cdot 3 \cdot 2} \text{ et} \\
\sum_{k=2}^{n} k\,(k-1)\,(k-2) &= \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{4}
\end{aligned}$$

On considère dans toute la suite de cette partie un nombre entier $n \geqslant 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.

On extrait de cette urne successivement et sans remise 2 jetons et on désigne alors par :

- N_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré.
- N_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du second jeton tiré.
- X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des 2 jetons tirés.
- Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des 2 jetons tirés.

On note $E(N_1)$ et $V(N_1)$, $E(N_2)$ et $V(N_2)$, $E(X)$ et $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$ les espérances et variances des quatre variables aléatoires N_1, N_2, X, Y.

2. **Lois conjointe et marginales des variables aléatoires N_1 et N_2.**

a) Les numéros présents dans l'urne sont équiprobables donc $\mathrm{P}(N_1 = i) = \frac{1}{n}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$
$\mathrm{P}_{N_1=i}(N_2 = j) = \frac{1}{n-1}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n, j \neq i$ et $\mathrm{P}_{N_1=j}(N_2 = j) = 0$ car la boule j est retirée de l'urne.
$(N_1 = i)_{i \in [[1,n]]}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N_2=j) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_{N_1=i}(N_2=j)\,\mathrm{P}(N_1=i)\\
&= \sum_{i=1:i\neq j}^{n} \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n} + \mathrm{P}_{N_1=j}(N_2=j)\,\mathrm{P}(N_1=j)\\
&= (n-1)\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc la loi de } N_2 \text{ est la même que celle de } N_1.}$

N.B. On aurait aussi pu raisonner directement : sans conditionnement par le premier tirage, tous les numéros sont possibles et équiprobables pour le second tirage.

On a $E(N_1) = E(N_2) = \frac{n+1}{2}$ (loi uniforme sur $[[1,n]]$)

$$\begin{aligned}
E\left(N_1^2\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
V(N_1) &= E\left(N_1^2\right) - E(N_1)^2\\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\\
&= \frac{n+1}{12}(4n+2-3n-3)\\
&= \frac{n^2-1}{12}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(N_1) = E(N_2) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(N_1) = V(N_2) = \frac{n^2-1}{12}}$

b) On a $\mathrm{P}(N_1 = i \cap N_2 = j) = 0$ si $i = j$ (événement impossible)
et si $i \neq j$: $\mathrm{P}(N_1 = i \cap N_2 = j) = \mathrm{P}(N_1 = i)\,\mathrm{P}_{N_1=i}(N_2 = j) = \frac{1}{n(n-1)}$

On a alors (on ne pense pas que N_1 et N_2 soient indépendantes)

$$\begin{aligned}
E(N_1N_2) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\ j\ \mathrm{P}(N_1 = i \cap N_2 = j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\left[\sum_{j=1:j\neq i}^{n} j\ \mathrm{P}(N_1 = i \cap N_2 = j) + 0\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{j=1}^{n} j - i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\frac{n(n+1)}{2n(n-1)} - \sum_{i=1}^{n} i^2\frac{1}{n(n-1)} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4n(n-1)} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{n(n-1)6} \\
&= \frac{n(n+1)}{n(n-1)12}\left(3\left(n+n^2\right) - 4(2n+1)\right) \\
&= \frac{(n+1)}{(n-1)12}\left(3n^2 - n - 2\right) \text{ que l'on factorise} \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)(n-1)}{(n-1)12}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{On a donc bien } E(N_1N_2) = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{12}}$

La covariance de (N_1, N_2) est alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(N_1, N_2) &= E(N_1N_2) - E(N_1)E(N_2) \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)}{12}[3n + 2 - 3n - 3] \\
&= -\frac{n+1}{12} \\
\rho(N_1, N_2) &= \frac{\mathrm{Cov}(N_1, N_2)}{\sqrt{V(N_1)V(N_2)}} \\
&= -\frac{n+1}{12}\frac{12}{n^2-1} \\
&= -\frac{1}{n-1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{le coefficient de corrélation linéaire de } N_1 \text{ et } N_2 \text{ vaut } -\dfrac{1}{n-1}}$

(Le signe négatif est cohérent : plus l'un est grand, moins l'auter a de chance de l'être.

c) On a alors

$$\begin{aligned}
V(N_1 + N_2) &= V(N_1) + V(N_2) + 2\mathrm{Cov}(N_1, N_2) \\
&= 2\frac{n^2-1}{12} - 2\frac{n+1}{12} \\
&= \frac{n+1}{6}(n - 1 - 1) \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{6}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{V(N_1+N_2)=\dfrac{(n+1)(n-2)}{6}}$

3. **Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables** aléatoires X et Y

 a) $1 \leqslant i < j \leqslant n$. on a $(X=i\cap Y=j) =$ " le plus grand vaut j e tle plus petit vaut i" et comme on a bien $i<j$
 $(X=i\cap Y=j) =$" l'un vaut i et l'autre j"$=(N_1=i\cap N_2=j)\cup(N_1=j\cap N_2=i)$ incompatibles donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=i\cap Y=j) &= \mathrm{P}(N_1=i\cap N_2=j)+\mathrm{P}(N_1=j\cap N_2=i)\\
&= \frac{2}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

 Et sinon, l'événement est impossible et la probabilité est nulle.

 b) Les lois de X et de Y sont les lois marginales du couple donc
 pour $j\geq 2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=j) &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X=i\cap Y=j)\\
&= \sum_{i=1:i<j}^{j-1}\frac{2}{n(n-1)}+0 \text{ car } \ j-1\geq 1\\
&= \frac{2(j-1)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

 et pour $j=1$ on $\mathrm{P}(Y=1)=0$ (car le numéro 1 sera le plus petit et ne pourra pas être le plus grand), ce que donne encore la formule.
 Pour $i\leq n-1$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=i) &= \sum_{j=1}^{n}\mathrm{P}(X=i\cap Y=j)\\
&= \sum_{j=i+1:j>i}^{n}\frac{2}{n(n-1)}+0 \text{ car } i+1\leq n\\
&= \frac{2(n-(i+1)+1)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

 qui donne bien 0 pour $i=n$.

 Conclusion : $\boxed{\text{pour } i \text{ et } j \text{ de } [[1,n]] : \mathrm{P}(Y=j)=\dfrac{2(j-1)}{n(n-1)} \text{ et } \mathrm{P}(X=i)=\dfrac{2(n-i)}{n(n-1)}}$

 c) Pour $1\leqslant i<j\leqslant n$:
 Quand $Y=j$ le plus petit peut prendre toutes les valeurs de $[[1,j-1]]$ équiprobablement et $\mathrm{P}_{Y=j}(X=i)=\frac{1}{j-1}$ pour $i\in[[1,j-1]]$.
 Pour plus de sureté, on revient à la définition :

$$\mathrm{P}_{Y=j}(X=i)=\frac{\mathrm{P}(X=i\cap Y=j)}{\mathrm{P}(Y=j)}=\frac{\frac{2}{n(n-1)}}{\frac{2(j-1)}{n(n-1)}}=\frac{1}{j-1}$$

 et de même

$$\mathrm{P}_{X=i}(Y=j)=\frac{1}{n-i}$$

d) On a $X(\Omega) = [[1, n-1]]$ donc $(n+1-X)(\Omega) = [[2, n]] = Y(\Omega)$
Pour $2 \leqslant j \leqslant n$ on a

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(n+1-X=j) &= \mathrm{P}(X=n+1-j) \\ &= \frac{2(n-(n+1-j))}{n(n-1)} \text{ car } 1 \leq n+1-j \leq n-1 \\ &= \frac{2(j-1)}{n(n-1)} = \mathrm{P}(Y=j) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{n+1-X \text{ et } Y \text{ ont la même loi.}}$,
Donc ils ont même espérance et variance.$E(n+1-X) = E(Y)$ et $V(n+1-X) = V(Y)$,
Or $E(n+1-X) = n+1-E(X)$ d'où $E(X) = n+1-E(Y)$
et $V(n+1-X) = (-1)^2 V(X)$ donc
Conclusion : $\boxed{E(X) = n+1-E(Y) \text{ et } V(X) = V(y)}$

4. **Espérances et variances des variables aléatoires X et Y**

a) Idée : $X+Y = N_1+N_2$ donc $E(X)+E(Y) = E(N_1)+E(N_2)$ ne conduit à rien ici car on a simplification...
On revient à la défintion :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=2}^{n} j\frac{2(j-1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{j=2}^{n} j(j-1) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\frac{(n+1)n(n-1)}{3} \\ &= \frac{2}{3}(n+1) \end{aligned}$$

d'après les formules du début.
D'où $E(X) = n+1-E(Y) = \frac{1}{3}(n+1)$

b) On a :

$$\begin{aligned} E[Y(Y-2)] &= \sum_{j=2}^{n} j(j-2)\frac{2(j-1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{j=2}^{n} j(j-1)(j-2) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{2} \end{aligned}$$

Or $E[Y(Y-2)] = E[Y^2-2Y] = E(Y^2)-2E(Y)$ et $E(Y^2) = E[Y^2-2Y]+2E(Y)$ donc

$$\begin{aligned} E\left(Y^2\right) &= \frac{(n+1)(n-2)}{2} + \frac{4}{3}(n+1) \\ &= \frac{(n+1)}{6}(3n-6+8) \\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{6} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V(Y) &= E\left(Y^2\right) - E(Y)^2 \\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4}{9}(n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{18}(9n+6-8n-8) \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{18} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{V(X) = V(Y) = \dfrac{(n+1)(n-2)}{18}}$

5. **Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y**

   a) Comme X est l'une des deux valeur et Y l'autre alors $X + Y = N_1 + N_2$
   Donc

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= V(N_1+N_2) \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{6} \end{aligned}$$

   D'auter part $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$ donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{2}\left[V(X+Y) - V(X) - V(Y)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)(n-2)}{6} - 2\frac{(n+1)(n-2)}{18}\right) \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{2 \cdot 18} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \dfrac{(n+1)(n-2)}{36}}$

   b) On a alors

$$\begin{aligned} \rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{36}\frac{18}{(n+1)(n-2)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\rho(X,Y) = \dfrac{1}{2} \text{ indépendant de } n \text{ (étonnant, non ?)}}$

6. **Utilisation de la fonction génératrice des variables aléatoires X et Y**
   On se propose de retrouver les résultats précédents par une autre méthode, en ne supposant connues que les probabilités $P(X = i \cap Y = j)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.
   On désigne par G la fonction génératrice du couple de variables aléatoires (X,Y), définie par :

$$G(u,v) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(X = i \cap Y = j)(1+u)^i(1+v)^j$$

a) La fonction G est de classe C^2 en(u,v) tels que $u>-1$ et $v>-1$ et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial u}(u,v) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(X=i\cap Y=j\right)\cdot i\cdot(1+u)^{i-1}(1+v)^{j} \text{ donc}\\
\frac{\partial G}{\partial u}(0,0) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(X=i\cap Y=j\right)\cdot i \text{ on inverse les sommes}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[i\sum_{j=1}^{n}\mathrm{P}\left(X=i\cap Y=j\right)\right] \text{ loi marginale}\\
&= \sum_{i=1}^{n} i\mathrm{P}\left(X=i\right)=E\left(X\right)
\end{aligned}$$

et de même pour $\dfrac{\partial G}{\partial v}G(0,O)=E(Y)$.
On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(u,v) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=2}^{n} \mathrm{P}\left(X=i\cap Y=j\right)\cdot i\left(i-1\right)\cdot(1+u)^{i-2}(1+v)^{j} \text{ et}\\
\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0,0) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=2}^{n} \mathrm{P}\left(X=i\cap Y=j\right)\cdot i\left(i-1\right) \text{ nul pour } i=1\\
&= \sum_{i=1}^{n} i\left(i-1\right)\mathrm{P}\left(X=i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2\mathrm{P}\left(X=i\right)-\sum_{i=1}^{n} i\mathrm{P}\left(X=i\right)\\
&= E\left(X^2\right)-E\left(X\right)
\end{aligned}$$

et de même $\dfrac{\partial^2 G}{\partial v^2}(0,0)=E\left(Y^2\right)-E\left(Y\right)$
et enfin

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v}(u,v) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(X=i\cap Y=j\right)\cdot i\cdot j\cdot(1+u)^{i-1}(1+v)^{j-1}\\
\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v}(0,0) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(X=i\cap Y=j\right)\cdot i\cdot j\\
&= E\left(XY\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\dfrac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0,0)=E\left(X^2\right)-E\left(X\right)\ ;\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial v^2}(0,0)=E\left(Y^2\right)-E\left(Y\right)\ ;\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial u\partial v}(0,0)=E\left(XY\right)}$

b) On doit ici revenir à la loi du couple : si $1\le i<j\le n$ alors $\mathrm{P}\left(X=i\cap Y=j\right)=\frac{2}{n(n-1)}$
donc pour $u,v,w\neq 0$:

$$
\begin{aligned}
G(u,v) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(X=i\cap Y=j\right)(1+u)^{i}(1+v)^{j} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1:i<j}^{j-1}\frac{2}{n\left(n-1\right)}(1+u)^{i}(1+v)^{j}+0\right] \\
&= \frac{2}{n\left(n-1\right)}\sum_{j=1}^{n}\left[(1+v)^{j}\sum_{i=1}^{j-1}(1+u)^{i}\right] \\
&= \frac{2}{n\left(n-1\right)}\sum_{j=1}^{n}\left[(1+v)^{j}(1+u)\frac{1-(1+u)^{j-1}}{u}\right] \quad \text{car } 1+u\neq 1 \\
&= \frac{2}{n\left(n-1\right)}\left[-\frac{1}{u}\sum_{j=1}^{n}\left[(1+u)(1+v)\right]^{j}+\frac{1+u}{u}\sum_{j=1}^{n}(1+v)^{j}\right] \quad \text{et } 1+v\neq 1 \\
&= \frac{2}{n\left(n-1\right)}\left[-\frac{(1+w)}{u}\frac{(1+w)^{n}-1}{w}+\frac{(1+u)(1+v)}{u}\frac{(1+v)^{n}-1}{v}\right] \\
&= \frac{2(1+w)}{n(n-1)u}\left[\frac{(1+w)^{n}-1}{w}-\frac{(1+v)^{n}-1}{v}\right]
\end{aligned}
$$

En développant par le binome

$$
\begin{aligned}
G(u,v) &= \frac{2(1+w)}{n(n-1)u}\left[\frac{1}{w}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}w^{k}-\frac{1}{v}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}v^{k}\right] \\
&= \frac{2(1+w)}{n(n-1)u}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(w^{k-1}-v^{k-1}\right)
\end{aligned}
$$

c) $w=u+v+uv$ est C^{1} sur $\mathbb{R}^{2}$ et

$$
\frac{\partial w}{\partial u}=1+v:\frac{\partial w}{\partial v}=1+u
$$

On a donc

$$
G\left(u,v\right)=\frac{2(1+w)}{n(n-1)u}H\left(u,v\right) \text{ avec } H\left(u,v\right)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(w^{k-1}-v^{k-1}\right)
$$

Mais écrite ainsi, la fonction G n'est pas dérivable par th en $(0,0)$.
N.B. : la suite est hors de portée en 4H...et même en davantage!
Il est nomral de ne pas savoir le faire.
On peut encore factorier par $(w-v)$: $w^{k-1}-v^{k-1}=(w-v)\sum_{i=0}^{k-2}w^{i}v^{k-2-i}$
avec $w=u+v+uv$ donc $w-v=u\left(1+v\right)$

$$
G(u,v)=\frac{2(1+u)\left(1+v\right)^{2}}{n(n-1)}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k-2}w^{i}v^{k-2-i}+0 \text{ (pour } k=1)
$$

Pour dériver G, on dérivera $\dfrac{2(1+u)\left(1+v\right)^{2}}{n(n-1)}$ et $H\left(u,v\right)=\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k-2}\left(w\left(u,v\right)\right)^{i}v^{k-2-i}$
Dans les deux premières dérivées partielles de $H\left(u,v\right)$, les de degré >2 seront nuls en $(0,0)$.

On ne détails que ceux de degré ≤ 2 : (calculs pour $n \geq 4$)

$$
\begin{aligned}
H(u,v) &= \binom{n}{2} + \binom{n}{3}(w+v) + \binom{n}{4}\left(w^2+vw+v^2\right) + \dots \\
H(0,0) &= \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \\
\frac{\partial H}{\partial u}(u,v) &= \binom{n}{3}\frac{\partial w}{\partial u} + \binom{n}{4}\left(2w\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial u}\right) + \dots \\
&= \\
\frac{\partial H}{\partial u}(0,0) &= \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\
\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(u,v) &= \binom{n}{4}\left(2(1+v)^2\right) + \dots \\
\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(0,0) &= 2\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12} \\
\frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(u,v) &= \binom{n}{3} + \binom{n}{4}\left(2(1+v)^2 + 2w + 2v + 1\right) + \dots \\
\frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(0,0) &= \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\left(1 + \frac{3(n-3)}{4}\right) \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24} \\
\frac{\partial H}{\partial v}(u,v) &= \binom{n}{3}(1+u+1) + \binom{n}{4}\left[2w(1+u) + w + v(1+u) + 2v\right] + \dots \\
&= \binom{n}{3}(2+u) + \binom{n}{4}\left[w(3+2u) + v(3+u)\right] + \dots \\
\frac{\partial H}{\partial v}(0,0) &= 2\binom{n}{3} \\
\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(u,v) &= \binom{n}{4}\left[(1+u)(3+2u) + (3+u)\right] + \dots \\
\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(0,0) &= 6\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial u}(u,v) &= \frac{2(1+v)^2}{n(n-1)}H(u,v) + \frac{2(1+u)(1+v)^2}{n(n-1)}\frac{\partial H}{\partial u}(u,v) \text{ donc} \\
\frac{\partial G}{\partial u}(0,0) &= \frac{2}{n(n-1)}H(0,0) + \frac{2}{n(n-1)}\frac{\partial H}{\partial u}(0,0) \\
&= \frac{2}{n(n-1)}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{2}{n(n-1)}\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\
&= 1 + \frac{n-2}{3} = \frac{n+1}{3}
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\boxed{\text{On retrouve } E(X) = \frac{\partial G}{\partial u}(0,0) = \frac{n+1}{3}}$

Pour $E(Y)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial v}(u,v) &= \frac{4(1+u)(1+v)}{n(n-1)}H(u,v)+\frac{2(1+u)(1+v)^2}{n(n-1)}\frac{\partial H}{\partial v}(u,v) \text{ donc} \\
\frac{\partial G}{\partial u}(0,0) &= \frac{4}{n(n-1)}H(0,0)+\frac{2}{n(n-1)}\frac{\partial H}{\partial v}(0,0) \\
&= \frac{4}{n(n-1)}\frac{n(n-1)}{2}+\frac{2}{n(n-1)}\frac{n(n-1)(n-2)}{3} \\
&= 2+\frac{2n-4}{3}=\frac{2n+2}{3}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{On retrouve } E(Y)=\frac{\partial G}{\partial v}(0,0)=\frac{2}{3}(n+1)}$

Et on continue ....

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(u,v) &= \frac{2(1+v)^2}{n(n-1)}\frac{\partial H}{\partial u}(u,v)+\frac{2(1+v)^2}{n(n-1)}\frac{\partial H}{\partial u}(u,v)+\frac{2(1+u)(1+v)^2}{n(n-1)}\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(u,v) \\
\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0,0) &= \frac{4}{n(n-1)}\frac{\partial H}{\partial u}(0,0)+\frac{2}{n(n-1)}\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(0,0) \\
&= \frac{4}{n(n-1)}\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\frac{2}{n(n-1)}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12} \\
&= \frac{2}{3}(n-2)+\frac{1}{6}(n-3)(n-2) \\
&= \frac{(n-2)(n+1)}{6}=E\left(X^2\right)-E(X)
\end{aligned}$$

D'où

$$E\left(X^2\right)=\frac{(n-2)(n+1)}{6}+\frac{n+1}{3}=\frac{n(n+1)}{6}$$

et

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\left(X^2\right)-E(X)^2=\frac{n(n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{9} \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{18}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(X^2)=\frac{n(n+1)}{6} \text{ et } V(X)=\frac{(n+1)(n-2)}{18}}$

Etc ...