Epreuve maths 3 voie économique

oindent **EXERCICE 1 : algèbre linéaire et probabilités**

Dans cet exercice, on désigne par p un nombre entier naturel non nul et par $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à p.

1. **Étude d'un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}_p[X]$**

   a) On associe à toute fonction polynôme P la fonction $\widehat{P}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\widehat{P}(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt \quad \text{si } x \neq 1 \qquad \text{et} \quad \widehat{P}(1) = P(1)$$

   • Montrer que la fonction $x \to \displaystyle\int_1^x P(t)dt$ est une fonction polynôme admettant 1 pour racine.
   • Montrer que la fonction $\widehat{P}$ est une fonction polynôme de même degré que P lorsque $P \neq 0$.

   b) On considère l'application ϕ associant à toute fonction polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_p[X]$ la fonction polynôme $\widehat{P}$ définie ci-dessus.
   Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$. Est-il injectif ? surjectif ?

   c) Déterminer les images par ϕ des fonctions polynômes $e_k : x \to x^k$ pour $0 \leqslant k \leqslant p$, puis en déduire la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$.

   d) Quelles sont les valeurs propres de ϕ ? ϕ est-il diagonalisable ?

2. **Étude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ**

   a) Déterminer les fonctions propres de ϕ associée à la valeur propre 1.

   b) On considère une valeur propre λ de ϕ et une fonction polynôme propre associée P.
   Montrer que, pour tout nombre réel x :

   $$(1-\lambda)P(x) = \lambda(x-1)P'(x)$$

   En déduire, si $\lambda \neq 1$, que 1 est nécessairement racine de P.

   c) Déterminer les images par ϕ des fonctions polynômes $P_k : x \to (x-1)^k$ pour $0 \leqslant k \leqslant p$ et montrer que $(P_0, P_l, \ldots, P_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

   d) On considère une fonction polynôme P exprimée comme suit dans la base précédente :

   $$P = a_0P_0 + a_1P_1 + \ldots + a_pP_p$$

   Montrer que $a_0 = P(1)$, calculer $\Phi_1 = \phi(P)$, $\Phi_2 = (\phi \circ \phi)(P)$ puis $\Phi_n = \phi^n(P)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer pour tout nombre réel x la limite de $\Phi_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$ et en déduire en particulier que, si $P(x) = x^p$, la limite de $\Phi_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$ est égale à 1.

3. **Application à une marche aléatoire**
   Un individu se déplace sur les points d'abscisse 0, 1, 2, p selon les règles suivantes :
   • il est au point d'abscisse p à l'instant 0.
   • il est au point d'abscisse k ($0 \leqslant k \leqslant p$) à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), il est de façon équiprobable en l'un des $k+1$ points d'abscisses $0, 1, \ldots, k$ à l'instant $n+1$.

   Pour tout nombre entier naturel n, on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant l'abscisse du point où se trouve l'individu à l'instant n et par $E(X_n)$, son espérance.

a) Exprimer à l'aide du théorème des probabilités totales la probabilité $P(X_{n+1} = k)$ où $0 \leqslant k \leqslant p$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $\dots P(X_n = p)$.

b) En déduire une matrice carrée M telle que $U_{n+1} = MU_n$ où U_n désigne la matrice-colonne dont les éléments sont du haut vers le bas $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $\dots P(X_n = p)$.

c) Exprimer le produit matriciel $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} M$ en fonction de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix}$. En multipliant l'égalité $U_{n+1} = M.U_n$ à gauche par la matrice-ligne $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix}$, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$ puis préciser $E(X_n)$ en fonction de n ainsi que sa limite.

d) Préciser U_0, puis donner U_n en fonction de M et de n.
En déduire, à l'aide de la question 2.d que les $p+1$ composantes de U_n ont pour limites (de haut en bas) 1, 0, 0, ... , 0 quand n tend vers $+\infty$ puis interpréter ce résultat.

EXERCICE 2 : probabilités et simulation informatique

On considère une suite de lancers successifs (supposés indépendants) d'une pièce de monnaie, pour laquelle la probabilité d'apparition de pile , noté P, est p et celle de face, noté F, est q, avec $0 < p < 1$ et $p + q = 1$, et on s'intéresse à l'apparition de deux piles consécutifs.
Par exemple, si l'on considère les seize premiers lancers suivants :

F	P	P	F	P	P	P	F	P	F	P	P	P	P	P	F
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

deux piles consécutifs sont réalisés aux rangs 3, 6, 12 et 14, mais non aux rangs 7, 13 et 15 (car un pile ne peut pas participer à la réalisation de deux piles consécutifs plus d'une fois).
On notera, pour tout entier naturel n non nul :
• A_n l'événement : " deux piles consécutifs sont réalisés au rang n ".
• B_n l'événement : " deux piles consécutifs sont pour la première fois réalisés au rang n ".
Enfin on désigne par a_n et b_n les probabilités de ces événements A_n et B_n.

1. **Calcul des probabilités a_n**

   a) On a bien sûr $a_1 = 0$. Calculer de plus a_2, a_3 , a_4.

   b) Démontrer, pour tout nombre entier naturel n non nul : $a_{n+2} = p^2 a_n + qp^2$.

   c) On pose, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = a_n - c$ où c vérifie $c = p^2 c + qp^2$.
   * Démontrer que (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   * En déduire, pour tout nombre entier naturel n : $a_n = \dfrac{p}{1+p}\,(p + (-p)^n)$.

2. **Nombre moyen de réalisations de deux piles consécutifs en n lancers**
   Pour tout entier naturel n non nul , on note X_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque l'événement A_n est réalisé, et 0 sinon.

   a) Préciser la loi de X_n et son espérance.

   b) Que peut-on dire de la variable aléatoire $X_n X_{n+l}$?

   c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_n X_{n+2}$.

   d) Déterminer pour tout nombre entier $k \geqslant 1$ la loi de la variable aléatoire X_{n+k} conditionnée par l'événement $X_n = 1$, c'est à dire les probabilités $P(X_{n+k} = 0 / X_n = 1)$ et $P(X_{n+k} = 1 / X_n = 1)$.

e) Interpréter la variable aléatoire $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
Donner un équivalent du nombre moyen m_n de réalisations de deux piles consécutifs parmi n lancers lorsque n tend vers $+\infty$.

3. **Calcul récursif des probabilités** b_n

a) Justifier l'égalité : $P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_n \cap B_k)$.

b) Soit k un nombre entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. Que vaut $P(A_n/B_k)$?

c) En déduire la formule suivante pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$a_n = b_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k a_{n-k}$$

(et ce dernier "sigma" est supposé nul pour n = 1). Calculer ainsi b_2, b_3, b_4, b_5 .

4. **Simulation informatique dans le cas particulier** $p = 2/3$
On peut alors établir à l'aide de la formule précédente (ce qu'on ne demande pas de faire) que

$$\forall n \geqslant 1 \qquad b_n = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

a) Montrer que l'application T associant à toute suite de lancers successifs le numéro du jet où l'on obtient pour la première fois un double pile est une variable aléatoire.

b) Déterminer l'espérance $E(T)$ de cette variable aléatoire T.

c) Le programme **Pascal** suivant dans lequel on code Pile par 1 et Face par 0 fournit (dans le cas p=2/3) une simulation de l'expérience aléatoire précédente.
On signale de plus que :
• `random(3)` fournit un nombre entier aléatoire parmi 0, 1, 2.
• les lignes d'instruction notées ++++++ sont volontairement incomplètes.

```
program ESSEC2002 ;
var n,k : integer ; m :real ;
function lancer : integer ;
var z : integer ;
begin
if random(3)=0 then z :=0
 else z :=1 ;
lancer :=z ;
end ;
function attente :integer ;
  var x,y,k :integer ;
  begin
  x :=lancer ;  y :=lancer ;  k :=2 ;
  while x*y=0 do
   begin
   ++++++
   ++++++
   ++++++ ;
```

```
    end ;
  attente : = k ;
  end ;
begin
  randomize ;
  write('Nombre de simulations ?') ;
  readln(n) ;
  m :=0 ;
  for k :=1 to n do +++++++ ;  m :=m/n ;
  write('Moyenne : ' ,m :0 :2) ;
End.
```

i. On considère l'instruction `y :=lancer ;`
Quelle est la probabilité que la variable `y` contienne 1 ?

ii. Compléter la boucle `while` de la fonction `attente` de façon que cette fonction retourne le rang d'apparition du premier double pile.

iii. Compléter la boucle `for` du programme principal de façon que le programme `ESSEC2002` affiche la moyenne du rang d'apparition du premier double pile sur n expériences, le nombre entier naturel non nul n étant fourni par 1'utilisateur.
Pour de grandes valeurs de n, autour de quelle valeur fluctue le contenu de la variable `m` ?

iv. Réécrire la fonction `attente` pour que le programme `ESSEC2002` affiche la moyenne du rang d'apparition du premier triple pile.