Corrigé ESSEC Maths 2 Option économique par Pierre Veuillez

PARTIE I

1. **Résolution numérique de l'équation $\mathbf{x^2+x-1=0}$ $\mathbf{(0<x<1)}$**

   On remarque que $f(x)=x \Leftrightarrow x^2+x+1=0$ pour $x\neq -1$

   $$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

   a) On n'utilise pas ici le théorème de bijection mais la résolution d'une équation du second degré
   Montrer que l'équation $x^2+x-1=0$: $r_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}>0$ et $x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}<0$
   Il reste à montrer que $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}<1\Leftrightarrow 5<9$

   b) On utilise ici les variations de f strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$: $f(1/2)=2/3<1$ et $f(1)=1/2$
   Donc si $1/2<x<1$ alors $f(1)<f(x)<f(1/2)<1$

   c) $f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$ on en connaît le signe, on peut se débarrasser de la valeur absolue :$|f'(x)|=1/(x+1)^2$ que l'on peut majorer par sont sens de variation (décroissante) $\leq |f'(1/2)|=4/9$
   ou bien, comme l'expression est très simple, en manipulant les inégalités : $1/2<x<1$ alors $3/2<x+1<2$, comme carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et qu'ils en sont éléments, et comme la fonction inverse est strictement ... d'où : $|f'(x)|\leq\frac{4}{9}$

   d) On prouve successivement que $u_n\in[1/2,1]$ par récurrence en utilisant que si $x\in[1/2,1]$ alors $f(x)\in[1/2,1]$
   puis comme $f(r)=r$ (d'après la remarque préliminaire) et que $r_2\in[1/21]$, ce qu'il faut démontrer on utilise l'inégalité des accroissements finis.

   $$\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-r_2|\leq\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

   et par encadrement ($|4/9|<1$) on a la convergence de u_n vers r_2

2. **Résolution numérique de l'équation $\mathbf{x^3+x^2+x-1=0}$ $\mathbf{(0<x<1)}$**

   On considère dans cette question la fonction f définie pour $x\geq 0$ par :

   Là encore $f(x)=x\Leftrightarrow x^{\mathbf{3}}+x^{\mathbf{2}}+x-1=0$

   $$f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$$

   a) Cette fois on utilise le théorème de bijection, mais seulement sur l'intervalle $]0,1[$ (c'est sur cet intervalle que l'on doit démontrer l'unicité de la racine) r_3 appartenant à $]0,1[$.

   b) Cet fois, on étudie le sens de variations de f en calculant sa dérivée : $f'(x)=-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}<0$. d'où, si $1/3\leq x\leq 1$ alors $f(1)\leq f(x)\leq f(1/3)$ que l'on calcule....

   c) $f''(x)=6x\frac{x+1}{(x^2+x+1)^3}>0$ donc f' est strictement croissante et si $1/3\leq x\leq 1$ alors $f'(1/3)\leq f'(x)\leq f'(1)\leq 0$
   Comme $f'(1/3)=-\frac{2/3+1}{(1/9+1/3+1)^2}=-\frac{135}{169}$ alors $|f'(x)|\leq\frac{135}{169}$ (on peut soit dire que -$\frac{135}{169}\leq f'(x)\leq\frac{135}{169}$ soit utiliser le sens de variation de la valeur absolue qui est décroissante sur $\mathbb{R}^-$)

   d) Là encore on procède comme précédemment avec le majorant qui n'est plus donné cette fois.

Partie II

1. Etude de l'équation $\mathbf{x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0}$

On note f_N la fonction polynôme définie par $f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a$.

a) On étudie les variations de f_N sur $\mathbb{R}^+$: f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = Nx^{N-1} + \cdots + 1 > 0$ donc

comme $f_N(0) = -a < 0$ (a est un réel strictement positif) et $f_N \to +\infty$ en $+\infty$, et que $0 \in [a, +\infty[$ par bijection l'équation $f_N(x) = 0$ aura une unique solution sur $\mathbb{R}^+$

Si $N > a$ alors $f(1) = N - a > 0$ et d'après les variations de f, comme $f_N(x_N) = 0 < f(1)$ on aura $x_N < 1$

b) Montrer la relation $(*)$: $(x-1) f_N(x)$ peut se développer en ... ou s'écrire avec des un $\sum$ que l'on développe puis réindexe.

$(x-1) f_N(x) = x^{N+1} - (a+1)x + a$

2. Racine positive de l'équation $\mathbf{x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0}$

a) On calcule $f_{N+1}(x_n) = f_{N+1}(x_N) = x_N^{N+1} + x_N^N + \cdots + x_N^2 + x_N - a = f_N(x_N) + x_N^{N+1}$

Et comme $x_N^{N+1} > 0$ on a bien $f_{N+1}(x_N) > f_N(X_N)$

Pour montrer que la suite (x_N) est strictement décroissante, on compare x_N et $x_{N+1}\dots$ que l'on ne connaît que par leurs images.

Comme $f_N(X_N) = 0 = f_{N+1}(X_{N+1})$ l'inégalité précédente donne $f_{N+1}(x_N) > f_{N+1}(x_{N+1})$ et comme f_{N+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que les termes en sont éléments, $x_N > x_{N+1}$, et la suite converge. Soit x^* sa limite.

Comme $x_N > 0$ pour tout entier n, on a par passage à la limite $x^* \geq 0$

Comme pour tout $N > a$ on a $x_N < 1$, par passage à la limite $x^* \leq 1$ ce qui n'est pas suffisant...

Il faut d'abord écarter x_N de 1 : soit A un entier $A > a$ alors pour tout $N > A$ on aura $x_N < x_A$ (suite décroissante) et par passage à la limite $x^* \leq x_A < 1$ C.Q.F.D.

Donc la suite (x_N) converge vers un nombre x^* appartenant à $[0, 1[$

b) Comme la suite est décroissante , si $N \geq A$ alors $0 < x_N \leq x_A$, et comme la fonction puissance $N^{ième}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que x_A et x_N en sont éléments, $0 < (x_N)^N \leq (x_A)^N$

Soit $A \geq a$, on a alors $0 < x_A < 1$ donc $(x_A)^N \to 0$ quand N tend vers $N \to +\infty$ (x_A est une constante)

Donc par encadrement ${x_N}^N \to 0$

Comme $(x-1) f_N(x) = x^{N+1} - (a+1)x + a$ on a en particulier $(x_N - 1) f_N(x_N) = x_N^{N+1} - (a+1)x_N + a = 0$ et par passage à la limite dans cette égalité : $0 - (a+1)x^* + a = 0$ soit $x^* = a/(a+1)$ (car $a > 0$ donc $a + 1 \neq 0$)

Comme $x^* \neq 0$ on a alors $x_N/x^* \to 1$ donc $x_N \sim x^*$ d'où l'écriture $x_N = \dfrac{a}{a+1}(1 + \varepsilon_N)$,

et ε_N tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$

c) On reprend $x_N^{N+1} - (a+1)x_N + a = 0$ et $x_N = \dfrac{a}{a+1}(1 + \varepsilon_N)$

On a donc

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\frac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)\right]^{N+1} - a(1+\varepsilon_N) + a \\
&= \left[\frac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)\right]^{N+1} - a\varepsilon_N \quad \text{donc} \\
a\varepsilon_N &= \left[\frac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)\right]^{N+1}
\end{aligned}$$

Comme tout est strictement positif ($\varepsilon_N > 0$ car $x_N > x^*$)

$$\begin{aligned}\ln(a\varepsilon_N) &= (N+1)\ln\left(\frac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)\right) \text{ donc}\\ \ln(a)+\ln(\varepsilon_N) &= (N+1)\left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right)+\ln(1+\varepsilon_N)\right]\end{aligned}$$

et en multipliant de part et d'autre par ε_N :

$$(N+1)\,\varepsilon_N\left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right)+\ln(1+\varepsilon_N)\right] = \varepsilon_N\ln(\varepsilon_N)+\varepsilon_N\ln(a)$$

Comme $x\ln(x)\to 0$ quand $x\to 0$, le second membre tend vers 0.
Comme $a\neq a+1$ on a $\ln\left(\frac{a}{a+1}\right)\neq 0$ et $[]\to\ln\left(\frac{a}{a+1}\right)\neq 0$ d'où $(N+1)\,\varepsilon_N\to 0$
On a $(1+\varepsilon_N)^{N+1} = epx\left((N+1)\ln(1+\varepsilon_N)\right)$
Or $\ln(1+\varepsilon_N)\sim\varepsilon_N$ donc $(N+1)\ln(1+\varepsilon_N)\sim(N+1)\,\varepsilon_N\to 0$ et $(N+1)\ln(1+\varepsilon_N)\to 0$.
Finalement $(1+\varepsilon_N)^{N+1}\to 1$
La relation $(*)$ donne

$$\begin{aligned}0 &= \left[\frac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)\right]^{N+1} - a\varepsilon_N = \left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1}(1+\varepsilon_N)^{N+1} - a\varepsilon_N\\ \varepsilon_N &= \frac{1}{a}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1}(1+\varepsilon_N)^{N+1}\sim\frac{1}{a}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1}\end{aligned}$$

car $(1+\varepsilon_N)^{N+1}\to 1$

On considère un investissement qui nécessite l'apport initial d'une somme $S_0 > 0$ l'année 0, puis qui rapporte ensuite la même somme $S > 0$

pendant chacune des N années suivantes, c'est à dire pendant les années $1, 2, \dots, N$.

Lorsque le taux d'intérêt des placements est supposé constant au cours du temps et égal à $r > 0$, on sait que le placement d'une somme s à l'issue de l'année 0 conduit à une somme $s_1 = (1+r)\,s$ à l'issue de l'année $1, \dots$, à une somme $s_n = (1+r)^n\,s$ à l'issue de l'année $n, \dots$

Dans ce contexte, on obtiendra une somme S_n à l'issue de l'année n si et seulement si on obtient une somme $S_n/(1+r)^n$ à l'issue de l'année 0 (puisque le placement d'une telle somme $S_n/(1+r)^n$ conduit précisément à l'obtention de la somme S_n à l'issue des n années de placement). Aussi appellera-t-on dans ce contexte *valeur présente* de la somme S_n la somme $S_n/(1+r)^n$.

3. Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement

a) Ce que ne dit pas l'énoncée est que les sommes rapportées par l'investissement sont placé au taux d'intérêt précité.

On calcule la valeur future à l'issue de N années. Les dividendes du placement produisant des intérêts on aura :

le dividende S de l'année 1 produit $S(1+r)^{N-1}$ (en $N-1$ années de placement) à l'issue de l'année N

le dividende S de l'année 2 produit $S(1+r)^{N-2}$ (en $N-2$ années de placement), ...

Le dividende S de l'année N ne produit pas d'intérêt.

On aura donc au final $S(1+r)^{N-1}+S(1+r)^{N-2}+\cdots+S$ soit une valeur présente (en divisant par $(1+r)^{n}$) de

$$\frac{S}{(1+r)^{N}}+\frac{S}{(1+r)^{N-1}}+\cdots+\frac{S}{(1+r)}+\frac{S}{(1+r)^{2}}+\cdots+\frac{S}{(1+r)^{N}}$$

et compte tenu de l'investissement initial, la valeur présente (à la fin de l'année 0) de l'investissement décrit ci-dessus est égale :

$$VP(r)=\frac{S}{(1+r)^{N}}+\frac{S}{(1+r)^{N-1}}+\cdots+\frac{S}{(1+r)^{2}}+\frac{S}{(1+r)}-S_0$$

b) L'équation $VP(r)=0$ s'écrit $f_N\left(\dfrac{1}{1+r}\right)=0$ avec $N>a=S_0/S$

Or l'équation $f_N(x)=0$ a une unique solution $x_N\in]0,1[$ donc $f_N\left(\frac{1}{1+r}\right)\Leftrightarrow x_N=\frac{1}{1+r}\Leftrightarrow r=\frac{1}{x_N}-1>0$

L'équation a donc pour unique solution $r_N=\frac{1}{x_N}-1$

L'Investissement est réalisé si et seulement si $VP(r)>0=VP(r_N)$ et comme la fonction VP est strictement décroissante (composée de $r\to 1/(1+r)$ décroissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et de $S\cdot f_N$ strictement croissante) on a alors :

$$VP(r)>0\Longleftrightarrow r<r_N$$

(et à condition que $N>S/S_0$ donc que le placement se fasse sur plus de S/S_0 années; sinon, on ne peut pas conclure car on ne sait pas alors si $x_N\in]0,1[$)

Remarque : le fait que la valeur présente de l'investissement soit décroissante rend le placement d'autant plus intéressant que le taux d'intérêt est plus faible)

c) La suite x_N est décroissante et strictement positive donc $r_N=\dfrac{1}{x_N}-1$ est croissante (plus on place longtemps, plus l'investissement plus forts sont les taux d'intérêt supportables)

Quand $N\to+\infty$on a $x_N\to x^*=\dfrac{a}{a+1}$ donc

$$r_N\to\frac{a+1}{a}-1=\frac{a}{a+1}=\frac{S_0/S}{S_0/S+1}=\frac{S_0}{S+S_0}=r^*$$

On a

$$r^*-r_N=\frac{1}{x^*}-1-\frac{1}{x_N}+1=\frac{x_N-x^*}{x^*\cdot x_N}$$

Avec

$$x_N-x^*=\frac{a}{a+1}\varepsilon_N\sim\frac{a}{a+1}\frac{1}{a}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1}=\frac{1}{a+1}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1}$$

$$x_N\to\frac{a}{a+1}\text{ donc }x_N\sim\frac{a}{a+1}$$

finalement

$$\begin{aligned}r^*-r_N&\sim\frac{1}{a+1}\left(\frac{a}{a+1}\right)\left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1}\left(\frac{a+1}{a}\right)^{2}\\&\sim\frac{1}{a}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{N}=\frac{S}{S_0}\left(\frac{S_0}{S+S_0}\right)^{N}\end{aligned}$$

Partie III

Cette partie fait refaire exactement le même travail avec de petites complications supplémentaires. Elle n'est là que pour empêcher quiconque de finir le devoir en heures.

1. **Etude de l'équation $\mathbf{Nx^N + (N-1)\,x^{N-1} + \cdots + 2x^2 + x - a = 0}$**

   On note g_N la fonction polynôme définie par : $g_N(x) = Nx^N + (N-1)\,x^{N-1} + \cdots + 2x^2 + x - a$.

   a) Comme précédemment : $g'_N > 0$ sur $\mathbb{R}^+$, $g_N(0)\,a < 0$ et $\lim_{+\infty} g_N = +\infty$ donc par bijection l'équation $g_N(x) = 0$ possède une racine strictement positive y_N et une seule,
   Comme $g_N(1) = 1 + 2 + \cdots + N = N(N+1)/2$, si $N(N+1) > 2a$ alors $g_N(1) > 0$ et comme g_N strictement croissante on a alors $y_N \in]0, 1[$

   b) La somme n'est plus ici usuelle : on peut procéder par récurrence ou bien
   on développe et on réindexe :

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 g_N(x) &= (x-1)^2 \sum_{k=1}^{N} kx^k - a(x-1)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{N} kx^{k+2} - 2\sum_{k=1}^{N} kx^{k+1} + \sum_{k=1}^{N} kx^k - a(x-1)^2 \\
&= \sum_{k=3}^{N+2} (k-2)\,x^k - 2\sum_{k=2}^{N+1} (k-1)\,x^k + \sum_{k=1}^{N} kx^k - a(x-1)^2 \\
&= -2\sum_{k=3}^{N+2} x^k + \sum_{k=3}^{N+2} kx^k - 2\sum_{k=2}^{N+1} kx^k + 2\sum_{k=2}^{N+1} x^k + \sum_{k=1}^{N} kx^k - a(x-1)^2
\end{aligned}$$

   tous les termes communs (de $k = 3$ à N) aux sommes se simplifient et il reste :

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 g_N(x) &= -2x^{N+2} + (N+2)\,x^{N+2} + (N+1)\,x^{N+1} \\
&\quad -2\left(2x^2 + (N+1)\,x^{N+1}\right) \\
&\quad +2x^2 + 1x^1 + 2x^2 - a(x-1)^2 \\
&= Nx^{N+2} - (N+1)\,x^{N+1} + x - a(x-1)^2
\end{aligned}$$

   On calcule Montrer la relation $(**)$: $(x-1)^2 g_N(x) = Nx^{N+2} - (N+1)\,x^{N+1} + x - a(x-1)^2$

2. **Racine positive de l'équation** $Nx^N + (N-1)\,x^{N-1} + \cdots + 2x^2 + x - a = 0$

   a) Comme précédemment $g_{N+1}(y_N) - g_N(y_N) = (N+1)\,y_N^{N+1} > 0$ donc $g_{N+1}(y_N) > g_N(Y_N)$
   Comme $g_N(Y_N) = 0 = g_{N+1}(Y_{N+1})$ on a alors $g_{N+1}(y_N) > g_{N+1}(Y_{N+1})$ et comme g_N est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que les termes en sont éléments $y_N > y_{N+1}$ donc la suite (y_N) est strictement décroissante.

   Mêmes arguments que précédemment pour la convergence vers un nombre réel y^* appartenant à $[0, 1[$.

   b) Pour $N \geq A$ comme la suite y_N est décroissante, et que la fonction puissance N est croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a comme précédemment $0 < N\,{y_N}^N \leq N\,{y_A}^N$.
   Et pour A tel que $A(A+1) > 2a$ on a $0 < y_A < 1$ et $N\,{y_A}^N \to 0$ (car $\alpha^N << 1/N$ si$|\alpha| < 1$)
   Et par encadrement $N\,{y_N}^N \to 0$ et ${y_N}^N \to 0$ également.

Donc $(**)$,en y_N donne $0 = N\, {y_N}^{N+2} - (N+1)\, {y_N}^{N+1} + y_N - a\,(y_N - 1)^2$ et par passage à la limite $0 = y^* - a\,(y^* - 1)^2$

que l'on résout : $ay^2 - (2a+1)\,y + a = 0$, équation du second degré qui a pour discriminant : $\Delta = (2a+1)^2 - 4a^2 = 4a + 1 > 0$

et pour racines $y^* = \dfrac{1}{2a}\left(2a + 1 - \sqrt{4a+1}\right)$ ou $\dfrac{1}{2a}\left(2a + 1 + \sqrt{4a+1}\right)$

Il ne faut garder que celle qui est dans l'intervalle $[0, 1[$

(le produit de racines est $a/a = 1$ donc elles sont toutes deux de même signe, mais si l'une est supérieure alors l'autre inférieure à 1)

Comme $2a + 1 - \sqrt{4a+1} < 2a + 1 + \sqrt{4a+1}$ c'est la première qui se trouve dans cet intervalle et

$$y^* = \frac{1}{2a}\left(2a + 1 - \sqrt{4a+1}\right)$$

On modifie les hypothèses précédentes et on suppose désormais que l'investissement considéré, qui nécessite toujours l'apport initial d'une somme S_0 l'année 0, rapporte de plus en plus pendant chacune des N années suivantes, comme suit : une somme S l'année 1, une somme $2S$ l'année 2, une somme $3S$ l'année 3,... , une somme NS l'année N.

3. Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement

a) Comme précédemment

$$VP\,(r) = \frac{NS}{(1+r)^N} + \frac{(N-1)\,S}{(1+r)^{N-1}} + \cdots + \frac{2S}{(1+r)^2} + \frac{S}{(1+r)} - S_0$$

L'investissement précédent est alors réalisé si et seulement si l'inégalité $VP\,(r) \geq 0$ est vérifiée.

b) Comme précédemment $VP\,(r) = 0 \Leftrightarrow g_N\left(\dfrac{1}{1+r}\right) = 0$ avec $a = S_0/S$ possède une racine strictement positive r_N et une seule lorsque $N\,(N+1) > 2S_0/S$, et $r_N = \frac{1}{y_N} - 1$ et pou les mêmes raisons de sens de variation l'investissement décrit est réalisé si et seulement si $r \leq r_N$.

c) Comme précédemment la suite y est décroissante et positive donc la suite r est croissante et par passage à la limite

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{1}{y^*} - 1 = \frac{2a}{2a + 1 - \sqrt{4a+1}} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{4a+1} - 1}{2a + 1 - \sqrt{4a+1}} \end{aligned}$$

avec $a = S_0/S\ldots$ on peut prolonger le plaisir en multipliant par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{\left(\sqrt{4a+1} - 1\right)\left(2a + 1 - \sqrt{4a+1}\right)}{\left(2a + 1 - \sqrt{4a+1}\right)\left(2a + 1 + \sqrt{4a+1}\right)} \\ &= \frac{-6a + 2\,(a+1)\sqrt{4a+1}}{4a^2} \end{aligned}$$

Sauf erreurs de ma part ...