

ESSEC option Eco 2003

Maths III

Exercice 1 Suites récurrentes et algèbre linéaire

Soit a un nombre réel. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$, et F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient : $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+3} = 3a u_{n+1} + (1 - 3a) u_n$.

L'objet de ce problème est l'étude de l'ensemble F .

I. Étude du cas particulier $a = 1$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par ses trois premiers termes u_0, u_1, u_2 , et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+3} = 3 u_{n+1} - 2 u_n.$$

Pour tout entier naturel n , on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et on note M la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. Reconnaître, pour tout entier naturel n , le produit $M X_n$.

En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M , X_0 et de l'entier naturel n .

2.
 - a) Déterminer les valeurs propres de la matrice M et leur sous-espace propre associé.
 - b) La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M , c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
 - a) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que la matrice T de f dans $\mathcal{B}'$ vérifie $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.
 - b) Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de T^n
4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Exprimer M en fonction de T , P et P^{-1} , puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n .
5.
 - a) Calculer P^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie)
 - b) Pour tout entier naturel n , calculer les coefficients de la première ligne de M^n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de l'entier naturel n .

II. Étude du cas général.

On revient au cas général où a est un réel quelconque.

1. Structure de F .

- a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- b) On considère l'application $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}^3$.
$$(u_n)_n \mapsto (u_0, u_1, u_2)$$

Démontrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels; en déduire que F est de dimension finie et préciser sa dimension.

- c) Justifier que des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F forment une base de F si, et seulement si, la matrice $\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ est inversible.
- d) On suppose dans cette question: $a = 0$.
On note s, s', s'' les suites définies par :

$$s = \varphi^{-1}((1, 0, 0)), \quad s' = \varphi^{-1}((0, 1, 0)), \quad s'' = \varphi^{-1}((0, 0, 1))$$

Déterminer s, s', s'' (on donnera les dix premiers termes de chacune de ces trois suites); en déduire la forme générale d'un élément de F .

- e) Reprendre la question précédente dans le cas $a = 1/3$

2. Suites géométriques de F .

- a) Démontrer que la suite $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à F si, et seulement si, le réel r est racine de la fonction polynomiale $p : x \rightarrow x^3 - 3ax + 3a - 1$
(avec la convention : $0^0 = 1$)
- b) Déterminer, en fonction du réel a , le nombre de racines de la fonction p ainsi que leur valeur.

3. Cas où p admet trois racines distinctes.

- a) Démontrer que, lorsque la fonction p admet trois racines distinctes $1, r_1$ et r_2 , les suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}$, $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base de l'espace vectoriel F
- b) Dans le cas où $a = 7$, exprimer, en fonction de l'entier naturel n , le terme général u_n de la suite, appartenant à F , qui vérifie: $u_0 = 1, u_1 = 10, u_2 = -8$

4. Cas où p admet une racine double.

- a) Soit r un nombre réel et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général nr^n . Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:
- $$u_{n+3} - 3au_{n+1} - (1 - 3a)u_n = r^n(n p(r) + r p'(r))$$
- b) En déduire que, lorsque p admet une racine double r_0 et une racine simple r_1 la suite $(nr_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à F , et démontrer que les suites $(r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(nr_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base de F .
- c) Dans le cas où $a = 1/4$, exprimer le terme général u_n d'un élément quelconque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F en fonction de u_0, u_1 et u_2 et de l'entier naturel n ; préciser la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2: probabilités et simulation informatique.

I. Exemple introductif.

On effectue des lancers successifs (indépendants) d'un dé cubique équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, les variables aléatoires donnant le numéro amené par le dé aux premiers lancers, deuxième lancer, ...

Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n , la somme des points obtenus aux n premiers lancers. Enfin, pour tout entier naturel k non nul, la variable aléatoire T_k compte le nombre de celles des variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ qui prennent une valeur inférieure ou égale à k .

Par exemple, si les cinq premiers numéros amenés par le dé sont, dans l'ordre : 3, 1, 2, 3, 6, alors les événements suivants sont réalisés : $(Y_1 = 3)$, $(Y_2 = 4)$, $(Y_3 = 6)$, $(Y_4 = 9)$, $(Y_5 = 15)$, et les variables aléatoires T_2, T_3, T_9 et T_{12} prennent respectivement pour valeurs 0, 1, 4 et 4.

1. On s'intéresse dans cette question à la variable aléatoire T_{12} .

a) Donner les valeurs prises par T_{12}

(On explicitera un exemple de résultat correspondant à chacune des deux valeurs extrêmes).

Quelle est la probabilité que T_{12} prenne la valeur 12 ?

b) Simulation informatique

Compléter les lignes marquées par les symboles . . . du programme Pascal ci-dessous, de façon qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur de T_{12} .

On rappelle que `random(6)` fournit un entier aléatoire parmi 0, 1, 2, 3, 4, 5 .

```
Program ESSEC2003A;
var x,y,t:integer;
begin
    randomize;
    y:=0;t:=0;
    repeat
        x:=random(6)+1;
        y:=...;
        t:=...;
    until ...;
    writeln(T=',t-1);
end.
```

2. On s'intéresse dans cette question à la variable aléatoire T_2

a) Déterminer la loi de probabilité de T_2 .

b) Qu'obtient-on à l'affichage en exécutant le programme ci-dessous ?

```
program Essec2003B;
var i,d1,d2:integer;
loi:array[0..2] of integer;
begin
    for i:=0 to 2 do loi[i]:=0;
    for d1:=1 to 6 do for d2:=1 to 6 do
        if d1 > 2 then loi[0]:=loi[0]+1 else
            if d1+d2 > 2 then loi[1]:=loi[1]+1
            else loi[2]:=loi[2]+1;
    for i:=0 to 2 do write(loi[i]/36);
end.
```

Dorénavant, on considère une suite $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{T}; P)$, mutuellement indépendantes, de même loi, à valeurs positives ou nulles.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose alors : $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et on note F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n .

On fixe un réel strictement positif x , et on s'intéresse au nombre T_x des variables aléatoires Y_n telles que l'événement $(Y_n \leq x)$ soit réalisé.

II. Cas général.

1. Démontrer que la suite $(F_n(x))_{n \geq 1}$ est décroissante.

2. Démontrer chacune des deux relations suivantes :

- $P(T_x = 0) = 1 - F_1(x)$
- pour tout entier naturel n non nul, $P(T_x = n) = F_n(x) - F_{n+1}(x)$

3. En déduire l'équivalence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_x = n) = 1 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$$

Autrement dit, T_x est une variable aléatoire si, et seulement si : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$

III. Cas d'une loi géométrique.

Dans cette troisième partie, les variables aléatoires X_i , $i \in \mathbb{N}^*$, suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre p , ($0 < p < 1$), et on pose : $q = 1 - p$.

De plus, x est ici un entier naturel non nul fixé.

On rappelle que, par convention : $C_n^m = 0$ si n et m sont des entiers naturels tels que $m > n$.

1. Loi de Y_n , $n \in \mathbb{N}^*$

- a) Préciser $Y_n(\Omega)$
- b) Par un calcul de loi de somme, déterminer la loi de Y_2 , puis celle de Y_3 .
- c) Démontrer que, pour tous entiers naturels m et n tels que $m \geq n$, on a l'égalité :

$$\sum_{k=n}^m \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}$$

- d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$P(Y_n = k) = \binom{k-1}{n-1} q^{k-n} p^n$$

si k est un entier supérieur ou égal à n .

2. Calcul de $P(T_x = n)$.

- a) Justifier que T_x est une variable aléatoire et préciser $T_x(\Omega)$.

Calculer $P(T_x = 0)$

- b) Vérifier chacune des deux égalités :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= p^n \sum_{k=n}^x \binom{k}{n} q^{k-n} - qp^n \sum_{k=n+1}^x \binom{k-1}{n} q^{k-n-1} \\ F_{n+1}(x) &= p^{n+1} \sum_{k=n+1}^x \binom{k-1}{n} q^{k-n-1} \end{aligned}$$

En utilisant **II.2.**, en déduire le calcul de $P(T_x = n)$ pour n entier supérieur ou égal à 1.

- c) Reconnaître la loi de T_x ; préciser son espérance et sa variance.
3. Sachant que les variables aléatoires $X_1, X_2 \dots$ sont des temps d'attente, et en observant que la réalisation de n premiers succès équivaut à la réalisation du $n^{ième}$ succès, donner une interprétation, soigneusement exposée, de chacune des variables aléatoires Y_n et T_x , et retrouver ainsi la loi de T_x .

IV. Cas d'une loi exponentielle.

Dans cette dernière partie, les variables aléatoires X_n suivent la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

On admettra qu'alors Y_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. À l'aide de **II.2.**, calculer $P(T_x = 0)$, puis $P(T_x = n)$ pour tout entier naturel n non nul.
2. Reconnaître la loi de T_x ; préciser son espérance et sa variance.