Exercice 1 : probabilités et algèbre linéaire

Dans tout l'exercice, N désigne un nombre entier supérieur ou égal à 1.

I.Etude d'un endomorphisme

On note $\mathbb{R}_N[X]$ l'espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à N et du polynôme nul ; on désigne par Id l'application identique de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$.

1. Soit a un nombre réel non nul et P un élément de $\mathbb{R}_N[X]$.
   Si P est un polynôme de degré n alors $P = \sum a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

   Donc $P(aX+1-a) = \sum a_k (aX+1-a)^k$ dont le terme de plus haut degré est $a_n a X^n$ (avec $a_n a \neq 0$)

   Donc $P(aX+1-a)$ est bien un polynôme de même degré que P.

   (Si P est nul, $P(aX+1-a)$ le sera aussi).

   > Dans toute la suite de l'exercice, pour tout réel a non nul, on note f_a l'application de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(ax+1-a)$

2. Soient a et b des nombres réels non nuls.

   a) Pour tout polynôme P : $f_a(P)(x) = P(ax+1-a)$ donc

   $$\begin{aligned} f_b \circ f_a(P)(x) &= P(a(bx+1-b)+1-a) \\ &= P(abx+a-ab+1-a) \\ &= P(abx+1-ab) \\ &= f_{ab}(P)(x) \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{f_b \circ f_a = f_{ab}}$

   b) On remarque que $a=1$ on a $f_1(P)(x) = P(1x+1-1) = P(x)$ alors $f_1(P) = P$
   Donc $f_a \circ f_{1/a} = f_1 = \mathrm{Id}$ et $f_{1/a} \circ f_a = \mathrm{Id}$.
   Donc f_a admet pour réciproque $f_{1/a}$.

   Conclusion : $\boxed{f_a \text{ est donc bijective de réciproque } (f_a)^{-1} = f_{1/a}}$

   c) On pose : $(f_a)^0 = \mathrm{Id}$ et, pour tout entier naturel n : $(f_a)^{n+1} = (f_a)^n \circ f_a$.
   Pr récurrence : $(f_a)^0 = \mathrm{Id} = f_1 = f_{a^0}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(f_a)^n = f_{a^n}$; alors $(f_a)^{n+1} = (f_a)^n \circ f_a = f_{a^n} \circ f_a = f_{a^{n+1}}$

   Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n : (f_a)^n = f_{a^n}.}$

3. Pour tout réel a non nul, on note M_a la matrice de f_a dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^N)$ de $\mathbb{R}_N[X]$.

   a) Expliciter M_a dans le cas $N=3$.
   On calcule les images des vecteurs de la base puis leurs coordonnées dans la base canonique :
   $f_a(1)(x) = 1(\cdots) = 1$ coordonnées : $(1,0,0,0)$

$f_a(X)(x) = X(ax+1-a) = ax+1-a$ coordonnées $(1-a,a,0,0)$
$f_a(X^2)(x) = (ax+1-a)^2 = a^2x^2+2(1-a)ax+(1-a)^2$ coordonnées $\left((1-a)^2, 2a(1-a), a^2, 0\right)$
et $f_a(X^3)(x) = (ax+1-a)^3 = a^3x^3+3(1-a)a^2x^2+3(1-a)^2ax+(1-a)^3$ coordonnées $\left((1-a)^3, 3a(1-a)^2, 3a^2(1-a), a^3\right)$

Donc la matrice de f_a dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 1 & 1-a & (1-a)^2 & (1-a)^3 \\ 0 & a & 2a(1-a) & 3a(1-a)^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^2(1-a) \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$

Dans le cas général, les coefficient de la $j+1^{iéme}$ colonne sont les coordonnées de $f_a(X^j)$ avec

$$\begin{aligned} f_a\left(X^j\right)(x) &= (ax+(1-a))^j \\ &= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (1-a)^{j-k} a^k x^k \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{On trouve donc en } j+1^{ème} \text{ colonne et } i+1^{ème} \text{ ligne : } 0 \text{ si } i>j \text{ et } \binom{j}{i}(1-a)^{j-i}a^j \text{ si } i \le j}$

b) n désignant un entier naturel,
$(M_a)^n$ est la matrice associée à $(f_a)^n = f_{a^n}$ dont la matrice est M_{a^n}.
Conclusion : $\boxed{(M_a)^n = M_{a^n}.}$
Pour $-n$ négatif, f_{a^n} a pour réciproque $f_{1/a^n} = f_{a^{-n}}$ donc la matrice associée à la réciproque est d'une part, l'inverse de la matrice associée à f_{a^n}, et d'autre part la matrice associée à $f_{a^{-n}}$.
Conclusion : $\boxed{[(M_a)^n]^{-1} = (M_{a^{-n}}) \text{ et la formule reste vraie pour } n \text{ négatif.}}$

4. Préciser l'ensemble des valeurs propres de f_a

Comme la matrice de f_a est triangulaire, ses valeurs propres sont sur .la diagonale $\left\{1, a, a^2, a^3, \cdots, a^N\right\}$, (qui ne sont distinctes que si $a \neq 1$ et $a \neq -1$ et $a \neq 0$).

Pour tout entier k compris au sens large entre 0 et N,

$$\begin{aligned} f_a\left((X-1)^k\right)(x) &= (ax+1-a-1)^k \\ &= a^k(x-1)^k \\ f_a\left((X-1)^k\right) &= a^k(X-1)^k \end{aligned}$$

Les $(X-1)^k$ sont donc des vecteurs propres de f_a.

Comme $\left(1, X-1, \cdots, (X-1)^N\right)$ est échelonnée donc libre à $N+1$ vecteurs donc une base de $\mathbb{R}_N[X]$ de vecteurs propres.

Conclusion : $\boxed{f_a \text{ est diagonalisable}}$

II. Etude d'une expérience aléatoire

On dispose de N pièces de monnaie, chacune ayant la probabilité p d'amener pile $(0 < p < 1)$ et $1-p$ d'amener face. On pourra poser : $q = 1-p$.
On s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer des lancers successifs selon le protocole suivant :

- à l'étape 1, on lance les N pièces ;
- à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 1 (s'il en existe) ;
- à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 2 (s'il en existe),

et ainsi de suite.
À chaque étape, les lancers des pièces sont supposés indépendants.
On considère les variables aléatoires suivantes :

- X_0 est la variable aléatoire certaine égale à N,
- pour tout entier naturel n non nul, X_n est le nombre de côtés pile apparaissant à l'étape n, avec la convention que, si à une certaine étape n_0 aucun côté pile n'apparaît, on considère que pour tous les entiers n supérieurs ou égaux à n_0 l'événement $(X_n = 0)$ est réalisé.

1. **Etude des variables aléatoires X_n**
   Soit n un entier naturel, soient i et j des entiers compris au sens large entre 0 et N.

   a) Sachant que l'événement $(X_n = j)$, la $n^{ième}$ expérience consiste à lancer j pièces, indépendamment, ayant toutes la même probabilité p de donner pile.
   Conclusion : $\boxed{X_{n+1}/X_n = j \hookrightarrow \mathcal{B}(j,p)}$
   D'après la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(X_n = k)_{k\in[[0,N]]}$ on a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{n+1} = i) &= \sum_{j=0}^{N} \mathrm{P}_{X_n=j}(X_{n+1} = i) \cdot \mathrm{P}(X_n = j) \\
&= \sum_{j=0}^{i-1} 0 + \sum_{j=i}^{N} \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} \mathrm{P}(X_n = j)
\end{aligned}$$

   découpage nécessaire car les valeurs possibles pour $\mathcal{B}\left(j, \frac{1}{2}\right)$ sont les $i \leq j$ (c.a.d. $j \geq i$)
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{j=i}^{N} \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} \mathrm{P}(X_n = j)}$

   b) On a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \\ \vdots \\ P(X_{n+1} = N) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{N} \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} \mathrm{P}(X_n = j) \\ \sum_{j=1}^{N} \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} \mathrm{P}(X_n = j) \\ \vdots \\ \sum_{j=N}^{N} \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} \mathrm{P}(X_n = j) \end{pmatrix}. \\
&= M_p \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \\ \vdots \\ P(X_{n+1} = N) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{U_{n+1} = M_p U_n}$
   Suite géométrique matricielle de raison M_p donc $U_n = (M_p)^n U_0 = M_{p^n} U_0$.
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : U_n = M_{p^n} U_0}$
   Et comme $\mathrm{P}(X_0 = N) = 1$ et $\mathrm{P}(X_0 = i) = 0$ pour les autres valeurs, , le produit a pour résultat la dernière colonne de la matrice M_{p^n}.

Donc $\mathrm{P}(X_n = k) = \binom{N}{k}(p^n)^k(1-p^n)^{N-k}$ et donc

Conclusion : $\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p^n)}$

On avait trouvé que X_0 était la variable certaine égale à N et pour pour $n = 0$: $p^0 = 1$ ce qui est cohérent.

Pour X_1 sachant que $X_0 = N$, on avait une loi binomiale de paramètres N et p, tout comme ici.

Au cours des n premières étapes, on lance $X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1}$ pièces (à l'étape n on lance autant de pièces que de pile à l'étape $n-1$)

Le nombre moyen de pièces lancées en n étapes est donc :

$$\begin{aligned} E(X_0) + \cdots + E(X_{n-1}) &= N\left(p^0 + \cdots + p^{n-1}\right) \\ &= N\frac{1-p^n}{1-p} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{m_n = N\frac{1-p^n}{1-p}}$

2. **Etude d'un temps d'attente**

On suppose les N pièces numérotées de 1 à N, et on note $T_1, ..., T_N$ les variables aléatoires donnant le temps d'attente de la première apparition de face respectivement pour la première, deuxième, ..., Nième pièce. De plus, on pose :

$$T = \sup(T_1, \ldots, T_N).$$

a) Tant qu'une pièce n'a pas donné face, elle est relancée, et la probabilité de donner face reste la même.

Donc le nombre de lancer pour obtenir le premier face est sans mémoire et suit une loi géométrique.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } k \in [[1, N]] : T_k \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p) \text{ et } E(T_k) = \frac{1}{1-p}}$

Pour tout k, la pièce k est lancée en moyenne $\frac{1}{1-p}$ fois.

Conclusion : $\boxed{\text{Donc le nombre total moyen de lancers est } \dfrac{N}{1-p}}$

Et lorsque l'on fait tendre le nombre d'étape vers l'infini, le nombre moyen de lancer $N\frac{1-p^n}{1-p}$ tend vers cette même moyenne.

b) T est le plus grand des nombres de lancers nécessaire pour obtenir face.

c) *Conclusion :* $\boxed{T \text{ est le nombre d'étape nécessaire pour que toutes les pièces aient donné face}}$

Comme $0 \leq T \leq T_1 + \cdots + T_N$ et chacun des T_i ayant une espérance, "alors" T en admet une également.

(c'est bref, mais ce n'est pas un théorème du cours)

d) $(T \leq k)$ est l'événement "le plus grand es inférieur à k" soit encore, "ils sont tous inférieurs à k".

$(T \leq k) = \bigcap_{i=1}^{N}(T_i \leq k)$ indépendants.

Comme $(T_i > k) =$"pas de face jusqu'au $k^{ème}$" a pour probabilité $\mathrm{P}(T_i > k) = p^k$ alors $\mathrm{P}(T_i \leq k) = 1 - p^k$ et

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T \leq k) = \left(1-p^k\right)^N \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*}$

On a alors $\mathrm{P}(T=k) =$ donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T=k) &= \mathrm{P}(T\leq k) - \mathrm{P}(T\leq k-1) \\ &= \left(1-p^k\right)^N - \left(1-p^{k-1}\right)^N\end{aligned}$$

pour k et $k-1\in\mathbb{N}^*$; formule qui est encore vraie pour $k=1$.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T=k) = \left(1-p^k\right)^N - \left(1-p^{k-1}\right)^N \text{ pour tout } k\in\mathbb{N}^*}$

e) On rappelle que $\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} = \dfrac{1}{(1-p)^2}$. car $|p|<1$

Dans le cas $N=2$, la loi de T est donnée par : pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T=k) &= \left(1-p^k\right)^2 - \left(1-p^{k-1}\right)^2 \\ &= -2p^k + p^{2k} + 2p^{k-1} - p^{2(k-1)} \\ &= -2(p-1)p^{k-1} + \left(p^2-1\right)p^{2(k-1)}\end{aligned}$$

et on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{M} k\mathrm{P}(T=k) &= \sum_{k=1}^{M} k\left[-2(p-1)p^{k-1} + \left(p^2-1\right)p^{2(k-1)}\right] \\ &= -2(p-1)\sum_{k=1}^{M} kp^{k-1} + \left(p^2-1\right)\sum_{k=1}^{M} kp^{2(k-1)} \\ &\to -2(p-1)\frac{1}{(1-p)^2} + \left(p^2-1\right)\frac{1}{\left(1-p^2\right)^2}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}E(T) &= \frac{2}{1-p} - \frac{1}{1-p^2} \\ &= \frac{2(1+p)-1}{(1-p)(1+p)} \\ &= \frac{1+2p}{1-p^2},\end{aligned}$$

Et pour N quelconque, on développe par le binôme :

$$\begin{aligned}\left(1-p^k\right)^N - \left(1-p^{k-1}\right)^N &= \sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}\left(-p^k\right)^i - \sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}\left(-p^{k-1}\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}\left(-p^k\right)^i - \sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}\left(-p^{k-1}\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}\left[\left(-p^k\right)^i - \left(-p^{k-1}\right)^i\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{M} k\mathrm{P}\left(T=k\right) &= \sum_{k=1}^{M} k\left[\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}\left[\left(-p^k\right)^i-\left(-p^{k-1}\right)^i\right]\right] \text{ que l'on inverse}\\ &= \sum_{i=0}^{N}\sum_{k=1}^{M} k\binom{N}{i}\left[\left(-p^k\right)^i-\left(-p^{k-1}\right)^i\right]\\ &= \sum_{i=0}^{N}(-1)^i\binom{N}{i}\sum_{k=1}^{M} k\left[\left(p^i\right)^k+\left(p^i\right)^{k-1}\right]\\ &\underset{M\to+\infty}{\to} \sum_{i=0}^{N}(-1)^i\binom{N}{i}\left[\frac{p^i}{\left(1-p^i\right)^2}-\frac{1}{\left(1-p^i\right)^2}\right]\end{aligned}$$

et en réduisant au même dénominateur, on trouve bien finalement :

$$E(T)=\sum_{i=1}^{N}\frac{(-1)^{i+1}\binom{N}{i}}{1-p^i}.$$

Exercice 2 : probabilités et analyse

On considère une urne composée de boules blanches et de boules rouges, mais dont la composition exacte est inconnue. Supposons qu'après avoir effectué n tirages au hasard avec remise dans cette urne, soit obtenu un total de r boules rouges. Il semble alors raisonnable de penser que la proportion initiale de boules rouges est proche de $\frac{r}{n}$.
Le problème qui suit propose une étude de cette situation.

I. Etude d'une loi de probabilité conditionnelle

Dans cette partie, N, n et r désignent des entiers tels que : $N \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, $0 \leqslant r \leqslant n$.
On considère $N+1$ urnes notées $U_0, U_1, ..., U_N$ telles que, pour tout entier k compris au sens large entre 0 et N, l'urne U_k soit composée de k boule(s) rouge(s) et de $N-k$ boule(s) blanche(s). On choisit une urne au hasard dans laquelle on effectue alors n tirages successifs avec remise de la boule dans cette même urne. On note U la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et R la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n tirages.

1. a) Soit k un entier compris au sens large entre 0 et N.
   Quand $(U=k)$ on effectue n tirages indépendants avec une probabilité $\frac{k}{N}$ d'obtenir une boule rouge.
   Donc $R/U=k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{k}{N}\right)$

   b) $(U=k)_{k\in[[0,N]]}$ étant un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(R=r\right) &= \sum_{k=0}^{N}\mathrm{P}_{U=k}(R=r)\mathrm{P}\left(U=k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{r}\left(\frac{k}{N}\right)^r\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}\frac{1}{N+1}\\ &= \frac{\binom{n}{r}}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^r\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}\end{aligned}$$

2. Soit i un entier compris au sens large entre 0 et N.
On utilise la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{R=r}(U=i) &= \frac{\mathrm{P}(U=i\cap R=r)}{\mathrm{P}(R=r)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(U=i)\,\mathrm{P}_{U=i}(R=r)}{\mathrm{P}(R=r)} \\
&= \frac{\dfrac{1}{N+1}\dbinom{n}{r}\left(\dfrac{i}{N}\right)^r\left(1-\dfrac{i}{N}\right)^{n-r}}{\dfrac{\binom{n}{r}}{N+1}\sum\limits_{k=0}^{N}\left(\dfrac{k}{N}\right)^r\left(1-\dfrac{k}{N}\right)^{n-r}} \\
&= \frac{\left(\dfrac{i}{N}\right)^r\left(1-\dfrac{i}{N}\right)^{n-r}}{\sum\limits_{k=0}^{N}\left(\dfrac{k}{N}\right)^r\left(1-\dfrac{k}{N}\right)^{n-r}}.
\end{aligned}$$

3. Soient p un réel de $[0\,;\,1]$ tel que pN soit un entier naturel et Y_N la variable aléatoire égale à la proportion de boules rouges dans l'urne choisie initialement parmi les $N+1$ urnes.

   a) le nombre de boules rouges dans l'urne est $N\ Y_N$ et c'est également le numéro de l'urne. Donc $(Y_N \leqslant p) = (N\ Y_N \leq Np) = (U \leq Np)$ d'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{R=r}(Y_N\leqslant p) &= \mathrm{P}_{R=r}(U\leqslant Np) \\
&= \sum_{i=0}^{Np}\mathrm{P}_{R=r}(U=i) \\
&= \sum_{i=0}^{Np}\frac{\left(\dfrac{i}{N}\right)^r\left(1-\dfrac{i}{N}\right)^{n-r}}{\sum\limits_{k=0}^{N}\left(\dfrac{k}{N}\right)^r\left(1-\dfrac{k}{N}\right)^{n-r}} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{Np}\left(\dfrac{i}{N}\right)^r\left(1-\dfrac{i}{N}\right)^{n-r}}{\sum\limits_{k=0}^{N}\left(\dfrac{k}{N}\right)^r\left(1-\dfrac{k}{N}\right)^{n-r}}
\end{aligned}$$

   b) On fait apparaître des sommes de Riemann :

$$\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^r\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r} = N\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^r\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}$$

   et comme la fonction $t\to t^r(1-t)^{n-r}$ est continue sur $[0,1]$ alors

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^r\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}\to\int_0^1 t^r(1-t)^{n-r}dt$$

   Et de façon similaire :

$$\sum_{i=0}^{Np}\left(\frac{i}{N}\right)^r\left(1-\frac{i}{N}\right)^{n-r} = Np^np\frac{1}{Np}\sum_{i=0}^{Np}\left(\frac{i}{Np}\right)^r\left(\frac{1}{p}-\frac{i}{Np}\right)^{n-r}$$

et comme la fonction $t \to t^r \left(\frac{1}{p} - t\right)^{n-r}$ est continue sur $[0,1]$ donc

$$\frac{1}{Np}\sum_{i=0}^{Np}\left(\frac{i}{Np}\right)^r\left(1-\frac{i}{Np}\right)^{n-r} \to \int_0^1 t^r\left(\frac{1}{p}-t\right)^{n-r} dt$$

sur lequel on effectue le changement de variable $x = pt \Longleftrightarrow t = x/p$: $dt = \frac{1}{p}dx$

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^r\left(\frac{1}{p}-t\right)^{n-r} dt &= \int_0^p \left(\frac{x}{p}\right)^r\left(\frac{1}{p}-\frac{x}{p}\right)^{n-r}\frac{1}{p}dx\\ &= \frac{1}{p^{n+1}}\int_0^p x^r(1-x)^{n-r}dx\end{aligned}$$

D'où pour le quotient des deux, après simplification par p^{n+1} au numérateur et par N entre le numérateur et le dénominateur :

$$\lim_{\substack{N\to+\infty\\ pN \text{ entier naturel}}} P(Y_n \leqslant p/R = r) = \frac{\int\limits_0^p t^r(1-t)^{n-r}dt}{\int\limits_0^1 t^r(1-t)^{n-r}dt}$$

II. Loi de probabilité bêta

Dans toute cette partie, a et b désignent des réels supérieurs ou égaux à 1.

1. $x \to x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ est une fonction continue pour x et $1-x$ strictement positifs, donc sur $]0,1[$

   Pour $\alpha > 0$, on a On a $x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)} \to 0$ quand $x \to 0^+$ et pour $\alpha = 0$ on a $x^0 = 1 \to 1$ quand $x \to 0$.

   Et comme $a-1 \geq 0$ et x^{a-1} a une limite finie en 0 et $(1-x)^{b-1}$ a une limite finie en 1.

   Donc la fonction $x \to x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ est une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$

   Conclusion : $\boxed{\text{l'intégrale } B(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \text{ est bien définie}}$

2. a) • On a :

$$\begin{aligned}B(a+1,b)+B(a,b+1) &= \int\limits_0^1 x^a(1-x)^{b-1}\,dx + \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^b\,dx\\ &= \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\left[x+(1-x)\right]dx\\ &= \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx\\ &= B(a,b).\end{aligned}$$

   • $B(a,b+1) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^b\,dx$ on pose $u'(x) = x^{a-1}$: $u(x) = \frac{1}{a}x^a$ et $v(x) = (1-x)^b$: $v'(x) = -b(1-x)^{b-1}$

On intègre par partie sur un intervalle où les fonctions sont C^1 : $[\alpha, \beta]$ avec $0 < \alpha \leq \beta < 1$

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta x^{a-1}(1-x)^b\,dx &= \left[\frac{1}{a}x^a(1-x)^b\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta -\frac{b}{a}\,x^{a-1}(1-x)^b\,dx \\
&= \frac{1}{a}\beta^a(1-\beta)^b - \frac{1}{a}\alpha^a(1-\alpha)^b_\alpha + \frac{b}{a}\int_\alpha^\beta -\frac{b}{a}\,x^{a-1}(1-x)^b\,dx \\
&\to \frac{b}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^b\,dx \text{ quand } \alpha \to 0\text{et}\beta \to 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{B\left(a, b+1\right) = \frac{b}{a} B\left(a+1, b\right)}$

- On a donc

$$\begin{aligned}
B(a,b) &= B\left(a+1,b\right) + B\left(a,b+1\right) \\
&= \left(\frac{b}{a}+1\right) B\left(a+1,b\right) \\
&= \frac{b+a}{a} B\left(a+1,b\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{B(a+1,b) = \frac{a}{a+b} B\left(a,b\right)}$

b) On a

$$\begin{aligned}
B\left(1,\,b\right) &= \int_0^1 (1-x)^{b-1}\,dx = \lim_{\alpha\to 1} = \left[-\frac{1}{b}\left(1-x\right)^b\right]_0^\alpha \\
&= \frac{1}{b}
\end{aligned}$$

Et d'après la relation précédente, on a alors (par récurrence)

$$B\left(a,b\right) = \frac{\left(a-1\right)\left(a-2\right)\cdots 2\cdot 1}{\left(a+b-1\right)\left(a+b-2\right)\cdot\cdots\cdot b} = \frac{(a-1)!\,(b-1)!}{(a+b-1)!}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Dans le cas où } a \text{ et } b \text{ sont entiers non nuls, } B\left(a,b\right) = \frac{(a-1)!\,(b-1)!}{(a+b-1)!}}$,

c) On peut écrire un programme récursif par $B(a+1,b) = \dfrac{a}{a+b} B\left(a,b\right)$ ou direct par calcul de produits :

```
var a,b:integer;
function recurrente(a,b:integer);
begin
     if  a=0 then recurrente:=1/b
      else recurrente=(a-1)/(a-1+b)*recurrente(a-1,b)
end;
function directe(a,b:integer);
var p:  real;i:integer;
begin
     p:=1/b;
     for i:=1 to a-1 do p:=p*i/(i+b);
     directe:=p;
begin
     writeln ('a,b ?'); readln(a,b);
     writeln(recurrente(a,b), directe(a,b));
end.
```

3. On revient au cas général où a et b sont des réels supérieurs ou égaux à 1, non nécessairement entiers.
C désignant un nombre réel, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = Cx^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 1. \end{cases}$$

a) f est une densité de probabilité si $f \geq 0$ (donc pour $C \geq 0$) et si $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$
Or $\int_{-\infty}^{0} f = \int_{-\infty}^{0} 0 = 0$ ainsi que $\int_{1}^{+\infty} f = 0$
Reste $\int_0^1 f = C \cdot B\left(a,b\right)$
Conclusion : $\boxed{f \text{ est une densité si et seulement si } C = 1/B\left(a,b\right)}$
On dit alors qu'une variable aléatoire de densité f suit la loi de probabilité bêta de paramètres a et b.

b) • f est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\begin{aligned} f'\left(x\right) &= C\left[\left(a-1\right)x^{a-2}\left(1-x\right)^{b-1} - \left(b-1\right)x^{a-1}\left(1-x\right)^{b-2}\right] \\ &= Cx^{a-2}\left(1-x\right)^{b-2}\left[\left(a-1\right)\left(1-x\right) - \left(b-1\right)x\right] \\ &= Cx^{a-2}\left(1-x\right)^{b-2}\left[x\left(2-a-b\right) + a - 1\right] \end{aligned}$$

Si ni a ni b ne sont 1 alors $2-a-b > 0$.
La fonction [] étant affine, elle s'annule au seul point $x_0 = \dfrac{1-a}{2-a-b}$
Et comme $1-b < 0$ on a $1-a+1-b < 1-a < 0$ d'où $0 < \dfrac{1-a}{2-a-b} < 1$
Conclusion : $\boxed{\text{si } a \text{ et } b \text{ sont distincts de 1, alors, sur }]0,\,1[,\ f' \text{ s'annule en un réel et un seul.}}$

- f est continue sur $]-\infty, 0]$, sur $]0,1[$ et sur $[0,+\infty.[$
  En 0 : Pour $x \in]0,1[$: $f(x) = Cx^{a-1}(1-x)^{b-1} \to 0 = f(0)$ si $a-1>0$ et $\to C \neq f(0)$ si $a=1$
  En 1 de même $f(x) \to 0 = f(1)$ si $b>1$ et $\to C \neq f(0)$ si $b=1$
  Conclusion : $\boxed{f \text{ est } \begin{cases} \text{continue sur } \mathbb{R} \text{ si } a>1 \text{ et } b>1 \\ \text{discontinue en 0 si } a=1 \\ \text{discontinue en 1 si } b=1 \end{cases}}$
- Pour compléter le tracer de la courbe représentative de f, il reste l'étude de la tangente en 0^+ et en 1^- :
  Dans le cas $1<a<2$ et $b>2$
  - le taux d'accroissement en 0 est : $Cx^{a-1}(1-x)^{b-1}/x = Cx^{a-2}(1-x)^{b-1}/x \to +\infty$ car $a-2<0$ donc la courbe a une demi tangente verticale en 0^+.
  - le taux d'accroissement en 1 est : $Cx^{a-1}(1-x)^{b-1}/(x-1) = Cx^{a-1}(1-x)^{b-2} \to 0$ donc la courbe a une tangente horizontale en 1.

  Dans le cas $a>2$ et $b=2$.
  - le taux d'accroissement en 0 est : $Cx^{a-2}(1-x)^{b-1}/x \to 0$ car $a-2>0$ donc la courbe a une tangente horizontale en 0.
  - le taux d'accroissement en 1 est : $Cx^{a-1} \to C$ donc la courbe a une demi tangente de pente C en 1^-.

c) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé et admettant pour densité f.

- X a une espérance si l'intégrale suivante est convergente : $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.
  - $\int_{-\infty}^{0} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0 = 0$
  - $\int_{1}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0 = 0$
  - $\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 Cx^a(1-x)^{b-1}dx = C \cdot B(a+1,b) = B(a+1,b)/B(a,b) = \dfrac{a}{a+b}$ grâce à la relation $B(a+1,b) = \dfrac{a}{a+b}B(a,b)$

  Conclusion : $\boxed{X \text{ a une espérance et } E(X) = \dfrac{a}{a+b}}$
- On détermine l'espérance de X^2 :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx &= \int_0^1 x^2 f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 Cx^{a+1}(1-x)^{b-1}dx = C \cdot B(a+2,b) \\ &= \frac{a+1}{a+b+1}\frac{a}{a+b} = E\left(X^2\right) \end{aligned}$$

  Donc

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left(X^2\right) - E(X)^2 \\ &= \frac{a+1}{a+b+1}\frac{a}{a+b} - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \\ &= a\frac{(a+1)(a+b) - a(a+b+1)}{(a+b+1)(a+b)^2} \\ &= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{V(X) = \dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}}$

III. Conclusion

Considérons à nouveau une urne composée de boules blanches et de boules rouges, dont la composition exacte est inconnue. On peut traduire cette ignorance en supposant que la variable aléatoire égale à la proportion de boules rouges de cette urne suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,\ 1]$. Cela revient à faire tendre dans la partie I. le nombre d'urnes vers l'infini.
En reprenant la situation et les notations de la partie I., et en admettant, dans la question 3. b) de cette partie, que le calcul de limite reste valable que pN soit un entier naturel ou pas, montrer que la suite des variables Y_N sachant $(R = r)$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi de probabilité bêta dont on déterminera les paramètres puis l'espérance.

On avait trouvé, pour tout $p \in [0, 1]$: $\lim\limits_{\substack{N\to+\infty \\ pN \text{ entier naturel}}} P(Y_n \leqslant p/R = r) = \dfrac{\int_0^p t^r(1-t)^{n-r}dt}{\int_0^1 t^r(1-t)^{n-r}dt}$ et 0 si $p \leq 0$
et 1 si $p \geq 1$
où l'on reconnaît la fonction de répartition d'une loi beta de paramètres $(r+1, n-r+1)$

Conclusion : $\boxed{Y_N \text{ sachant } (R = r) \text{ converge en loi vers une de loi de probabilité bêta } (r+1, n-r+1)}$

Conclusion : $\boxed{\text{Son espérance est } \ E_{R=r}(Y_\infty) = \dfrac{r+1}{n+2}}$

Interprétation : Sous l'hypothèse d'uniformité des proportions de boules rouges et blanche, si le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages est r, la proportion de rouge sera estimée à $\dfrac{r+1}{n+2}$.