Exercice 1 Suites récurrentes et algèbre linéaire

Soit a un nombre réel. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$, et F le sous- ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+3} = 3a\, u_{n+1} + (1-3a)\ u_n.$$

L'objet de ce problème est l'étude de l'ensemble F .

I. Étude du cas particulier $a = 1$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par ses trois premiers termes $u_0,\ u_1, u_2$, et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+3} = 3\, u_{n+1} - 2\, u_n.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et on note M la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. On a $M\,X_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2u_n + 3u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = X_{n+1}$

Donc la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique matricielle de raison M et pour tout entier n : $X_n = M^n\, X_0$

2. **a**) Pour $u = (x, y, z)$ On résout $(E) : (M - \alpha I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$(E) \iff \begin{cases} -\alpha x + y = 0 \\ -\alpha y + z = 0 \\ -2x + 3y - \alpha z = 0 \end{cases} \iff z \begin{cases} y = \alpha x \\ -\alpha^2 x + z = 0 \\ (-2 + 3\alpha)\, x - \alpha z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \alpha x \\ z = \alpha^2 x \\ (-2 + 3\alpha - \alpha^3)\, x = 0 \end{cases}$

On résout $-2 + 3\alpha - \alpha^3 = 0$: $\alpha = 1$ est racine ; on factorise par $(\alpha - 1)$ par l'algoithme de Horner :

-1	0	3	-2
	-1	-1	2
-1	-1	2	0

donc $-2 + 3\alpha - \alpha^3 = (\alpha - 1)\,(-\alpha^2 - \alpha + 2) = (\alpha - 1)^2\,(-\alpha - 2)$

– Donc **si** $\alpha = 1$ **alors** $(E) \iff \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}$ et les solutions sont
$S_1 = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 1)) \neq \{0\}$
donc 1 est valeur propre et une base de son sous-espace associé est $((1, 1, 1))$ (générateur et non nul)
Donc S_1 est de dimension 1.

– Donc **si** $\alpha = -2$ **alors** $(E) \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = 4x \end{cases}$ et les solutions sont
$S_{-2} = \mathrm{Vect}\,((1, -2, 4)) \neq \{0\}$
donc -2 est valeur propre et une base de son sous-espace associé est $((1, -2, 4))$ (générateur et non nul)
Donc S_{-2} est de dimension 1.

b) La somme des dimensions des sous espaces propres de M n'étant pas 3, M n'est pas diagonalisable.

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M , c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Les vecteurs 'une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ soit $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ doivent vérifier :

- $f(e'_1) = -2e'_1$ (vecteur propre associé à -2) et $(1, -2, 4)$ convient
- $f(e'_2) = e'_2$ (vecteur propre associé à 1) et $(1, 1, 1)$ convient
- $f(e'_3) = e'_2 + e'_3$ et on cherche $e'_3 = (0, y, z)$ en traduisant sur leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$:

$$f(e'_3) = e'_2 + e'_3 \iff M \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 + y \\ 3y = 1 + z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ z = 2 \\ 3 = 3 \end{cases}$$

Donc $e'_3 = (0, 1, 3)$ convient.

Reste à vérifier que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base (libre et 3 vecteurs)

Si $x\,e'_1 + y\,e'_2 + z\,e'_3 = 0$ alors $(x + y, -2x + y + z, 4x + y + 2z) = 0$

et $\begin{cases} x = -y \\ 3y + z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = 3y \\ y = 0 \end{cases}$ d'où $x = y = z = 0$ et la famille est libre donc une base de $\mathbb{R}^3$

et dans cette base la matrice de f est T.

b) On peut décomposer $T = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On calcule T^n par la formule du binôme.

- Comme D est diagonale, on connait ses puissances
- On a $N^2 = 0$ donc $N^n = 0$ pour $n \geq 2$
- Enfin $D \cdot N = N$ et $N \cdot D = N$ donc N et D commuttent et

$T^n = (N + D)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k N^k D^{n-k} = C_n^0 N^0 D^n + C_n^1 N D^{n-1} + \sum_{k=2}^n C_n^k N^k D^{n-k}$ (découpage valide pour $n \geqslant 2$)

$$= D^n + nND^{n-1} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette formule est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$

Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{T}^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque : on pouvait aussi observer pour $n = 0,\ 1,\ 2$ et 3 pour conjecturer puis démontrer par récurrence la formule.

4. On applique alors la formule de changement de base :

$mat_{\mathcal{B}} f = mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \cdot mat_{\mathcal{B}'} f \cdot mat_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ avec P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ qui est $P = mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ donc

$M = PTP^{-1}$ et $M^n = PT^nP^{-1}$

5. **a)** P est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs (e'_1, e'_2, e'_3) dans la base canonique (donc leurs composantes)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On applique la méthode de Gauss pour calculer P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{rrrrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 + 2L_1 \\ L_3 - 4L_1 \end{array} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrrrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_2/3 \\ L_2/3 \\ L_3 + L_2 \end{array},$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrrrrr} 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 + L_3/9 \\ L_2 - L_3/9 \\ L_3/3 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrrrrr} 1 & 0 & 1 & 1/9 & -2/9 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 & 2/9 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Donc l'inverse de P est :$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (on vérifie que $P\,P^{-1} = I$)

b) On a la première ligne de $M^n = PT^nP^{-1}$ par :

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} (-2)^n & 1 & n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} (-2)^n + 8 - 6n & -2\,(-2)^n + 2 + 3n & (-2)^n - 1 + 3n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc u_n qui est la premièer ligne du produit $M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ vaut en réordonnant suivant $(-2)^n$, n et constantes :

$$u_n = \frac{(-2)^n}{9}(u_0 - 2u_1 + u_3) + \frac{n}{3}(-2u_0 + u_1 + u_2) + \frac{1}{9}(8u_0 + 2u_1 - u_2)$$

II . Étude du cas général .

On revient au cas général où a est un réel quelconque.

1. **Structure de F .**

a) On vérifie le critère de sous espace :

- F est inclus dans l'ensembles des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est un espace vectoriel (muni des lois usuelles)
- La suite nulle est dans F car pour tout n : $0 = 3a\,0 + (1 - 3a)\,0$
- Si u et v appartiennent à F et α et β sot des réels alors pour tout entier n :

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= 3a\,u_{n+1} + (1 - 3a)\;u_n \\ v_{n+3} &= 3a\,v_{n+1} + (1 - 3a)\;v_n \\ & \quad \text{donc} \\ \alpha u_{n+3} + \beta v_{n+3} &= 3a\,(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + (1 - 3a)\,(\alpha u_n + \beta v_n) \end{aligned}$$

donc la suite $\alpha u+\beta v$ appartient bien à F et F est stable par combinaison linéaire.

Donc F est un sous espace vectoriel de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\cdot\right)$

b) On considère l'application $\varphi:\begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_n & \to & (u_0,u_1,u_2)\end{array}$.

- φ est bien une application de F dans $\mathbb{R}^3$
- φ est linéaire : si u et v sont deux suites de F et α et β deux réels alors (il faut se souvenir ce que sont les opérations suur les suites qui se font sur les termes des suites)

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha u+\beta v) &= \left((\alpha u+\beta v)_0,(\alpha u+\beta v)_1,(\alpha u+\beta v)_2\right)\\ &= (\alpha u_0+\beta v_0,\alpha u_1+\beta v_1,\alpha u_2+\beta v_2)\\ &= \alpha(u_0,u_1,u_2)+\beta(v_0,v_1,v_2)\\ &= \alpha\varphi(u)+\beta\varphi(v)\end{aligned}$$

- On ne peut pas ici utiliser d'argument de dimension pour la bijectivité car on ne connait pas celle de F.
  Si $\varphi(u)=0$ alors $u_0=u_1=u_2=0$ et par récurrence on montre que pour tout entier n, $u_n=0$
  (pour celà on prend comme hypothèse de récurrence que $u_n=u_{n+1}=u_{n+2}=0$ et on en déduit que $u_{n+1}=u_{n+2}=0$ et $u_{n+3}=3a\,u_{n+1}+(1-3a)\,u_n=0$)
  Donc φ est injective.
- Enfin pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ on définit bien une suite de F par $u_0=x,\ u_1=y$ et $u_2=z$ et son image par φ est x,y,z.
  Donc φ est surjective.

Finalement, φ est bien un isomorphisme de F dans $\mathbb{R}^3$.

Donc F est de la même dimension finie que $\mathbb{R}^3$ et $\dim F=3$

c) On se souvient d'abord que $\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0\\ u_1 & v_1 & w_1\\ u_2 & v_2 & w_2\end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les trois triplets $(u_0,u_1,u_2)=\varphi(u)$, $(v_1,v_2,v_3)=\varphi(v)$ et $\varphi(w)$ forment une famille libre.

Ensuite, $\varphi(xu+yv+zw)=x\varphi(u)+y\varphi(v)+z\varphi(w)$

Donc comme φ est un isomorphisme $x\varphi(u)+y\varphi(v)+z\varphi(w)=0\Longleftrightarrow xu+yv+zw=0$

Finalement (u,v,w) est libre $\Longleftrightarrow$ $(\varphi(u),\varphi(v),\varphi(w))$ est libre $\Longleftrightarrow$ la matrice ci-dessus est inversible.

Et comme la famille a trois vecteurs elle est libre $\Longleftrightarrow$ c'est une base.

d) On suppose dans cette question : $a=0$.*

on a donc pour tout entier n : $u_{n+3}=u_n$

On note $s,\ s',s''$ les suites définies par :

$$s=\varphi^{-1}((1,0,0)),\ \ s'=\varphi^{-1}((0,1,0)),\ \ s''=\varphi^{-1}((0,0,1))$$

La suite s celle qui vérifie $\varphi(s)=(s_0,s_1,s_2)=(1,0,0)$ donc

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s_n	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1

et de même

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s'_n	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

et

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s''_n	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0

Comme la matrice (de la question précédente) est ici la matrice unité, les suites (s,s',s'') forment une base de F et donc les suites de F sont des suites périodiques de période 3.

Et réciproquement les suites de période 3 sont des suites de F donc F est l'ensemeble des suites périodiques de période 3.

Celà se voyait d'ailleurs directement sur la relation de récurrence.

e) pour $a = 1/3$ on a $u_{n+3} = u_{n+1}$ et à partir du terme d'indice 1, (la relation ne s'applique pas pour $n = 0$) les suites seront périodiques de période 2.

2. Suites géométriques de F .

a) La suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F si, et seulement si, pour tout entier n : $r^{n+3} = 3ar^{n+1} + (1-3a)\,r^n$et

- si $r \neq 0$ en divisant par $r^n \neq 0$ celà aquivaut à $r^3 = 3ar^1 + 1 - 3a$
  donc à r est racine de la fonction polynomiale $p : x \to x^3 - 3a\,x + 3a - 1$
- et si $r = 0$, la suite (0^n) vérifie la relation de récurrence sauf éventuellement pour $n = 0$ (à cause du $0^0 = 1 \neq 0$)
  donc elle appartient à F si et seulement si $3a - 1 = 0$ et donc si et seulement si 0 est racine de p.

b) Si on ne demandait que le nombre de racines, on étudierait les variations de p. *
Comme on demande aussi leurs valeurs, on les cherche directement :

On remarque que $p(1) = 0$ et on factorise par $(x-1)$:

1	0	$-3a$	$3a-1$
	1	1	$1-3a$
1	1	$1-3a$	0

(Horner)

et $p(x) = (x-1)\left(x^2 + x + (1-3a)\right)$,
$x^2 + x + (1-3a)$ est du second degré et a pour discriminant $\Delta = 1 - 4(1-3a) = -3 + 12a = 3(4a-1)$
et donc

- si $a < 1/4$ alors $\Delta < 0$ et p n'a pas d'autre racines que 1.
- si $a = 1/4$ alors p a pour racines 1 et $-1/2$ (2 racines)
- si $a > 1/4$ alors $\Delta > 0$ et p a pour racines 1, $\frac{-1-\sqrt{12a-3}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{12a-3}}{2}$
  Sont-elles distinctes ?
  $\frac{-1-\sqrt{12a-3}}{2} < 0$ et est différent de $\frac{-1+\sqrt{12a-3}}{2}$ et de 1
  $\frac{-1+\sqrt{12a-3}}{2} = 1 \iff \sqrt{12a-3} = 3 \iff 12a - 3 = 9 \iff a = 1$
  Finalment si $a = 1$, alors p a deux racines : 1 et -2 et trois racines distinctes sinon.

3. Cas où p admet trois racines distinctes.

a) Il suffit de montrer que la matrice ci-dessus est inversible et pour celà que ses colonnes forment une famille libre.

si $x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\r_1\\r_1^2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\r_2\\r_2^2\end{pmatrix} = 0$ alors $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+r_1y+r_2z=0 & L_2-L_1 \\ x+r_1^2y+r_2^2z=0 & L_3-L_1 \end{cases}$

et $\begin{cases} x+y+z=0 \\ (r_1-1)\,y+(r_2-1)\,z=0 \\ (r_1^2-1)\,y+(r_2^2-1)\,z=0 & L_3-(r_1+1)\,L_2 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x+y+z=0 \\ (r_1-1)\,y+(r_2-1)\,z=0 \\ \left[(r_2^2-1)-(r_2-1)(r_1+1)\right]z=0 \end{cases}$

Or $\left[(r_2^2-1)-(r_2-1)(r_1+1)\right] = (r_2-1)(r_2-r_1)$ et comme $r_2 \neq 1$ et $r_2 \neq r_1$
alors $z = 0$ et comme $r_1 \neq 1$ on en déduit $y = 0$ et enfin $x = 0$
Donc la famille de colonnes est libre et donc la matrice est inversible et enfin
la famille $\left((1)_{n\in\mathbb{N}},\ ({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}},\ ({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une base de F.

b) Si $a = 7$, alors les racines de p sont 1, $\frac{-1-\sqrt{12\cdot 7-3}}{2} = \frac{-1-9}{2} = -5$ et $\frac{-1+\sqrt{12a-3}}{2} = 4$
Donc la suite u est combiniason linéaire de $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left((-5)^n\right)_{n\mathbb{N}}$ et $(4^n)_{n\in\mathbb{N}}$
et il existe x, y et z réels tels que, pour tout entier n : $u_n = x + y\,(-5)^n + z4^n$
En particulier pour $n = 0$, 1 et 2 :

$$\begin{cases} 1 = x+y+z \\ 10 = x-5y+4z & L_2-L_1 \\ -8 = x+25y+16z & L_3-L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = x+y+z \\ 9 = -6y+3z \\ -9 = 24y+15z & L_3+4L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 = x + y + z \\ 9 = -6y + 3z \\ 27 = 27z \quad L_3 + 4L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Donc pour tout entier n, $u_n = 1 - (-5)^n + 4^n$

4. Cas où p admet une racine double.

a) Soit r un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général nr^n.

Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+3} - 3a\, u_{n+1} - (1-3a)\, u_n &= (n+3)\, r^{n+3} - 3a\,(n+1)\, r^{n+1} - (1-3a)\, nr^n \\ &= nr^n \left(r^3 - 3ar^1 - (1-3a)\right) + r^n \left(3r^3 - 3anr\right) \\ &= nr^n\, p(r) + r^n r\, p'(r) \\ &= r^n \left(n\, p(r) + r\, p'(r)\right) \end{aligned}$$

b) Lorsque r_0 est racine double, on a alors $p(r_0) = 0$ et $p'(r_0) = 0$

Donc la suite $u = (n\, r_0{}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $u_{n+3} - 3a\, u_{n+1} - (1-3a)\, u_n = 0$ et appartient à F

Monttrons enfin que les colonnes de la matrice forment une famille libre :

si $x \begin{pmatrix} r_0^0 \\ r_0^1 \\ r_0^2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0r_0^0 \\ 1r_0^1 \\ 2r_0^2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} r_1^0 \\ r_1^1 \\ r_1^2 \end{pmatrix} = 0$ alors $\begin{cases} x + z = 0 \\ xr_0 + yr_0 + zr_1 = 0 \\ xr_0^2 + 2yr_0^2 + zr_1^2 = 0 \end{cases}$

et $\begin{cases} z = -x \\ x(r_0 - r_1) + yr_0 = 0 \\ x(r_0^2 - r_1^2) + 2yr_0^2 = 0 \quad L_3 - 2r_0 L_2 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} z = -x \\ x(r_0 - r_1) + yr_0 = 0 \\ x\left[(r_0^2 - r_1^2) - 2r_0(r_0 - r_1)\right] = 0 \quad L_3 - 2L_2 \end{cases}$

De plus $\left[(r_0^2 - r_1^2) - 2r_0(r_0 - r_1)\right] = (r_0 - r_1)(r_1 - r_0) \neq 0$

Donc $x = 0$ et $y = 0$ (car $r_0 \neq 0$ dans les deux cas $a = 1/4$ et $a = 1$) et enfin $z = 0$

Donc la matrice est inversible et la famille $\left((r_0{}^n)_{n\in\mathbb{N}},\ (n\, r_0{}^n)_{n\in\mathbb{N}},\ (r_1{}^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une base de F

c) Pour $a = 1/4$, la racine double est $-1/2$ et la racine simple de p est 1.

Toute suite u de F est combinaison linéaire des trois précédentes.

Donc pour tout entier n, $u_n = x\left(\frac{-1}{2}\right)^n + yn\left(-\frac{1}{2}\right)^n + z$ (avec x, y et z des réels)

En particulier pour $n = 0$, 1 et 2 :

$\begin{cases} u_0 = x + z \\ u_1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z \quad L_2 - L_1 \\ u_2 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + z \quad L_3 - L_1 \end{cases}$, donc $\begin{cases} u_0 = x + z \\ u_1 - u_0 = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y \\ u_2 - u_0 = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y \quad L_3 + L_2 \end{cases}$

et $\begin{cases} u_0 = x + z \\ u_1 - u_0 = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y \\ u_2 + u_1 - 2u_0 = -\frac{9}{4}x \quad L_3 + L_2 \end{cases}$ enfin $\begin{cases} x = \frac{8}{9}u_0 - \frac{4}{9}u_1 - \frac{4}{9}u_2 \\ y = -\frac{2}{3}u_0 - \frac{2}{3}u_1 + \frac{4}{3}u_2 \\ z = \frac{1}{9}u_0 + \frac{4}{9}u_1 + \frac{4}{9}u_2 \end{cases}$

On a $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ car $\left|\frac{-1}{2}\right| < 1$

Comme $\left(\frac{-1}{2}\right)^n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $n\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$

et la limite de la suite est donc $z = \frac{1}{9}u_0 + \frac{4}{9}u_1 + \frac{4}{9}u_2$

Exercice 2 : probabilités et simulation informatique.

I. Exemple introductif.

On effectue des lancers successifs (indépendants) d'un dé cubique équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$, les variables aléatoires donnant le numéro amené par le dé aux premier lancer, deuxième lancer, ...

Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n, la somme des points obtenus aux n premiers lancers.

Enfin, pour tout entier naturel k non nul, la variable aléatoire T_k compte le nombre de celles des variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ qui prennent une valeur inférieure ou égale à k .

Par exemple, si les cinq premiers numéros amenés par le dé sont, dans l'ordre : 3, 1, 2, 3, 6, alors les événements suivants sont réalisés : $(Y_1 = 3)$, $(Y_2 = 4)$, $(Y_3 = 6)$, $(Y_4 = 9)$, $(Y_5 = 15)$, et les variables aléatoires T_{2} , T_{3} , T_{9} et T_{12} prennent respectivement pour valeurs 0, 1, 4 et 4 .

1. **On s'intéresse dans cette question à la variable aléatoire T_{12}.**

   a) Il faut noter d'abord que le total des lancers augmente au moins d'un et au plus de 6 à chaque lancer.

   Donc pour tout i, la différence entre Y_i et Y_{i+1} est au moins de 1 et au plus de 6.

   Donc Y_{12} vaut au minimum 12 (réalisé quand on n'a eu que des 1)

   et comme Y_1 vaut au maxium 6, la première à pouvoir atteindre 12 est Y_2 (réalisé si l'on a un double 6)

   Donc $2 \leq T_{12} \leq 12$, toutes les valeurs intermédiaires étant possibles.

   Finalement $T_{12}(\Omega) = [[2, 12]]$

   $(T_{12} = 12)$ ne peut arriver que si chacun des tirage donne 1 (sinon $Y_{12} > 12$ ainsi que tous les Y_i pour $i \geq 12$ suivant)

   Donc $(T_{12} = 12) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap \cdots \cap (X_{12} = 1)$

   et comme les lancers sont indépendats, $p(T_{12} = 12) = (1/6)^{12}$ (les 6 faces sont équiprobables)

   b) Simulation informatique

   Il faut à chaque lancer du dé (simulé par `x :=random(6)+1`) augmenter de cette quantité la variable `y` et de 1 la valeur de `t` qui compte le nombre des $Y_i \leq 12$ et donc le nombre de lancers pour atteindre un total de 12 (on le dépasse forcément au lancer suivant)

```
Program ESSEC2003A ;
var x,y,t :integer ;
begin
     randomize ;
     y :=0 ;t :=0 ;
     repeat
          x :=random(6)+1 ;
          y :=y+x ;
          t :=t+1 ;
     until y>=12 ;
     writeln(T=',t) ;
end.
```

2. **On s'intéresse dans cette question à la variable aléatoire T_2**

   a) Déterminer la loi de probabilité de T_2.

   Comme au second lancer on totalise au moins 2, on a $T_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

– $(T_2 = 0) = (Y_1 > 2) = (X_1 > 2) = (X_1 \geq 3)$
  Les faces étant équiprobables, $p(T_2 = 0) = 4/6 = 2/3$
– $(T_2 = 1) = (Y_1 \leq 2) \cap (Y_2 > 2) = (X_1 \leq 2) \cap (X_1 + X_2 > 2)$
  $= (X_1 = 1 \cap X_2 \geq 2) \cup (X_1 = 2)$
  incompatibles donc

$$\begin{aligned} p(T_2 = 1) &= p(X_1 = 1 \cap X_2 \geq 2) + p(X_1 = 2) \\ &= p(X_1 = 1)\, p(X_2 \geq 2) + p(X_1 = 2) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{11}{36} \end{aligned}$$

– $(T_2 = 2) = (Y_1 \leq 2) \cap (Y_2 \leq 2)$ (on a toujours $Y_3 \geq 3$)
  $(T_2 = 2) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)$ lancers indépendants et $p(T_2 = 2) = 1/36$

i	0	1	2	total
$p(T_2 = i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

b) Qu'obtient-on à l'affichage en exécutant le programme ci-dessous ?

```
program Essec2003B ;
var i,d1,d2 :integer ;
loi :array[0..2] of integer ;
begin
    for i :=0 to 2 do loi[il :=0 ;
    for d1 :=1 to 6 do for d2 :=1 to 6 do
        if d1 >2 then loi[0] :=loi[0]+1 else
            if d1+d2 >2 then loi[1] :=Ioi[1]+1
                else loi[2] :=Ioi[2]+1 ;
    for i :=0 to 2 do write(loi[i]/36) ;
end.
```

Les 36 couples de valeurs du dé pour les premiers et second tirage étant équiprobales, le progrmamme les énumère exhaustivement et compte combien de ces couples vérifient $T_2 = 0$,1 ou 2 :
– $T_2 = 0$ si $X_1 > 2$ (`d1>2`) et on augmente le cradinal $|T_2 = 0|$ de 1 (`loi[0] :=loi[0]+1`)
– $T_2 = 1$ si $X_1 \leq 2$ (`d1>2...else...`) et si $X_1 + X_2 > 2$(`d1+d2 >2`) on augmente alors le cradinal $|T_2 = 1|$ de 1 (`loi[1] :=loi[1]+1`)
– enfin $T_2 = 0$ sinon (`else`) et on augmente alors le cradinal $|T_2 = 2|$ de 1 (`loi[2] :=loi[2]+1`)

La probabilité est alors le nombre de ces cas favorables suer le nombre de cas possibles.

Le programme affiche donc $p(T_2 = 0)$, $p(T_2 = 1)$ et $p(T_2 = 2)$

Dorénavant, on considère une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{T}; P)$, mutuellement indépendantes, de même loi, à valeurs positives ou nulles.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose alors : $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et on note F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n.

On fixe un réel strictement positif x , et on s'intéresse au nombre T_x des variables aléatoires Y_n telles que l'événement $(Y_n \leq x)$ soit réalisé.

II. Cas général.

1. Ici, on raisonne pour x fixé.
On a $F_n(x) = p(Y_n \leq x)$
Comme $Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}$ et que $X_{n+1} \geq 0$ alors $Y_{n+1} \geq Y_n$

Donc si $Y_{n+1} \leq x$ alors $Y_n \leq x$ ($(Y_{n+1} \leq x) \subset (Y_n \leq x)$) et $p(Y_{n+1} \leq x) \leq p(Y_n \leq x)$
Et finalement $F_{n+1}(x) \leq F_n(x)$
Donc la suite $(F_n(x))_{n\geq 1}$ est bien décroissante.

2. Démontrer chacune des deux relations suivantes :

– Est-ce que $P(T_x = 0) = 1 - F_1(x)$?
Comme $(T_x = 0)$ signifie que le nombre des $Y_i \leq x$ est nul. Donc que pour tout i, $Y_i > x$
Celà équivaut à $Y_1 > x$ (car les $(Y_i)_{i\geq 1}$ sont croissants) donc à $X_1 > x$
Donc $P(T_x = 0) = p(X_1 > x) = 1 - p(X_1 \leq x) = 1 - F_1(x)$

– Est ce que pour tout entier naturel n non nul, $P(T_x = n) = F_n(x) - F_{n+1}(x)$?
$p(T_x = n) = p(T_x \geq n) - p(T_x \geq n+1)$ car T_x ne prend que des valeurs entières.
Or $(T_x \geq n)$ signifie qu'au moins n variables parmi les Y_i sont $\leq x$.
Comme elles sont croissantes, il y a au moins $(Y_1 \leq x)$ et ... et $(Y_n \leq x)$
Et comme $(Y_1 \leq x) \cap \cdots \cap (Y_n \leq x) = (Y_n \leq x)$
alors $(T_x \geq n) = (Y_n \leq x)$ pour tout n et
Donc

$$\begin{aligned}
p(T_x = n) &= p(T_x \geq n) - p(T_x \geq n+1) \\
&= p(Y_n \leq x) - p(Y_{n+1} \leq x) \\
&= F_n(x) - F_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

3. Pour calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_x = n)$ on calcule la somme partielle :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} P(T_x = n) &= P(T_x = 0) + \sum_{n=1}^{N} [F_n(x) - F_{n+1}(x)] \\
&= 1 - F_1(x) + \sum_{n=1}^{N} F_n(x) - \sum_{n=1}^{N} F_{n+1}(x) \text{ réindexé } m = n+1 \\
&= 1 - F_1(x) + \sum_{n=0}^{N} F_n(x) - \sum_{m=2}^{N+1} F_m(x) \\
&= 1 - F_{N+1}(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} P(T_x = n) &= 1 \Longleftrightarrow \lim_{N\to+\infty} F_{N+1}(x) = 0 \text{ c'est à dire} \\
\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_x = n) &= 1 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0
\end{aligned}$$

Autrement dit, T_x est une variable aléatoire si, et seulement si :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$$

Remarque : pour que T soit une variable aléatoire, il faut que la probabilité que sa valeur soit définie vaille 1.

III. Cas d'une loi géométrique.

Dans cette troisième partie, les variables aléatoires X_i, $i \in \mathbb{N}^*$, suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre p , $(0 < p < 1)$, et on pose : $q = 1 - p$.

De plus, x est ici un entier naturel non nul fixé.

On rappelle que, par convention : $C_n^m = 0$ si n et m sont des entiers naturels tels que $m > n$.

1. Loi de Y_n, $n \in \mathbb{N}^*$

a) Comme pour tout i, $X_i(\Omega) = [[1, +\infty[[$ et que $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ alors $Y_n(\Omega) = [[1, +\infty[[$

b) Pour $k \geq 2$,

$$(Y_2 = k) = (X_1 + X_2 = k) = \bigcup_{i=1}^{k-1} (X_1 = i \cap X_2 = k - i)$$

les bornes venant de $X_1 \geq 1$ donc $i \geq 1$ et $X_2 \geq 1$ donc $k - i \geq 1 \Longleftrightarrow i \leq k - 1$
Donc (en faisant attention à l'ensemble de validité de la loi)

$$\begin{aligned}
p(Y_2 = k) &= p\left[\bigcup_{i=1}^{k-1} (X_1 = i \cap X_2 = k - i)\right] \text{ incompatibles} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} p(X_1 = i \cap X_2 = k - i) \text{ indépendants} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} p(X_1 = i) \cdot p(X_2 = k - i) \text{ et comme } i \geq 1 \text{ et } k - i \geq 1 \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} q^{i-1} p q^{k-i-1} p = p^2 \sum_{i=1}^{k-1} q^{k-2} \ \ (k \text{ constant } / \ i) \\
&= p^2 q^{k-2} \sum_{i=1}^{k-1} 1 = (k-1) p^2 q^{k-2} \\
&= C_{k-1}^1 p^2 q^{k-2}
\end{aligned}$$

Pour $k \geq 3$,

$$\begin{aligned}
(Y_3 = k) &= (X_1 + X_2 + X_3 = k) \\
&= (Y_2 + X_3 = k) = \bigcup_{i=2}^{k-1} (Y_2 = i \cap X_3 = k - i)
\end{aligned}$$

les bornes venant de $Y_2 \geq 2$ donc $i \geq 2$ et $X_3 \geq 1$ donc $k - i \geq 1 \Longleftrightarrow i \leq k - 1$

$$\begin{aligned}
p(Y_3 = k) &= p\left[\bigcup_{i=2}^{k-1} (Y_2 = i \cap X_2 = k - i)\right] \text{ incompatibles / indépendants} \\
&= \sum_{i=2}^{k-1} p(Y_2 = i) \cdot p(X_2 = k - i) = \sum_{i=2}^{k-1} (i-1) p^2 q^{i-2} q^{k-1-i} p \\
&= p^3 q^{k-3} \sum_{i=2}^{k-1} (i-1) \ = p^3 q^{k-3} \sum_{j=1}^{k-2} j \text{ réindexé } j = i - 1 \\
&= p^3 q^{k-3} \left[\frac{(k-1)k}{2} - 0\right] = C_{k-1}^2 p^2 q^{k-2}
\end{aligned}$$

c) On ne peut pas utiliser ici le binôme car l'indice de somme est en indice sur le coefficient du binôme.
Par récurrence sur m :
– pour $m = n$, on a $\sum_{k=n}^{n} C_k^n = C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$

– Soit $m \geq n$ tel que $\sum_{k=n}^{m} C_k^n = C_{m+1}^{n+1}$
Est-ce qu'alors $\sum_{k=n}^{m+1} C_k^n = C_{m+2}^{n+1}$?

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m+1} C_k^n &= \sum_{k=n}^{m} C_k^n + C_{m+1}^n = C_{m+1}^{n+1} + C_{m+1}^n \\ &= C_{m+2}^{n+1}\end{aligned}$$

– Donc pour tout entier $m \geq n$: $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} C_k^n = C_{m+1}^{n+1}$

d) Par récurrence : (on a la propriété pour $n = 0,\ 1$, et 2
– pour $n = 1$ on a $p(Y_1 = k) = q^{k-1}p = C_{k-1}^{1-1}q^{k-1}p$
– Soit $n \geq 1$ tel que pour tout $k \geq n$: $P(Y_n = k) = C_{k-1}^{n-1}q^{k-n}p^n$
alors pour $k \geq n+1$:

$$(Y_{n+1} = k) = (Y_n + X_{n+1} = k) = \bigcup_{i=n}^{k-1} (Y_2 = i \cap X_{n+1} = k - i)$$

avec $i \geq k$ et $k - i \geq 1$; et

$$\begin{aligned}p(Y_n = k) &= p\left[\bigcup_{i=n}^{k-1} (Y_n = i \cap X_{n+1} = k - i)\right] \\ &\quad \text{incompatibles / indépendants} \\ &= \sum_{i=n}^{k-1} p(Y_n = i) \cdot p(X_{n+1} = k - i) \\ &= \sum_{i=n}^{k-1} C_{i-1}^{n-1} q^{i-n} p^n q^{k-1-i} p \ \text{ car } i \geq n \text{ et } k - i \geq 1 \\ &= p^{n+1} q^{k-(n-1)} \sum_{i=n}^{k-1} C_{i-1}^{n-1} \text{ réindexé } j = i - 1 \\ &= p^{n+1} q^{k-(n-1)} \sum_{j=n-1}^{k-2} C_{i-1}^{n-1} \text{ et comme } k - 1 \geq n \\ &= p^{n+1} q^{k-(n-1)} C_{k-1}^{n-1+1}\end{aligned}$$

– donc pour tout entier $n \geq 1$ et $k \geq n$

$$P(Y_n = k) = C_{k-1}^{n-1} q^{k-n} p^n$$

2. Calcul de $P(T_x = n)$.

a) On utilise l'équivalence : (T_x est une variable aléatoire) si, et seulement si ($\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$)
– On considère la fonction de répartition de Y_n :
Comme $Y_n(\Omega) = [[n, +\infty[[$, si $n > x$ alors $p(Y_n \leq x) = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} p(Y_n \leq x) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$
Donc T_x est une variable aléatoire.
– N.B. x est un entier naturel non nul.
comme $Y_n(\Omega) = [[n, +\infty[[$ alors $(Y_n \leq x)$ n'est possible que si $n \leq x$
Donc il y a donc au plus x variables Y_i qui sont inférieures ou égales à x
Et au minimum, il n'y a en a aucune (car $X_1(\Omega) = Y_1(\Omega) = [[1, +\infty[[$)
donc $T_x(\Omega) = [[x, +\infty[[$

– $(T_x = 0)$ signifie que tous les $Y_i > x$, donc que $Y_1 > x$ (car les Y_i sont croissants par rapport à i)
Et en passant par le contraire : $(Y_1 > x) = (X_1 > x) = \overline{X_1 \leq x}$
donc

$$\begin{aligned}
p\left(T_x = 0\right) &= 1 - \sum_{i=1}^{x} p\left(X_1 = k\right) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{x} q^{i-1} p \text{ réindexé } j = i - 1 \\
&= 1 - p \sum_{i=0}^{x-1} q^j \\
&= 1 - p \frac{q^x - 1}{q - 1} \\
&= q^x
\end{aligned}$$

b) Pour $n \leq x$, on a la fonction de répartition à partir de la loi par :

$$F_n\left(x\right) = \sum_{k=n}^{x} p\left(Y_n = k\right) = \sum_{k=n}^{x} C_{k-1}^{n-1} q^{k-n} p^n$$

et comme (formule du triangle de Pascal) $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_{k-1}^n$ alors $C_{k-1}^{n-1} = C_k^n - C_{k-1}^n$ et

$$\begin{aligned}
F_n\left(x\right) &= \sum_{k=n}^{x} \left(C_k^n - C_{k-1}^n\right) q^{k-n} p^n \\
&= \sum_{k=n}^{x} C_k^n \, q^{k-n} p^n - \sum_{k=n}^{x} C_{k-1}^n \, q^{k-n} p^n \\
&= \sum_{k=n}^{x} C_k^n \, q^{k-n} p^n - \sum_{k=n}^{x} C_{k-1}^n \, q^{k-n} p^n \\
&= p^n \sum_{k=n}^{x} C_k^n \, q^{k-n} - q p^n \sum_{k=n+1}^{x} C_{k-1}^n \, q^{k-n-1}
\end{aligned}$$

et directement

$$\begin{aligned}
F_{n+1}\left(x\right) &= \sum_{k=n+1}^{x} p\left(Y_{n+1} = k\right) = \sum_{k=n+1}^{x} C_{k-1}^{n-1+1} p^{n+1} q^{k-n-1} \\
&= p^{n+1} \sum_{k=n+1}^{x} C_{k-1}^n q^{k-n-1}
\end{aligned}$$

On a alors pour $x \geq n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
P(T_x = n) &= F_n(x) - F_{n+1}(x) \\
&= p^n \sum_{k=n}^{x} C_k^n\, q^{k-n} - qp^n \sum_{k=n+1}^{x} C_{k-1}^n\, q^{k-n-1} - p^{n+1} \sum_{k=n+1}^{x} C_{k-1}^n q^{k-n-1} \\
&= p^n \sum_{k=n}^{x} C_k^n\, q^{k-n} - p^n (q+p) \sum_{k=n+1}^{x} C_{k-1}^n\, q^{k-n-1} \text{ avec } p+q=1 \\
&= p^n \left(\sum_{k=n}^{x} C_k^n\, q^{k-n} - \sum_{k=n+1}^{x} C_{k-1}^n\, q^{k-n-1} \right) \text{ réindexé } h = k-1 \\
&= p^n \left(\sum_{k=n}^{x} C_k^n\, q^{k-n} - \sum_{h=n}^{x-1} C_h^n\, q^{h-n} \right) \\
&= C_x^n\, q^{x-n} p^n
\end{aligned}$$

et $p(T_x = n) = 0$ si $n > x$

c) La formule est encore valable pour $n = 0$ $(p(T_x = 0) = q^x)$

On reconnait donc que $T_x \hookrightarrow \mathcal{B}(x,p)$ et donc $E(T_x) = xp$ et $V(T_x) = xpq$

3. Sachant que les variables aléatoires X_1, $X_2 \ldots$ sont des temps d'attente, et en observant que la réalisation de n premiers succès équivaut à la réalisation du n^{ime} succès,

Y_n est le temps d'attente du n^{im} succès (somme des temps d'attente pour chacuns des n premiers succès)

$T_x = n$ signifie que en x expériences, il n'y a eu que n succès.

T_n est donc le nombre de succès en x expériences indépendantes, qui ont chacunes la probabiltié p de donner succès.

Donc $T_x \hookrightarrow \mathcal{B}(x,p)$

IV. Cas d'une loi exponentielle.

Dans cette dernière partie, les variables aléatoires X_n suivent la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

On admettra qu'alors Y_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. On utilise les formules du **II.2.** :

- $P(T_x = 0) = 1 - p(Y_1 \leq x) = p(Y_1 > x) = \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt$
  $= \lim_{M \to +\infty} \left[-e^{-\lambda t} \right]_{t=x}^{M} = e^{-\lambda x}$

– $P(T_x = n) = p(Y_n \leq x) - p(Y_{n+1} \leq x)$

$$\begin{aligned}
P(T_x = n) &= \int_0^x f_n(t)\ dt - \int_0^x f_{n+1}(t)\ dt \\
&= \int_0^x \left(\frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-1} - \frac{\lambda^{n+1}}{n!} e^{-\lambda t} t^n \right) dt \\
&= \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^x \left(n t^{n-1} e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} t^n \right) dt \ldots \\
& \text{il faut reconnaître la dérivée du produit} \\
&= \frac{\lambda^n}{n!} \left[t^n e^{-\lambda t} \right]_{t=.0}^{x} = \frac{\lambda^n}{n!} x^n e^{-\lambda x} \\
&= \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

2. Et on reconnait une loi de Poisson de paramètre λx (y compris pour $n = 0$) et elle a donc pour espérance λx et pour variance également.