Corrigé ESSEC III Eco 2002 par Pierre Veuillez
EXERCICE 1: algèbre linéaire et probabilités

Dans cet exercice, on désigne par p un nombre entier naturel non nul et par $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à p.

1. **Étude d'un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}_p[X]$**

   a) On associe à toute fonction polynôme P la fonction $\widehat{P}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\widehat{P}(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt \quad \text{si } x \neq 1 \qquad \text{et} \quad \widehat{P}(1) = P(1)$$

• Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$ et $P(t) = \sum_{k=0}^p a_k t^k$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ son écriture.
On a alors $\int_1^x P(t)dt = \left[\sum_{k=0}^p a_k \frac{1}{k+1} t^{k+1}\right]_{t=1}^x = \sum_{k=0}^p a_k \frac{1}{k+1} x^{k+1} - \sum_{k=0}^p a_k \frac{1}{k+1}$ (constante)
Donc la fonction $x \to \displaystyle\int_1^x P(t)dt$ est polynômiale de degré $\deg P + 1$
Et comme $\int_1^1 P(t)dt = 0$ alors 1 est racine de ce polynôme.
•Soit $Q(x) = \int_1^x P(t)dt$ est donc factorisable par $(x-1)$: $Q(x) = (x-1)R(x)$ avec R fonction polynôme de degré $\deg(Q) - 1 = \deg(P)$.
Donc $\widehat{P}(x) = R(x)$ pour $x \neq 1$.
Reste à voir si $R(1) = P(1)$ ....
Astuce : en dérivant (les fonctions polynomes sont dérivables sur $\mathbb{R}$) on a

- d'une part $Q'(x) = P(x)$ (intégrale fonction de la borne supérieure)
- d'autre part : $Q'(x) = (x-1)R'(x) + R(x)$ et $Q'(1) = R(1)$

Autre idée : on peut ausi passer par une écriture du polynôme qui favorise 1 via un changement de variable $x = t + 1$
$P(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k = \sum_{k=0}^p a_k (t+1)^k$ et en développant $P(x) = \sum_{k=0}^p b_k t^k = \sum_{k=0}^p b_k (x-1)^k$
On a alors $Q(x) = \sum_{k=0}^p b_k \frac{1}{k+1}(x-1)^{k+1}$ d'où $R(x) = \sum_{k=0}^p b_k \frac{1}{k+1}(x-1)^k$ et $R(1) = b_0 = P(1)$
Donc $P(1) = R(1) = \widehat{P}(1)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $R(x) = \widehat{P}(x)$ donc $\widehat{P}$ est polynomial de degré $\deg(P)$
Ou encore : Q est une primitive de P. Donc $Q' = P$ et donc le taux d'accroissement de Q entre 1 et x est :
$R(x) = \frac{1}{x-1}(Q(x) - Q(1)) \to Q'(1) = P(1)$ (avec $Q(1) = 0$) on a donc $R(x) \to P(1)$ et par continuité de la fonctinpoynôme R, $R(1) = P(1)$.
Donc
Conclusion : $\boxed{\widehat{P} \text{ est une fonction polynôme de même degré que } P \text{ lorsque } P \neq 0.}$

   b) On considère l'application ϕ associant à toute fonction polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_p[X]$ la fonction polynôme $\widehat{P}$ définie ci-dessus.
ϕ est une application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}_p[X]$
reste à voir la linéarité :
Soient P_1 et $P_2 \in \mathbb{R}_p[X]$ et α et $\beta \in \mathbb{R}$.
Pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha P_1 + \beta P_2)(x) &= \frac{1}{x-1}\int_1^x (\alpha P_1 + \beta P_2)(t)dt \\
&= \frac{1}{x-1}\alpha \int_1^x P_1(t)\,dt + \frac{1}{x-1}\beta \int_1^x P_2(t)\,dt \\
&= \alpha\phi(P_1)(x) + \beta\phi(P_2)(x)
\end{aligned}$$

Et pour $x = 1$:

$$\begin{aligned}\phi(\alpha P_1 + \beta P_2)(1) &= (\alpha P_1 + \beta P_2)(1) \\ &= \alpha P_1(1) + \beta P_2(1) \\ &= \alpha \phi(P_1)(1) + \beta \phi(P_2)(1)\end{aligned}$$

Donc $\phi(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha \phi(P_1) + \beta \phi(P_2)$

Conclusion : $\boxed{\phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_p[X]}$

Pour l'injectivité :

D'après le degré, si $P \neq 0$ alors $\deg(\phi(P)) = \deg(P)$. Donc $\phi(P) \neq 0$.

Et seule 0 peut avoir une image nulle.

Donc $\ker(\phi) = 0$

Conclusion : $\boxed{\phi \text{ est injective}}$

Et comme les dimension du départ est de l'arrivée sont les même, le théorème du rang nous donne alors

Conclusion : $\boxed{\phi \text{ est surjective}}$ et est donc bijective.

c) On calcule l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_1^x e_k(t)\,dt &= \int_1^x t^k dt = \left[\frac{1}{k+1} t^{k+1}\right]_1^x \\ &= \frac{1}{k+1}\left(x^{k+1} - 1\right)\end{aligned}$$

donc, pour $x \neq 1$, $\phi(e_k)(x) = \frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}-1}{x-1}$ écriture qui peut se factoriser en $\phi(e_k)(x) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} x^i$

et en 1, $\phi(e_k)(1) = e_k(1) = 1 = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} 1^i$

Conclusion : $\boxed{\phi(e_k) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} e_i}$

et on a les coordonnées des images sur la base canonique, donc la matrice :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{p+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p+1} \end{pmatrix}$$

d) Comme la matrice de ϕ est triangulaire, ses valeurs propres sont sur la diagonale.

Donc ϕ a $p+1$ valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.

Conclusion : $\boxed{\text{Les valeurs propres de } \phi \text{ sont : } 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{p+1} \text{ et } \phi \text{ est diagonalisable.}}$

2. **Étude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ**

a) On voit sur la matrice que e_0 est vecteur popre associé à 1.

Comme la forme diagonalisée nous donne la dimension du sous espace propre , 1, on en déduit que (e_0) est uine base de ce sous espace popre.

Conclusion : $\boxed{\text{Le sous espace propre associé à 1 est } \operatorname{Vect}(e_0)}$

Conclusion : $\boxed{\text{les fonctions propres sont } \operatorname{Vect}(e_0) \setminus \{0\}}$

b) On considère une valeur propre λ de ϕ et une fonction polynôme propre associée P.
On a alors $\phi(P) = \lambda P$ et $\phi(P)(x) = \lambda P(x)$ soit pour $x \neq 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,dt &= \lambda P(x) \text{ et} \\ \int_1^x P(t)\,dt &= \lambda(x-1)P(x)\end{aligned}$$

qui est également vraie pour $x = 1$.
Donc, en dérivant (intégrale fonction de la borne supérieure)

$$P(x) = \lambda(x-1)P'(x) + \lambda P(x) \text{ et donc}$$

Conclusion : $\boxed{(1-\lambda)P(x) = \lambda(x-1)P'(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$
Qui donne pour $x = 1$: $(1-\lambda)P(1) = 0$ et $P(1) = 0$ si $\lambda \neq 1$
Conclusion : $\boxed{\text{Pour } P \text{ fonction propre associé à } \lambda \neq 1,\ 1 \text{ est racine de } P.}$

c) On calcule pour $x \neq 1$:
(il serait très maladroit de développer $(t-1)^k$ pour le primitiver)

$$\begin{aligned}\int_1^x P_k(t)\,dt &= \int_1^x (t-1)^k\,dt = dt = \left[\frac{1}{k+1}(t-1)^{k+1}\right]_1^x \\ &= \frac{1}{k+1}(x-1)^{k+1}\end{aligned}$$

donc $\phi(P_k)(x) = \frac{1}{k+1}P_k(x)$ et par continuité, ceci est encore valable en 0.
Conclusion : $\boxed{\phi(P_k) = \dfrac{1}{k+1}P_k}$
Donc la famille $(P_0, P_l, \ldots, P_p)$ est (au choix)

- une famille de fonctions propre associé à des valeurs porpes distinctes, donc libre.
- comme P_k est de dgré k, la famille est échelonnée donc libre.

de $p+1$ vecteurs, dans $\mathbb{R}_p[X]$ qui est de dimension $p+1$.
Conclusion : $\boxed{(P_0, P_l, \ldots, P_p) \text{ est une base -de vecteurs propres- de } \mathbb{R}_p[X]\ .}$

d) On considère une fonction polynôme P exprimée comme suit dans la base précédente :

$$P = a_0P_0 + a_1P_1 + \ldots + a_pP_p$$

Comme les vecteurs propres non associé à 1 s'annulent en 1 alors $P(1) = a_0P_0(1) = a_0$
Conclusion : $\boxed{a_0 = P(1)}$
On a

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \phi(P) \text{ par linéarité} \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k\phi(P_k) \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k\frac{1}{k+1}P_k\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \phi(\phi(P)) = \phi(\Phi_1)\\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k \frac{1}{(k+1)^2} P_k\end{aligned}$$

et (par récurrence)

Conclusion : $\boxed{\Phi_n = \sum_{k=0}^{p} a_k \frac{1}{(k+1)^n} P_k \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*}$ $n \in \mathbb{N}^*$.

On a alors, pour $k \geq 1$: $|k+1| > 1$ et $\frac{1}{(k+1)^n} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Donc dans la somme $\Phi_n(x)$, seul le terme $a_0 \frac{1}{1^n} P_0(x) = a_0$ ne tend pas vers 0.

Conclusion : $\boxed{\Phi_n(x) \to a_0 \text{ quand } n \to +\infty}$

Et comme $a_0 = P(1)$, pour $P(x) = x^p$ on a $a_0 = P(1) = 1$

Conclusion : $\boxed{\text{si } P(x) = x^p \text{ alors } \Phi_n(x) \text{ tend vers 1 quand } n \text{ tend vers } +\infty}$

3. **Application à une marche aléatoire**

Un individu se déplace sur les points d'abscisse 0, 1, 2, p selon les règles suivantes :

• il est au point d'abscisse p à l'instant 0.

• il est au point d'abscisse k $(0 \leqslant k \leqslant p)$ à l'instant n $(n \in \mathbb{N})$, il est de façon équiprobable en l'un des $k+1$ points d'abscisses $0, 1, \ldots, k$ à l'instant $n+1$.

Pour tout nombre entier naturel n, on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant l'abscisse du point où se trouve l'individu à l'instant n et par $E(X_n)$, son espérance.

a) Comme $(X_n = 0, X_n = 1, , \ldots, X_n = p)$ est un système complet d'événements,

$$\mathrm{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{p} \mathrm{P}(X_n = i)\, \mathrm{P}_{X_n = i}(X_{n+1} = k)$$

On intèrpète le conditionnement :

Quand $X_n = i$, les abscisses de 0 à i sont équiprobables et ont donc une probabilité de $\frac{1}{i+1}$.

Les autres sont de probabilité nulle.

Donc, si $i \geq k$ on a $\mathrm{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{i+1}$ et si $i < k$ on a $\mathrm{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = k) = 0$.

Et dansla somme, il ne reste donc que :

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=k}^{p} \frac{1}{i+1} \mathrm{P}(X_n = i)}$

b) On a donc

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \mathrm{P}(X_{n+1} = 0)\\ \mathrm{P}(X_{n+1} = 1)\\ \vdots\\ \mathrm{P}(X_{n+1} = p)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1\mathrm{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(X_n = 1) + \cdots + \frac{1}{p+1}\mathrm{P}(X_n = p)\\ \frac{1}{2}\mathrm{P}(X_n = 1) + \cdots + \frac{1}{p+1}\mathrm{P}(X_n = p)\\ \vdots\\ \frac{1}{p+1}\mathrm{P}(X_{n+1} = p)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{p+1}\\ 0 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{p+1}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{p+1}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{P}(X_n = 0)\\ \mathrm{P}(X_n = 1)\\ \vdots\\ \mathrm{P}(X_n = p)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\phi) \text{ vérifie } U_{n+1} = MU_n}$

c) On calcule :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{p+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \frac{1}{p+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \frac{1}{p+1} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \dots & \frac{0+1+\dots p}{p+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \dots & \frac{p(p+1)}{(p+1)2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad p$$

Conclusion : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix}}$.

On a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} U_n = (0\mathrm{P}(X_n = 0) + \cdots + p\mathrm{P}(X_n = p)) = (E(X_n))$

Et comme $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} U_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} MU_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} U_n$ on a donc

d) *Conclusion :* $\boxed{E(X_{n+1}) = \frac{1}{2}E(X_n)}$

suite géométrique de premier terme $E(X_0) = p$ (car il est en p à l'instant 0)

Conclusion : $\boxed{E(X_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n p \text{ et } E(X_n) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty}$

car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

e) On a $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, et comme la suiet U est géométrique matricielle on a

Conclusion : $\boxed{U_n = M^n U_0}$

Pour utiliser 2.d, on ne fait pas le classique changement de base, mais on introduit un polynôme en relation avec U_n :

$Q_n = \mathrm{P}(X_n = 0) \cdot 1 + \cdots + \mathrm{P}(X_n = p) X^p$ qui a pour coordonnées U_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$.

La relation $U_n = M^n U_0$ se traduit alors sur les vecteurs par $Q_n = \phi^n(Q_0) = \phi^n(X^p)$

Et comme $\phi^n(X^p)(x) \to 1$ pour tout x, on a en particulier pour $x = 0$

$\mathrm{P}(X_n = 0) = Q_n(0) = \phi^n(X^p)(0) \to 1$ quand $n \to +\infty$.

La somme des probabliités de la oi valant 1 et étant positives on a alors $\mathrm{P}(X_n = k) \to 0$ pour $k \geq 1$

($\sum P(X_n = k) = 1$ donc $0 \leq \mathrm{P}(X_n = k) = 1 - \mathrm{P}(X_n = 0) - \cdots \leq 1 - \mathrm{P}(X_n = 0) \to 0$ et par encadrement $\mathrm{P}(X_n = k) \to 0$)

Conclusion : $\boxed{\text{les } p+1 \text{ composantes de } U_n \text{ ont pour limites (de haut en bas) 1, 0, 0, ... , 0 quand } n}$

Interprètation : $\boxed{\text{La probabilité que le point échappe à l'oroigine est nulle, à long terme.}}$

EXERCICE 2: probabilités et simulation informatique

On considère une suite de lancers successifs (supposés indépendants) d'une pièce de monnaie, pour laquelle la probabilité d'apparition de pile , noté P, est p et celle de face, noté F, est q, avec $0 < p < 1$ et $p + q = 1$, et on s'intéresse à l'apparition de deux piles consécutifs.

Par exemple, si l'on considère les seize premiers lancers suivants :

F	P	P	F	P	P	P	F	P	F	P	P	P	P	P	F
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

deux piles consécutifs sont réalisés aux rangs 3, 6, 12 et 14, mais non aux rangs 7, 13 et 15 (car un pile ne peut pas participer à la réalisation de deux piles consécutifs plus d'une fois).
On notera, pour tout entier naturel n non nul :
• A_n l'événement : " deux piles consécutifs sont réalisés au rang n ".
• B_n l'événement: " deux piles consécutifs sont pour la première fois réalisés au rang n ".
Enfin on désigne par a_n et b_n les probabilités de ces événements A_n et B_n.

1. **Calcul des probabilités** a_n

a) On a bien sûr $a_1 = 0$.
$A_2 = P_1P_2$ et $a_2 = \mathrm{P}(P_1)\,\mathrm{P}(P_2) = p^2$ car les lancers sont indépendants.
$A_3 = F_1P_2P_3$ car il faut P_2P_3 et pas de pile en 1, sinon, on a deux piles de suite en P_1P_2
D'où $a_3 = qp^2$
$A_4 = (F_1F_2 \cup P_1P_2 \cup P_1F_2) \cap P_3P_4$ en listant tous les cas possibles.
C'est une réunion d'incompatibles donc $a_4 = (q^2 + p^2 + pq)\,p^2$
et en remarquant que $1 = (p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$ on peut le réécrire : $a_4 = (1 - pq)\,p$
Conclusion : $\boxed{a_2 = p^2 : a_3 = qp^2 : a_4 = (q^2 + p^2 + pq)\,p^2}$

b) On décompose l'événement A_{n+2}
Il doit se finir par $P_{n+1}P_{n+2}$ et on regarde ce qui peut les précéder :
Soit il y avait F_n, soit il y avait P_n, mais alors dans un bloc A_n. (sinon, P_{n+1} donnerait les deux piles de suite)
$A_{n+2} = P_{n+1}P_{n+2} \cap (F_n \cup A_n)$ incdépendants donc
$a_{n+2} = \mathrm{P}(P_{n+1})\,\mathrm{P}(P_{n+2})\,\mathrm{P}(F_n \cup A_n)$ incompatibles
$a_{n+2} = p^2\left(\mathrm{P}(F_n) + \mathrm{P}(A_n)\right) = p^2(q + a_n)$
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout nombre entier naturel } n \text{ non nul : } \quad a_{n+2} = p^2 a_n + qp^2.}$

c) On pose, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = a_n - c$ où c vérifie $c = p^2c + qp^2$.
* On calcule u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= a_{n+2} - c \\
&= p^2 a_n + qp^2 - \left(p^2 c + qp^2\right) \\
&= p^2(a_n - c) \\
&= p^2 u_n
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{u_{n+2} = p^2 u_n \text{ et } (u_n) \text{ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.}}$
* Son équation caractéristique est $r^2 - p^2 = 0$ de racines $\pm p$
Donc pour tout entier n, $u_n = \alpha p^n + \beta(-p)^n$ avec α et β qui sont les solutions de :

$$(1) \left\{\begin{array}{l} u_1 = \alpha p - \beta p \\ u_2 = \alpha p^2 + \beta p^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} -c = \alpha p - \beta p & \\ p^2 - c = \alpha p^2 + \beta p^2 & L_2 + pL_1 \end{array}\right. ,$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} -c = \alpha p - \beta p \\ p^2 - c - pc = 2\alpha p^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \beta = \frac{1}{p}(c + \alpha p) \\ \alpha = \frac{1}{2p^2}(p^2 - c - pc) \end{array}\right.$$

on arrange avec $c = p^2c + qp^2 \iff c = \frac{qp^2}{(1-p^2)} = \frac{qp^2}{(1-p)(1+p)} = \frac{p^2}{(1+p)}$ donc
$p^2 - c - pc = p^2 - \frac{p^2}{1+p} - \frac{p^3}{(1+p)} = 0$ donc

$$(1) \iff \left\{ \begin{array}{c} \beta = \frac{1}{p}\frac{p^2}{(1+p)} = \frac{p}{1+p} \\ \alpha = 0 \end{array} \right.$$

Finalement, pour tout entier n : $u_n = \frac{p}{1+p}(-p)^n$ et $a_n = u_n + c = \frac{p}{1+p}(-p)^n + \frac{p^2}{1+p}$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n = \frac{p}{1+p}(p + (-p)^n)}$

Remarque :

Comme a_n est donné, il peut être plus rapide de tester directement si $a_n = \frac{p}{1+p}(p + (-p)^n)$ est la solution de $a_{n+2} = p^2 a_n + qp^2$:

Récurrence à deux termes, donc hypothèse sur deux termes successifs :

- $a_1 = 0$ et $\frac{p}{1+p}\left(p + (-p)^1\right) = 0$ d'où égalité
  $a_2 = p^2$ et $\frac{p}{1+p}\left(p + (-p)^2\right) = \frac{p}{1+p}(p + p^2) = p^2$ d'où égalité.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = \frac{p}{1+p}(p + (-p)^n)$ et $a_{n+1} = \frac{p}{1+p}\left(p + (-p)^{n+1}\right)$ alors
  $a_{n+1} = \dots$ par hypothèse de récurrence et

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= p^2 a_n + qp^2 = p^2 \frac{p}{1+p}(p + (-p)^n) + (1-p)p^2 \\ &= \frac{p^2}{1+p}[p(p + (-p)^n) + (1-p)(1+p)] \\ &= \frac{p^2}{1+p}\left[p^2 + p(-p)^n + 1 - p^2\right] \\ &= \frac{p}{1+p}\left[p^2(-p)^n + p\right] \text{ et } p^2 = (-p)^2 \text{ donc} \\ &= \frac{p}{1+p}\left[(-p)^{n+2} + p\right] \end{aligned}$$

- Donc la prorpiété est vraie pour tout entier n.

Au final, la rédaction est toute aussi longue.

2. **Nombre moyen de réalisations de deux piles consécutifs en n lancers**

Pour tout entier naturel n non nul , on note X_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque l'événement A_n est réalisé, et 0 sinon.

a) On a X_n suit une loi de Bernouilli de paramètre $\mathrm{P}(X_n = 1) = \mathrm{P}(A_n) = a_n$ donc

Conclusion : $\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(a_n) \text{ et } E(X_n) = a_n}$

b) Quand A_n est réalisé, A_{n+1} ne peut pas l'être, car P_n ne peut pas reservir pour réalisé le deouble pile $P_n P_{n+1}$.

Donc Si $X_n = 1$ alors $X_n = 0$. Et si $X_n = 0$ le produit est également nul.

Conclusion : $\boxed{X_n X_{n+l} = 0}$

c) $X_n X_{n+2}$ prend les valeurs 0 et 1. Il ne vaut 1 que si les deux variables prennent cette valeur.

$(X_n = 1) \cap (X_{n+2} = 1) = (X_n = 1) \cap (P_{n+1} P_{n+2})$ ca rle P_{n+1} n'entre pas dans le double pécédent.

et comme les tirages $(n-1, n)$ et $(n+1, n+2)$ sont indépendants,

$\mathrm{P}[(X_n = 1) \cap (X_{n+2} = 1)] = \mathrm{P}(X_n = 1)p^2 = p^2 a_n$

Conclusion : $\boxed{X_n X_{n+2}. \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2 a_n)}$

d) **Interprètation :**

quand $X_n = 1$, on a eu un doublé $P_{n-1}P_n$ donc il n'y aura pas de doublé entre P_n et P_{n+1}.
On se retrouve donc dans la situtation initiale avec un décalage de n lancers.
La loi de la variable aléatoire X_{n+k} conditionnée par l'événement $X_n = 1$, est donc la même que celle de X_k

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}_{X_n=1}\left(X_{n+k}=1\right) = a_k \text{ et } \mathrm{P}_{X_n=1}\left(X_{n+k}=0\right) = 1 - a_k}$

e) Interprètation classique : somme de variables de Bernouilli.
X_k est le nombre de doublé (0 ou 1) pour le lancer k.
$X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ est le nombre total de doublés en n lancers.
Le nombre moyen m_n de réalisations de deux piles consécutifs parmi n lancers est donc

$$\begin{aligned} m_n &= E\left(X_1 + \cdots + X_n\right) \\ &= E\left(X_1\right) + \cdots + E\left(X_n\right) \\ &= a_1 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Reste à trouver un équivalent simple de cette somme.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{p}{1+p} \sum_{k=1}^{n} \left(p + (-p)^k\right) \\ &= \frac{p}{1+p} \left[\sum_{k=1}^{n} p + \sum_{k=1}^{n} (-p)^k\right] \\ &= \frac{p}{1+p} \left[np + \frac{1+(-p)^{n+1}}{1-p}\right] \quad \text{et } np \text{ prépondérant dans } [] \\ &= \frac{np^2}{1+p} \left[1 + \frac{1+(-p)^{n+1}}{(1-p)\,np}\right] \end{aligned}$$

et comme $\frac{1+(-p)^{n+1}}{1-p} \to 1$ alors $[] \to 1$ et $\sum_{k=1}^{n} a_k \sim \frac{np^2}{1+p}$

Conclusion : $\boxed{m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{np^2}{1+p}}$

3. **Calcul récursif des probabilités** b_n

a) Quand A_n est réalisé, le premier doublé est réalisé au plus tard au $n^{\text{ème}}$ lancer.
Donc $A_n = A_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \left(A_n \cap B_k\right)$
et comme les (B_k) sont incompatibles (le premier n'arrive qu'une seule fois)

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}\left(A_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(A_n \cap B_k\right) .}$

b) Soit k un nombre entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.
Tout d'abbord, $\mathrm{P}_{B_k}\left(A_k\right) = 1$ car on a un (le premier) doublé en k.
Et pour $n > k$, $\mathrm{P}_{B_k}\left(A_n\right) = a_{n-k}$ car on a eu un doublé $P_{k-1}P_k$ donc on se retrouve dans la situation initialle avec k tirages de décalage.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}_{B_k}\left(A_k\right) = 1 \text{ et pour } n > k : \mathrm{P}_{B_k}\left(A_n\right) = a_{n-k}}$

c) On reprend la formule

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_n \cap B_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(B_k)\,\mathrm{P}_{B_k}(A_n) \\
&= \mathrm{P}(B_n)\,\mathrm{P}_{B_n}(A_n) + \sum_{k=1}^{n-1} b_n a_{n-k} \\
&= b_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k a_{n-k}
\end{aligned}$$

On a ainsi (avec $b_1 = 0$ et $a_1 = 0$)

- $a_2 = b_2 + \sum_{k=1}^{1} b_k a_{2-k} = b_2 + b_1 a_1 = b_2$
  Donc $b_2 = p^2$
- $a_3 = b_3 + \sum_{k=1}^{2} b_k a_{3-k} = b_3 + b_1 a_2 + b_2 a_1$
  Donc $b_3 = a_3 - b_1 a_2 - b_2 a_1 = a_3 = qp^2$
- $a_4 = b_4 + \sum_{k=1}^{3} b_k a_{4-k} = b_4 + b_1 a_3 + b_2 a_2 + b_3 a_1$
  Donc $b_4 = a_4 - b_1 a_3 - b_2 a_2 - b_3 a_1 = qp^2 - 0 - p^4 = p^2\left(q - p^2\right)$
- $a_5 = b_5 + \sum_{k=1}^{3} b_k a_{5-k} = b_5 + b_1 a_4 + b_2 a_3 + b_3 a_2 + b_4 a_1$
  Donc $b_5 = a_5 - b_2 a_3 - b_3 a_2$
  et on se souvient que $a_{n+2} = p^2 a_n + qp^2$ donc $a_5 = p^2 a_3 + qp^2 = p^4 q + qp^2 = qp^2\left(1 + p^2\right)$
  et $b_5 = p^4 q + qp^2 - p^2 qp^2 - qp^2 p^2 = qp^2 - qp^4 = qp^2\left(1 - p^2\right)$

Conclusion : $\boxed{b_2 = p^2 : b_3 = qp^2 : b_4 = p^2\left(q - p^2\right) : b_5 = qp^2\left(1 - p^2\right)}$

4. • **Simulation informatique dans le cas particulier** $p = 2/3$
   On peut alors établir à l'aide de la formule précédente (ce qu'on ne demande pas de faire) que

$$\forall n \geqslant 1 \qquad b_n = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

N.B. la donnée de ce résultat permet de vérifier la cohérence avec les calculs prépcédents :

on avait : $b_5 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = \frac{20}{3^5}$

et la formule donne : $b_5 = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4 - \left(-\frac{1}{3}\right)^4\right] = \frac{20}{3^5}$

a) T associant à toute suite de lancers successifs le numéro du jet où l'on obtient pour la première fois un double pile est une variable aléatoire si la probabilité que T ne soit pas définie est nulle. (elle doit être définie presque surmement) ou encore si la somme des termes de la loi vaut 1.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{M} \mathrm{P}(T=n) &= \sum_{n=1}^{M} \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] \\
&= \frac{4}{9}\left[\sum_{n=1}^{M}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{M}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] \\
&= \frac{4}{9}\left[\sum_{k=1}^{M-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}-\sum_{k=1}^{M-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right] \\
&\underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{9}\left[\frac{1}{1-\frac{2}{3}}-\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right]=\frac{4}{9}\frac{9}{4}=1
\end{aligned}$$

car $\left|\frac{2}{3}\right|<1$ et $\left|-\frac{1}{3}\right|<1$.

Conclusion : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{P}(T=n)=1 \text{ et } T \text{ est bien une variable aléatoire}}$

b) T a une espérance si $\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathrm{P}(T=n)$ est absolument convergente.
et comme les termes sont tous positifs, celà équivaut à la convergence simple.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{M} n\mathrm{P}(T=n) &= \sum_{n=1}^{M} n\frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] \\
&= \frac{4}{9}\left[\sum_{n=1}^{M} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{M} n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] \\
&= \frac{4}{9}\left[\sum_{n=1}^{M} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{M} n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] \\
&\underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{9}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}\right]=\frac{15}{4}
\end{aligned}$$

car $\left|\frac{2}{3}\right|<1$ et $\left|-\frac{1}{3}\right|<1$.
Doinc la série est absolument convergente et T a une espérance.
L'espérance de T est alors la somme (simple) de la série

Conclusion : $\boxed{T \text{ a une espérance et } E(T)=\frac{15}{4}}$

c) Le programme **Pascal** suivant dans lequel on code Pile par 1 et Face par 0 fournit (dans le cas p=2/3) une simulation de l'expérience aléatoire précédente.
On signale de plus que :
- `random(3)` fournit un nombre entier aléatoire parmi 0, 1, 2.
- les lignes d'instruction notées ++++++ sont volontairement incomplètes.

i. On considère l'instruction `y:=lancer;` dans

```
function lancer : integer;
var z : integer;
begin
if random(3)=0 then z:=0
 else z:=1;
lancer:=z;
end;
```

`lancer=1` si `random(3)` ne vaut pas 0.
Or les valeurs 0, 1 et 2 sont équiprobables.

Conclusion : $\boxed{\text{y contient 1 avec une probabilité de } \frac{2}{3}}$

```
function attente:integer;
  var x,y,k:integer;
begin
  x:=lancer;  y:=lancer;  k:=2;
  while x*y=0 do
   begin
   ++++++
   ++++++
   ++++++;
   end;
  attente:  = k;
end;
```

ii. On affecte à `x` le résultat 1 si pile au lancer précédent et à `y` 1 pour pile au lancer présent (0 sinon)
On aura un double pile si ni `x` ni `y` ne sont nuls : si le produit `x*y` n'est pas nul.
`k` lui comptera le nombre de lancers

```
function attente:integer;
  var x,y,k:integer;
begin
  x:=lancer;  y:=lancer;  k:=2;
  while x*y=0 do
   begin
  x:=y;
  y:=lancer;
  k:=k+1;
   end;
  attente:  = k;
end;
```

iii. Pour calculer la moyenne, il faut calculer l'attente totale (`m:=m+attente`)
puis la diviser par le nombre `n` d'essais (`m:   =m / n`)
 e nombre total de lancer (Compléter la boucle `for` du programme principal de façon que le programme `ESSEC2002` affiche la moyenne du rang d'apparition du premier double pile sur n expériences, le nombre entier naturel non nul n étant fourni par l'utilisateur.

```
begin
  randomize;
  write('Nombre de simulations ?');
  readln(n);
  m:=0;
  for k:=l to n do m:=m+attente;
  m:  =m / n;
  write('Moyenne :  '  ,m:0:2);
End.
```

Pour de grandes valeurs de n, autour de quelle valeur fluctue le contenu de la variable `m` ?

iv. Pour attendre un triple pile, il faut se souvenir des 2 lancers précédents.
D'où l'utilisation d'une troisième variable.
`x` pour le rang $n-2$
`y` pour le rang $n-1$

`z` pour le rang n

```
function attente:integer;
  var x,y,z,k:integer;
begin
 x:=lancer;  y:=lancer; z:=lancer;  k:=3;
 while x*y*z=0 do
   begin
         x:=y;
         y:=z;
         z:=lancer;
         k:=k+1;
  end;
 attente:  = k;
end;
```