Définitions et notations

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.
φ est la fonction définie sur $]0,1]$ par $x \mapsto \varphi(x) = -\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.
Pour un événement A de probabilité non nulle, on pose $i(A) = \varphi(P(A))$.
h est la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$h(0) = 0 \qquad \text{et pour } x \in]0,1], \quad h(x) = -x\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

Pour une variable aléatoire X discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs réelles, on pose sous réserve d'existence :

$$H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X = x))$$

Si X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, alors $H(X)$ existe et, en notant $p_k = P(X = x_k)$, on a :

$$H(X) = \sum_{k=1}^{n} h(P(X = x_k)) = \sum_{k=1}^{n} h(p_k)$$

Remarque : En théorie de l'information, $i(A)$ *est appelé* incertitude de l'événement A *et* $H(X)$ *est l'*incertitude moyenne - *ou* entropie - *de* X.

Partie I : Incertitude des événements

1. On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

   Soit A l'événement " la carte tirée est la dame de cœur ".

   Les 32 cartes sont équiprobables donc $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{32} = 1/2^5 \neq 0$ et $i(A) = -\ln(1/2^5)/\ln(2) = 5$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^{\times}$. On lance n fois une pièce équilibrée.

   A est l'événement " obtenir n fois PILE ".

   Le nombre de Piles en n lancers indépendants suit une li binômiales de paramètres $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$

   Donc $\mathrm{P}(A) = 1/2^n \neq 0$ et $i(A) = -\ln(1/2^n)/\ln(2) = n$

3. Vérifier les points suivants :

   (i) Si Ω' est quasi-certain alors $\mathrm{P}(\Omega') = 1$ et $i(\Omega') = -\ln(1)/\ln(2) = 0$

   (ii) Si A et l'événement contraire $\overline{A}$ sont équiprobables, $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$ et $i(A) = -\ln(1/2)/\ln(2) = 1$.

   (iii) Si A et B sont indépendants pour la probabilité P et si $P(A \cap B) \neq 0$, alors $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$ et (A et B de proba on nulle donc i est définie)

$$\begin{aligned} i(A \cap B) &= -\ln(\mathrm{P}(A \cap B))/\ln(2) \\ &= -\ln(\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B))/\ln(2) \\ &= -\ln(\mathrm{P}(A))/\ln(2) - \ln(\mathrm{P}(B))/\ln(2) \\ &= i(A) + i(B) \end{aligned}$$

4. On a alors par récurrence, quand les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants et $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$

   $i(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \sum_{k=1}^{n} i\left(A\right)$

   Dans la question 2. l'événement A s'écrit $A = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n$ (avec pour tout k : $P_k =$"Pile au $k$ième")

   Les lancers étant indépendants et $\mathrm{P}\left(P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n\right) \neq 0$ alors

   $i\left(A\right) = \sum_{k=1}^{n} i\left(P_k\right)$ et comme P_k et $\overline{P_k}$ étant équiprobables, $i\left(P_k\right) = 1$ et $i\left(A\right) = n$

5. Soit A et B deux événements tels que $A \subset B$ et $P(A) \neq 0$ donc $\mathrm{P}\left(B\right) \neq 0$ car $\mathrm{P}\left(B\right) \geq \mathrm{P}\left(A\right)$ et $\ln\left(\mathrm{P}\left(B\right)\right) \geq \ln\left(\mathrm{P}\left(A\right)\right)$ et $-\ln\left(\mathrm{P}\left(B\right)\right)/\ln\left(2\right) \leq -\ln\left(\mathrm{P}\left(A\right)\right)/\ln\left(2\right)$ car $\ln\left(2\right) > 0$

   Donc si $A \subset B$ et $P(A) \neq 0$ alors $i(A) \geq i(B)$.

6. $\varphi(x) = -\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)} \to +\infty$ quand $x \to 0$ donc quand la probabilité de l'événement est faible, son incertitude est grande.

   (cohérent avec la signification française de "incertitude")

Partie II : Incertitude d'une variable aléatoire discrète

1. Soit $n \in \mathbb{N}^{\times}$. Si U_n suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$,

   On a alors pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $\mathrm{P}\left(U_n = k\right) = 1/n$ et donc

   Donc $h\left(\mathrm{P}\left(U_n = k\right)\right) = h\left(1/n\right) = \dfrac{\ln\left(n\right)}{n\ln\left(2\right)}$ et

   $$H\left(U_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(n\right)}{n\ln\left(2\right)} = \frac{\ln\left(n\right)}{\ln\left(2\right)}$$

2. Si on suppose $P(Z = 1) = 1/4, P(Z = 2) = 1/4$ et $P(Z = 3) = 1/2$.

   Comme $\mathrm{P}\left(Z = 1\right) + \mathrm{P}\left(Z = 2\right) + \mathrm{P}\left(Z = 3\right) = 1$, la probabilité que Z prenne une autre valeur est nulle.

   Donc $H\left(Z\right) = h\left(\frac{1}{4}\right) + h\left(\frac{1}{4}\right) + h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\frac{\ln(4)}{\ln(2)} + \frac{1}{4}\frac{\ln(4)}{\ln(2)} + \frac{1}{2}\frac{\ln(2)}{\ln(2)}$ et comme $4 = 2^2$ alors $\ln\left(4\right) = 2\ln\left(2\right)$ et

   $H\left(Z\right) = \frac{3}{2}$

   à comparer avec $H\left(U_3\right) = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$:

   $$\begin{aligned} \frac{3}{2} - \frac{\ln\left(3\right)}{\ln\left(2\right)} &= \frac{3\ln\left(2\right) - 2\ln\left(3\right)}{2\ln\left(2\right)} \\ &= \frac{\ln\left(2^3\right) - \ln\left(3^2\right)}{2\ln\left(2\right)} \\ &= \frac{\ln\left(8\right) - \ln\left(9\right)}{2\ln\left(2\right)} \leq 0 \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{H(Z) \leq H(U_3)}$

3. On se propose de simuler informatiquement une variable aléatoire.

   On supposera que **random(3)** fournit au hasard un nombre élément de $\{1, 2, 3\}$ et que **random(2)** fournit au hasard un élément de $\{1, 2\}$

```
program ESSEC 2003
var
 ini,y : integer;
begin
 ini:=random(3);
 if ini=3 then y:=random(2) else y:=3 ;
end.
```

`ini` peut prendre les valeurs 1, 2 ou 3

Si `ini` prend la valeur 3 (probabilité 1/3) alors Y prend les valeurs (`random(2)`) 1 ou 2 de façon équiprobable donc avec la probabilité $\frac{1}{6}$

et sinon Y prend la valeur 3 avec une probabilité $\frac{2}{3}$ et la loi de Y est donnée par :

k	1	2	3	
$\mathrm{P}(Y=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	
$k\mathrm{P}(Y=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{12}{6}$	$E(Y)=\frac{5}{2}$

On a alors $H(Y)=h\left(\frac{1}{6}\right)+h\left(\frac{1}{6}\right)+h\left(\frac{2}{3}\right)=2\frac{1}{6}\frac{\ln(6)}{\ln(2)}-\frac{2}{3}\frac{\ln(2/3)}{\ln(2)}$ et avec $6=2\cdot 3$ on a alors

$H(Y)=\frac{1}{3\ln(2)}\left[\ln(2)+\ln(3)-2\ln(2)+2\ln(3)\right]=-\frac{1}{3}+\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$

Conclusion : $\boxed{H(Y)=\frac{\ln(3)}{\ln(2)}-\frac{1}{3} \text{ et } E(Y)=\frac{5}{2}}$

4. On a : $h(0)=0$ et pour $x\in]0,1]$, $h(x)=-x\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$

Donc h est continue sur $]0,1]$

en 0 : $x\ln(x)\to 0$ quand $x\to 0$ (on peut le réécrire $\frac{\ln(x)}{1/x}$ avec $\ln(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$) donc $h(x)\to 0=h(0)$ quand $x\to 0$ et h est continue en 0

Donc est continue sur $[0,1]$.

Pour tout $0<x\leq 1$ on a $\ln(x)\leq \ln(1)$ donc $-x\ln(x)\geq 0$ et donc h est positive sur $]0,1]$ et en 0

Conclusion : $\boxed{h \text{ est continue et positive sur } [0,1]}$

Dérivabilité en 0 :

On calcule le taux d'acroissement pour $x>0$

$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=-\frac{\ln(x)}{\ln 2}\to+\infty$$

Conclusion : $\boxed{h \text{ n'est pas dérivable en 0, mais sa courbe représentative y admet une tangente verticale.}}$

h est dérivable sur $]0,1]$ et $h'(x)=-\frac{1}{\ln(2)}\left[\ln(x)+1\right]$

x	0		e^{-1}		1
$\ln(x)+1$		$-\nearrow$	0	$\nearrow+$	
$h'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$-1/\ln(2)$
$h(x)$	0	$\nearrow$	$e^{-1}/\ln(2)$	$\searrow$	0

Pour sa courbe représentative, on place la tangente verticale à l'origine, la tangente horizontale en $e^{-1}\simeq 0.3$ mais pour avoir une valeur approchée de $e^{-1}/\ln(2)$ ou de $-1/\ln(2)$, sans calculatrice, on est bien en peine ....

5. D'après ses variations, h est positive ou nulle sur $[0,1]$ et $H(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} h(\mathrm{P}(X = x_k)) \geq 0$

Comme Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini.

D'autre part, si la soimme de termes positifs est nulle, c'est que tous les termes le sont.

or h ne s'annule qu'en 0 et en 1.

Donc **si** $H(X) = 0$ **alors** les seules valeurs de $\mathrm{P}(X = x_k)$ sont 0 et 1.

Comme pour un des x_k on a $\mathrm{P}(X = x_k) \neq 0$ alors pour cette valeur, $\mathrm{P}(X = x_k) = 1$ et la probabilité est nulle pour toutes les autres valeurs.

Donc $X = x_k$ quasi certainement.

Partie III Maximalité de l'entropie

1. *Etude pour* $n = 2$.

Pour $x \in [0,1]$, on pose $h_2(x) = h(x) + h(1-x)$.

a) Pour $x \in [0,1]$, on a clairement $h_2(x) = h_2(1-x)$.
On devine une symétrie et on cherche a tel que $h_2(a+t) = h_2(a-t)$ ce qui est vérifié pour $a = \frac{1}{2}$.
On a pour tout $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$: $h_2\left(\frac{1}{2}+t\right) = h_2\left(\frac{1}{2}-t\right)$ et la

Conclusion : $\boxed{\text{la courbe représentative de } h \text{ est symétrique par rapport à l'axe } x = \frac{1}{2}}$

b) h_2 est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ (pour $x \neq 0$ et $1-x \neq 0$ dans $[0,1]$) et

$$\begin{aligned} h_2'(x) &= h'(x) - h'(1-x) \\ &= -\frac{1}{\ln(2)}[\ln(x) + 1 - [\ln(1-x) + 1]] \\ &= -\frac{1}{\ln(2)}[\ln(x) - \ln(1-x)] \end{aligned}$$

On résout alors

$$\begin{aligned} \ln(x) - \ln(1-x) > 0 &\iff \ln(x) > \ln(1-x) \\ &\iff x > 1-x \\ &\iff x > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et de même $\ln(x) - \ln(1-x) < 0 \iff x < \frac{1}{2}$ et $\ln(x) - \ln(1-x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$\ln(x) - \ln(1-x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$
$h'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
$h(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

avec $h_2\left(\frac{1}{2}\right) = 2h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

Dérivabilité : par le taux d'accroissement, on retrouve que la tangente à la courbe représentative de h_2 est verticale en 0 et en 1.

c) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
On a $\mathrm{P}(X = 1) = p$ et $\mathrm{P}(X = 0) = 1 - p$
Donc $H(X) = h(p) + h(1-p) = h_2(p)$ et d'après les variations de h_2,

Conclusion : $\boxed{H(X) = h_2(x) \leqslant 1 \text{ avec égalité si, et seulement si, } p = 1/2.}$

2. *Étude pour $n = 3$.*

a) Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des $(x, y) \in]0,1[^2$ vérifiant $1 - x - y > 0$ et h_3 la fonction définie sur $\mathcal{O}$ par :

$$h_3 : (x, y) \mapsto h(x) + h(y) + h(1 - x - y)$$

On admet que O est un ouvert.
h_3 est de classe C^1 en (x, y) tels que $x,\ y$ et $1 - x - y$ sont éléments de $]0, 1]$
Pour x et y positifs, $1 - x - y$ est inférieur à 1.
Donc h_3 est de classe C^1 sur $\mathcal{O}$
Donc si h_3 a un extremum local en (x, y) de l'ouvert $\mathcal{O}$ **alors** $\dfrac{\partial h_3}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\dfrac{\partial h_3}{\partial y}(x, y) = 0$
On les calcule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_3}{\partial x}(x, y) &= h'(x) - h'(1 - x - y) \\ &= -\frac{1}{\ln(2)}\left[\ln(x) - \ln(1 - x - y)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_3}{\partial y} &= h'(y) - h'(1 - x - y) \\ &= -\frac{1}{\ln(2)}\left[\ln(y) - \ln(1 - x - y)\right] \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} \dfrac{\partial h_3}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial h_3}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(x) - \ln(1 - x - y) = 0 \\ \ln(y) - \ln(1 - x - y) = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \ln(x) = \ln(1 - x - y) \\ \ln(y) = \ln(1 - x - y) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - x - y \\ y = 1 - x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ 3y = 1 \end{cases}$

Donc le seul extremum possible de h_3 sur l'ouvert $\mathcal{O}$ est en $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Conclusion : $\boxed{h_3 \text{ admet au plus un extremum sur } O \text{ et c'est alors en } \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right).}$

b) Comme la fonction ln est concave elle est sous ses tangentes.
En particulier en 1 :
La tangente a pour pente $\ln'(1) = 1$ et donc pour équation $y - \ln(1) = x - 1$
Donc

$$\text{pour tout } u > 0, \quad \ln(u) \leqslant u - 1 \tag{1}$$

► *Dans la suite, on pourra utiliser sans démonstration que* $\ln(u) = u - 1$ *si, et seulement si,* $u = 1$.

c) On ne peut pas utiliser ici la condition suffisant pour les extrema locaux puisqu'on ous demande un maximum global.
On démontre donc que $h_3(x, y) \leq h_3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ pour tout (x, y) de $\mathcal{O}$:
$h_3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = h(\frac{1}{3}) + h(\frac{1}{3}) + h(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = 3h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$
et

$$\begin{aligned} h_3(x, y) &= h(x) + h(y) + h(1 - x - y) \\ &= -\frac{1}{\ln(2)}\left(x\ln(x) + y\ln(y) + (1 - x - y)\ln(1 - x - y)\right) \end{aligned}$$

On suit alors l'indication :
$\ln\left(\frac{1}{3x}\right) \leq \frac{1}{3x} - 1$ donc $-\ln(3) - \ln(x) \leq \frac{1}{3x} - 1$ et $\ln(x) \geq -\ln(3) - \frac{1}{3x} + 1$
Donc $x\ln(x) \geq -x\ln(3) - \frac{1}{3} + x$
et de même $y\ln(y) \geq -y\ln(3) - \frac{1}{3} + y$
et $(1-x-y)\ln(1-x-y) \geq -(1-x-y)\ln(3) - \frac{1}{3} + (1-x-y)$
d'où, dans l'expression de $h_3(x,y)$: (en sommant les inégalité et en multipliant par $-\frac{1}{\ln(2)}$ < 0)

$$\begin{aligned} h_3(x,y) &\leq -\frac{1}{\ln(2)}\left(-x\ln(3) - \frac{1}{3} + x - y\ln(3) - \frac{1}{3} + y - (1-x-y)\ln(3) - \frac{1}{3} + (1-x-y)\right) \\ &\leq \frac{\ln(3)}{\ln(2)} = h_3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{h_3 \text{ admet un maximum global sur } \mathcal{O} \text{ en } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$

d) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_1, x_2, x_3\}$.
On suppose donc que la probabilité que X prenne chacunes de ces valeurs est non ulle. (sinon on est ramené au cas précédent)
En notant $x = \mathrm{P}(X = x_1)$, $y = \mathrm{P}(X = x_2)$ et donc $\mathrm{P}(X = x_3) = 1 - x - y$ (système complet d'événements) qui sont tous dans $]0,1[$, donc avec $(x,y) \in \mathcal{O}$ on a
$H(X) = h(x) + h(y) + h(1-x-y) = h_3(x,y)$
Donc $H(X) \leqslant \ln(3)/\ln(2)$ avec égalité si, et seulement si, $x = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{1}{3}$
Conclusion : $\boxed{H(X) \leqslant \ln(3)/\ln(2) \text{ avec égalité si, et seulement si } X \text{ est uniforme sur } \{x_1, x_2, x_3\}}$

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. On pose $p_k = P(X = x_k)$.

a) Dans cette question on suppose que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $p_k > 0$.
On a $H(X) = \sum_{k=1}^{n} h(p_k) = -\frac{1}{\ln(2)}\left[\sum_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k)\right]$
On a alors pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$d'après (1) $\ln\left(\dfrac{1}{np_k}\right) \leq \dfrac{1}{n \cdot p_k} - 1$
avec égalité stricte si et seulement si $\dfrac{1}{n \cdot p_k} = 1$ donc si $p_k = \dfrac{1}{n}$
d'où $-\ln(n) - \ln(p_k) \leq \dfrac{1}{np_k} - 1$ puis $\ln(p_k) \geq 1 - \dfrac{1}{n \cdot p_k} - \ln(n)$ et enfin :$p_k \ln(p_k) \geq \frac{1}{n} - p_k(1 + \ln(n))$
et en sommant les inégalités :
$\sum_{k=1}^{n} p_k \ln\left(\dfrac{1}{np_k}\right) \geq \sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{1}{n} - p_k(1+\ln(n))\right] = 1 - (1+\ln(n))\sum_{k=1}^{n} p_k$
avec égalité si et seulement si $p_k = \dfrac{1}{n}$ pour tout k, donc si X suit une loi uniforme
et comme $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ (loi de X) alors $\sum_{k=1}^{n} p_k \ln\left(\dfrac{1}{np_k}\right) \geq -\ln(n)$
En multipliant par $-\frac{1}{\ln(2)} < 0$ on a alors

Conclusion : $\boxed{H(X) \leq \dfrac{\ln(n)}{\ln(2)} \text{ avec égalité si, et seulement si, } X \text{ suit une loi uniforme}}$

b) En supprimant la condition " $p_k > 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ " , il faut comprendre qu'alors la somme définissant $H(X)$ ne porte plus que sur les p_k non nuls. Et on a alors avec n' le nombre de ces p_k, d'après la question a) $H(X) \leq \dfrac{\ln(n')}{\ln(2)} \leq \dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}$ l'égalité ne pouvant être vraie que si $n = n'$ et si X suit une loi uniforme sur ces n valeurs.
Donc le résultat du a) est encore valable.

4. Soit $p \in]0, 1[$ et G une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
On pose $m = E(G)$ et pour $k \in \mathbb{N}^\times$, $p_k = P(G = k)$.

a) On a $m = \frac{1}{p}$ et pour le calcul de H :

$$\begin{aligned}
h(\mathrm{P}(G = k)) &= h\left((1-p)^{k-1} p\right) \\
&= -p_k \frac{\ln\left((1-p)^{k-1} p\right)}{\ln(2)} \\
&= -\frac{p}{\ln(2)} \left[\ln(1-p) \cdot k \cdot p_k + \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) p_k\right]
\end{aligned}$$

et comme les séries de $k \cdot p_k$ et des p_k convergent alors $H(G) = \sum_{k=1}^{+\infty} h\left((1-p)^{k-1} p\right)$ converge également

$$\begin{aligned}
H(G) &= -\frac{p}{\ln(2)} \left[\ln(1-p) E(G) + \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) \cdot 1\right] \\
&= -\frac{p}{\ln(2)} \left[\frac{1}{p} \ln(1-p) + \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right]
\end{aligned}$$

b) Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^\times$, $E(X) = m$ et $H(X)$ existe.
Pour $k \in \mathbb{N}^\times$, on pose $q_k = P(X = k)$ et on supposera $q_k > 0$.
Pour utiliser (**??**) on s'inspire des utilisations précédentes : on avait à chaque fois à aplliquer cette inégalité sur le quotient des dex lois.
Avec $x = \dfrac{p_k}{q_k}$ on a $\ln\left(\dfrac{p_k}{q_k}\right) \leq \dfrac{p_k}{q_k} - 1$ donc $\ln(p_k) - \ln(q_k) \leq \dfrac{p_k}{q_k} - 1$ avec $p_k = (1-p)^{k-1} p$ on obtient
$(k-1)\ln(1-p) + \ln(p) - \ln(q_k) \leq \dfrac{p_k}{q_k} - 1$ et en multipliant enfin par $q_k > 0$ on a :

$$q_k \ln(p) + (k-1) q_k \ln(1-p) - q_k \ln(q_k) \leqslant p_k - q_k$$

donc

$$q_k \ln(p) + (k-1) q_k \ln(1-p) - p_k + q_k \leq q_k \ln(q_k)$$

On a pour tout k :

$$h(q_k) = -\frac{q_k \ln(q_k)}{\ln(2)} \leq -\frac{1}{\ln(2)} \left(q_k \ln(p) + (k-1) q_k \ln(1-p) - p_k + q_k\right)$$

On étudie la convergence de la série majorante :

En sommant les inégalités (la variable est k, p et $1-p$ sont des constantes, et $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} q_k = 1$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} kq_k = E(X) = m$)

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\ln(2)} \sum_{k=1}^{M} (q_k \ln(p) + (k-1)q_k \ln(1-p) - p_k + q_k) \\
= & -\frac{1}{\ln(2)} \left[\ln(p) \sum_{k=1}^{M} q_k + \ln(1-p) \sum_{k=1}^{M} kq_k - \ln(1-p) \sum_{k=1}^{M} q_k - \sum_{k=1}^{M} p_k + \sum_{k=1}^{M} q_k \right] \\
\to & -\frac{1}{\ln(2)} [\ln(p) + \ln(1-p)E(X) - \ln(1-p) - 1 + 1] \\
= & -\frac{1}{\ln(2)} \left[\ln(\frac{p}{1-p}) + \frac{1}{p}\ln(1-p) \right] = H(G)
\end{aligned}$$

Donc par majoration de séries à termes positifs, $H(X)$ converge est est majorée par $H(G)$
L'égalité dans (**??**) n'étant vraie que pour $\frac{p_k}{q_k} = 1$ pour tout k donc si X suit la même loi que G

Conclusion : $\boxed{H(X) \leqslant H(G) \text{ avec égalité si, et seulement si, } X \text{ suit la même loi que } G.}$

Partie IV : Incertitude d'une variable aléatoire continue

Pour une variable aléatoire X admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, on dit que X admet une *incertitude* quand l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h(f(x))dx$ converge.

Dans ce cas, la valeur de l'intégrale $H(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(f(x))dx$ est appelée *incertitude* de X.

1. *Cas des lois normales*

   a) Soit Y_0 une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

   On étudie la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(x))\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -\varphi(x) \frac{\ln(\varphi(x))}{\ln(2)} dx$

   $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ et $\ln(\varphi(x)) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{t^2}{2}$

   On sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ converge et vaut 1 (densité de variable aléatoire)

   et comme Y_0 a une variance, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)\,dx$ converge et vaut $E(Y_0^2) = V(Y_0) - E(Y_0)^2 = 1$

   Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(x))\,dx$ converge et

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(x))\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{\ln(2)} \left[-\frac{1}{2}\ln(2\pi)\varphi(x) - \frac{1}{2}x^2\varphi(x) \right] dx \\
&= \frac{\ln(2\pi)}{2\ln(2)} + \frac{1}{2\ln(2)} = \frac{\ln(2\pi)+1}{2\ln(2)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{H(Y_0) \text{ existe et vaut } \dfrac{\ln(2\pi)+1}{2\ln(2)}.}$

b) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma > 0$.
La densité de Y est alors donnée par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma}\varphi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$
et dans $\displaystyle\int_M^N h(f(x))\,dx = \int_M^N -\frac{\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)}{\ln(2)} \ln\left(\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\right) dx$ on effectue le changement de variable $t = u(x) = \dfrac{x-m}{\sigma}$ de classe C^1 sur $[M,N]$ et $h \circ f$ continue sur $u[N,M]$ et $u'(x) = \dfrac{1}{\sigma}$:

$$\begin{aligned}
\int_M^N h(f(x))\,dx &= -\frac{1}{\ln(2)}\int_M^N \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\ln\left(\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\right)dx \\
&= -\frac{1}{\ln(2)}\int_{u(M)}^{u(N)} \varphi(t)\ln\left(\frac{1}{\sigma}\varphi(t)\right)dt \\
&= -\frac{1}{\ln(2)}\int_{u(M)}^{u(N)} \varphi(t)\ln(\varphi(t))\,dt + \frac{\ln(\sigma)}{\ln(2)}\int_{u(M)}^{u(N)} \varphi(t)\,dt \\
&= \int_{u(M)}^{u(N)} h(\varphi(t))\,dt + \frac{\ln(\sigma)}{\ln(2)}\int_{u(M)}^{u(N)} \varphi(t)\,dt \\
&\to H(Y_0) + \frac{\ln(\sigma)}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

quand N tend vers $+\infty$ et et M tend vers $-\infty$

Conclusion : $\boxed{H(Y) \text{ existe et } H(Y) = H(Y_0) + \frac{\ln(\sigma)}{\ln(2)}}$

2. Soit $\lambda > 0$ et X_0 une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. On désignera par f_0 la densité de X_0.

   a) Montrer que $H(X_0)$ existe et calculer $H(X_0)$ en fonction de λ.

   b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\times$, admettant une densité f. On suppose que $H(X)$ existe et que X admet une espérance égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.
   Montrer que :
   $$H(X_0) = -\frac{1}{\ln(2)}\int_0^{+\infty} f(x)\,\ln(f_0(x))dx$$
   En utilisant (1) montrer que $H(X) \leqslant H(X_0)$.