EXERCICE 1 *(Étude d'une suite de nombres réels)*

On étudie dans cet exercice la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

A cet effet, on introduit pour tout nombre entier $k \geq 0$ les deux intégrales suivantes:

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)\, dt \quad ; \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t)\, dt.$$

1. Convergence de la suite (J_k/I_k).

a) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$:

$$t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t).$$

b) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geq 0$:

$$0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4} \left(I_k - I_{k+1}\right).$$

c) Exprimer I_{k+1} en fonction de I_k en intégrant par parties l'intégrale I_{k+1} (on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2k+1}(t)$ dans l'intégration par parties).

d) Déduire des résultats précédents que J_k/I_k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

2. Convergence et limite de la suite (S_n).

a) Exprimer I_k en fonction de J_k et J_{k-1} en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_k $(k \geq 1)$.

b) En déduire la relation suivante pour $k \geq 1$:

$$\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}.$$

c) Calculer J_0 et I_0, puis déterminer la limite S de la suite (S_n).

d) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

En déduire un encadrement de $S_{n+p} - S_n$ pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$, puis de $S - S_n$, et montrer que:

$$0 \leq S_n - S + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Autrement dit, $S_n + \dfrac{1}{n}$ constitue une valeur approchée de S à $\dfrac{1}{n^2}$ près.

e) Écrire un programme en PASCAL calculant et affichant une valeur approchée du nombre S à 10^{-6} près.

(ESSEC 2001)

EXERCICE 2 *(Algèbre linéaire et étude d'une marche aléatoire)*

Cet exercice a pour but l'étude d'une marche aléatoire sur les sommets d'un triangle, ce qui fait l'objet de la partie II. Dans la partie I, on aborde des questions préliminaires d'algèbre linéaire.

Partie I

On associe à tout triplet (x, y, z) de nombres réels la matrice $M(x, y, z)$ définie par :

$$M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}.$$

La matrice $M(1, 0, 0)$ n'est autre que la matrice identité I_3 et la matrice $M(0, 1, 0)$ est notée J.

1. L'espace vectoriel E des matrices $M(x,y,z)$.

a) Calculer les matrices J^2 et J^3.

b) Établir que l'ensemble E des matrices de la forme $M(x,y,z)$ où (x,y,z) décrit $\mathbb{R}^3$ constitue un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3.

c) Établir que (I_3, J, J^2) forme une base de E.

2. Matrices inversibles de l'espace vectoriel E.

a) Calculer le produit $M(x,y,z) \times M(x',y',z')$ et montrer que celui-ci est élément de E.
Les matrices $M(x,y,z)$ et $M(x',y',z')$ commutent-elles ?

b) En déduire l'égalité suivante:

$$M(x,y,z) \times M(x^2-yz, z^2-xy, y^2-zx) = \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right] I_3.$$

c) Établir qu'une condition suffisante pour que $M(x,y,z)$ soit inversible est que x, y, z soient tels que $x+y+z \neq 0$ et pas tous égaux. Quelle est alors la matrice inverse de $M(x,y,z)$?

d) Établir enfin que cette condition suffisante d'inversibilité est également nécessaire.

3. Éléments propres des matrices $M(x,y,z)$

a) Établir qu'un nombre réel λ est valeur propre de $M(x,y,z)$ si et seulement si $M(x-\lambda,y,z)$ n'est pas inversible.

b) Montrer que $x+y+z$ est valeur propre de $M(x,y,z)$ et préciser le sous-espace propre associé.

c) On suppose ici que $y \neq z$. Montrer que $M(x,y,z)$ n'a pas d'autre valeur propre.
La matrice $M(x,y,z)$ est-elle diagonalisable ?

d) On suppose ici que $y = z$. Montrer sans calcul que $M(x,y,y)$ est diagonalisable, et préciser quelles sont ses valeurs propres.

4. Diagonalisation des matrices $M(x,y,y)$.

a) Calculer les produits matriciels suivants:

$$M(x,y,y)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad ; \quad M(x,y,y)\begin{pmatrix}+1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad M(x,y,y)\begin{pmatrix}+1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

b) Déterminer deux matrices P et P^{-1} inverses l'une de l'autre telles que:

$$P^{-1}M(x,y,y)P = \begin{pmatrix}x+2y & 0 & 0\\ 0 & x-y & 0\\ 0 & 0 & x-y\end{pmatrix}.$$

c) En déduire la relation suivante pour tout nombre entier naturel n :

$$[M(x,y,y)]^n = \frac{1}{3}(x+2y)^n M(1,1,1) + \frac{1}{3}(x-y)^n M(2,-1,-1).$$

Partie II

On désigne dans toute cette partie par p un nombre réel tel que $0 < p < 1/2$ et on considère la marche aléatoire d'un point S sur les sommets d'un triangle ABC.
A l'instant initial $t = 0$, le point S est en A, et il se déplace ensuite selon les règles suivantes :

- Si S est à l'instant n au sommet A du triangle : il est à l'instant $n+1$ au sommet B avec la probabilité p, au sommet C avec la probabilité p, ou encore au sommet A avec la probabilité $1-2p$.

- Si S est à l'instant n au sommet B du triangle : il est à l'instant $n+1$ au sommet C avec la probabilité p, au sommet A avec la probabilité p, ou encore au sommet B avec la probabilité $1-2p$.
- Si S est à l'instant n au sommet C du triangle : il est à l'instant $n+1$ au sommet A avec la probabilité p, au sommet B avec la probabilité p, ou encore au sommet C avec la probabilité $1-2p$.

Pour tout nombre entier naturel n, on désigne enfin par :

- A_n l'événement "le point S est au sommet A à l'instant n" et par a_n sa probabilité.
- B_n l'événement "le point S est au sommet B à l'instant n" et par b_n sa probabilité.
- C_n l'événement "le point S est au sommet C à l'instant n" et par c_n sa probabilité.

1. <u>Calcul des probabilités a_n, b_n, c_n.</u>

a) Exprimer à l'aide de la formule des probabilités totales les probabilités a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction des probabilités a_n, b_n, c_n.

b) En déduire une matrice M telle qu'on ait pour tout nombre entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

c) En déduire en fonction de p les probabilités a_n, b_n, c_n et leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

2. <u>Nombres moyens des passages en A, B, C entre les instants 1 et n.</u>

a) On désigne dans cette question par X_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque S est au sommet A à l'instant n, et prenant la valeur 0 sinon.
Interpréter la variable aléatoire $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et son espérance $m_n = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$, puis établir que :

$$m_n = \frac{1}{3}\left[n + 2(1-3p)\frac{1-(1-3p)^n}{3p}\right].$$

Donner un équivalent de m_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Déterminer les espérances des nombres de passage du point S au sommet B et au sommet C entre les instants 1 et n (compris).

3. <u>Instant moyen du premier passage du point S aux sommets B ou C.</u>

a) Déterminer la probabilité conditionnelle de l'événement B_{n+1} sachant que l'événement $\overline{B_n}$ (événement contraire de B_n) est réalisé.

b) On note T_B la variable aléatoire indiquant l'instant où, pour la première fois, le point S est au sommet B. Déterminer la loi de T_B, puis l'espérance $E(T_B)$ de T_B.

c) Que dire de T_C, variable aléatoire indiquant l'instant où, pour la première fois, le point S est au sommet C ?

(ESSEC 2001)